Analysis II

Wintersemester 2015/16 **Marcel Schmidt**

Blatt 2 **Abgabe Mittwoch 4.11.2015**

(1) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $e : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, e(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Zeigen Sie:

(a) Es ist e eine Metrik.

(b) Zu beliebigen $r > 0$ existieren ρ, $\sigma > 0$ mit

$$U_\rho^e(x) \subseteq U_r^d(x), \qquad U_\sigma^d(x) \subseteq U_r^e(x)$$

für alle $x \in X$.

(c) Eine Folge ist eine Cauchy Folge bezüglich e genau dann, wenn sie eine Cauchy Folge bezüglich d ist.

Hinweis: Die Funktion $[0, \infty) \to [0, 1)$, $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ ist monoton wachsend.

(2) Betrachten Sie den metrischen Raum $(\mathbb{R}^N, d_D)$ mit der diskreten Metrik

$$d_D : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \{0, 1\},\ d_D(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}.$$

(a) Charakterisieren Sie alle bezüglich d_D konvergenten Folgen.

(b) Sei $N = 2$. Zeichnen Sie die offene und abgeschlossene Kugel um 0 jeweils mit Radius 1/2 und Radius 1.

(3) Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^N$ mit den in der Vorlesung eingeführten Metriken d_1, d_2, d_∞. Zeigen Sie, dass für jedes $r > 0$ gilt:

$$U_r^{d_1}(0) \subseteq U_r^{d_2}(0) \subseteq U_r^{d_\infty}(0).$$

In welcher Beziehung stehen Cauchyfolgen bezüglich d_1 und Cauchyfolgen bezüglich d_∞? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

(4) Sei $\mathcal{L}$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^N$ nach $\mathbb{R}^N$ und $\|\cdot\|_*$ eine Norm auf $\mathbb{R}^N$. Zeigen Sie, dass durch

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_* : \|x\|_* \leq 1\}$$

eine Norm auf $\mathcal{L}$ definiert wird und

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

für alle $A, B \in \mathcal{L}$ gilt.

Hinweis: Es ist auch zu zeigen, dass $\|A\| < \infty$ für jedes $A \in \mathcal{L}$.

Zusatzaufgaben

(1) Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ eine endliche Menge und $d_D : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ die diskrete Metrik auf $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass die Menge aller unendlichen Wörter über $\mathcal{A}$

$$\mathcal{W}_{\mathcal{A}} = \{u : \mathbb{N} \to \mathcal{A}\},$$

bezüglich der Metrik

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_D(x(i), y(i))}{2^i}$$

total beschränkt ist, d.h. zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele offene ε-Kugeln existieren, sodass die Menge $\mathcal{W}_{\mathcal{A}}$ enthalten ist in der Vereinigung dieser Kugeln.

(2) Wir setzen $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$. Auf $\mathbb{C}$ sei wie üblich $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$((x, y), (x', y')) \mapsto (x, y) + (x', y') := (x + x', y + y').$$

Ferner definieren wir $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mittels

$$((x, y), (x', y')) \mapsto (x, y) \cdot (x', y') := (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Es ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper. Er heißt Körper der komplexen Zahlen. Für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ definieren wir $\mathrm{Re} z := x$, den Realteil von z, $\mathrm{Im} z := y$, den Imagaginärteil von z und $\bar{z} := (x, -y)$, die zu z konjugierte komplexe Zahl. Wir nennen das Element $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$ imaginäre Einheit. Der Betrag einer komplexen Zahl z ist definiert durch

$$|z| := \sqrt{(\mathrm{Re} z)^2 + (\mathrm{Im} z)^2}$$

Man kann den Körper der rellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Teilmenge $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ identifizieren. In diesem Sinne gilt $i^2 = -1$, $z = \mathrm{Re} z + i\, \mathrm{Im} z$ und $\bar{z} = \mathrm{Re} z - i\, \mathrm{Im} z$. Ferner erhalten wir $|z|^2 = z\bar{z}$. Insbesondere ist $|\cdot|$ eine Norm auf $\mathbb{C}$.

Beweisen Sie möglichst viele der oben getroffenen Aussagen.

Hinweis: Es gilt $zw = 1$ genau dann, wenn $w = |z|^{-2}\bar{z}$.

Viel Erfolg!