Analysis I

Wintersemester 2016/2017 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 11 **Abgabe: 16.01.2017**

(1) Sei $q > 0$ eine rationale Zahl. Beweisen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$$

genau dann konvergiert, wenn $q > 1$.

(2) Es sei q rational und

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{falls } n = 2k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{k^q} & \text{falls } n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Für welche q konvergieren bzw. divergieren die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^q} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n?$$

(3) Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-7)^k}{9^k}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+2}}{3^{k-1}}$

Hinweis zu (a): Es gilt $\frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{A}{3k-1} + \frac{B}{3k+2}$ für geeignete (welche?) A und B.

(4) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ mit $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n = k^2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sonst} \end{cases}$