Analysis III

Wintersemester 2014/2015 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 1 **Abgabe Dienstag 28.10.2014**

(1) Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(r, \theta, \varphi) := (rsin\theta \cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

Finden Sie die Punkte (r, θ, φ), in denen Φ lokal umkehrbar ist und berechnen Sie dort die Ableitung der jeweiligen Umkehrfunktionen. Geben Sie in einer Umgebung von $(0, 1, 0) = \Phi(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ eine lokale Umkehrfunktion an.

(2) Sei $E := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ die gelochte Ebene und $f : E \to E$ definiert durch

$$f(x, y) := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Zeigen Sie, dass f in allen Punkten lokal umkehrbar ist. Zeigen Sie, dass f auch global umkehrbar ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

(3) Zeigen Sie, dass durch folgende Gleichungen in einer Umgebung von (x_0, y_0, z_0) implizit eine Funktion $z = f(x, y)$ gegeben ist. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene von $f(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0).

a) $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$, $\quad (x_0, y_0, z_0) = (2, 2, 1)$.

b) $z^3 + 3xyz = 1$, $\quad (x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1)$.

c) $xy^2 + yz = z^3 + 2$, $\quad (x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 1)$.

(4) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y) := (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ alle lokalen Minima und lokalen Maxima.