Analysis III

Wintersemester 2011/12 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 11 **Abgabe Dienstag 27.01.2015**

(1) Der Träger einer Funktion $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Zeigen Sie

$$\operatorname{supp} f = \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{U \text{ offen}, f|_U \equiv 0} U$$

(2) Sei $\mathcal{S}$ der Schwartzraum des $\mathbb{R}^N$ und $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ die Fouriertransformation. Für $a \in \mathbb{R}^N$ definiere $(T_a f)(x) := f(a + x)$ und $(M_a f)(x) := e^{ixa} f(x)$ für $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}^N$. Zeigen Sie für $f \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} FT_a f &= M_a F f, \\ FM_{-a} f &= T_a F f. \end{aligned}$$

(3) (a) Sei $p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ ein Polynom. Zeigen Sie $pf \in \mathcal{S}$ für $f \in \mathcal{S}$.

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ ein Multiindex. Zeigen Sie $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}$ für $f \in \mathcal{S}$.

(4) Sei $\delta_n : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$ stetig mit $\int_{\mathbb{R}^N} \delta_n(x)dx = 1$ und $\operatorname{supp} \delta_n \subset (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})^N$, $n \in \mathbb{N}$. Für $u \in C_c(\mathbb{R}^N)$ sei $u * \delta_n$ definiert durch

$$u * \delta_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \delta_n(x - y)u(y)dy.$$

(a) Zeigen Sie $u * \delta_n \in C_c(\mathbb{R}^N)$, $n \geq 1$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge von Funktionen $u * \delta_n$, $n \geq 1$, gleichmäßig gegen u konvergiert.

Zusatzaufgaben

(Z1) Seien $\delta_n : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$, $n \geq 1$, wie in Aufgabe 4. Für ein Lebesgue-integrierbares $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sei $f * \delta_n$ wie oben definiert durch

$$f * \delta_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \delta_n(x - y) f(y) dy.$$

(a) Zeigen Sie, dass $f * \delta_n$, $n \geq 1$, stetig ist.

(b) Zeigen Sie $f * \delta_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$, in allen Stetigkeitspunkten x von f.