Analysis I

Wintersemester 2016/2017 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 12 **Abgabe: 23.01.2017**

(1) Es sei $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $E(0) \neq 0$ und

$$E(x+y) = E(x) \cdot E(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $E(x) = \exp(a \cdot x)$.

(2) Sei $N : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$N(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{p} & \text{falls } x = \frac{q}{p}, \text{ wobei } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass N in allen irrationalen Punkten stetig und in allen rationalen Punkten unstetig ist.

(3) Welche der folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 4$, sind im gegebenen Punkt x_0 stetig?

(a)

$$x_0 = 1, \quad f_1(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x^2-x-1}{x+1} & \text{falls } x \neq -1 \\ 42 & \text{falls } x = -1 \end{cases}$$

(b)

$$x_0 = 1, \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x^2-x-1}{x-1} & \text{falls } x \neq 1 \\ 0 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

(c)

$$x_0 = 0, \quad f_3(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} & \text{falls } |x| \leq 1 \text{ und } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{falls } |x| > 1 \end{cases}$$

(d)

$$x_0 = 0, \quad f_4(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{|x|} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

(4) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x.$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$

(c) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$

(d) $f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$