Analysis II Sommersemester 2017

Hausaufgabenblatt 8

Abgabe am 31.05.2017

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{L}$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^N$ nach $\mathbb{R}^N$ und $\|\cdot\|_*$ eine Norm auf $\mathbb{R}^N$. Zeigen Sie, dass durch

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_* : \|x\|_* \leq 1\}$$

eine Norm auf $\mathcal{L}$ definiert wird und $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ für alle $A, B \in \mathcal{L}$ gilt.

Aufgabe 2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Zeigen Sie.

(a) $M^\circ = \{x \in X : M \text{ ist Umgebung von } x\} = \{x \in X : \exists \;\; r_x > 0 \text{ mit } U_{r_x}(x) \subset M\}$

(b) $\overline{M} = \{x \in X : \text{jede Umgebung von } x \text{ enthält Punkte von } M\}$
$= \{x \in X : \text{ es gibt } (x_n) \text{ in } M \text{ mit } x_n \to x\}$

(c) $\partial M = \{x \in X : \text{für jede Umgebung } U \text{ von } x \text{ gilt } U \cap M \neq \emptyset \text{ und } U \cap X \setminus M \neq \emptyset\}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für alle Teilmengen M eines metrischen Raumes (X, d) gilt:

(a) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

(b) $(M^\circ)^\circ = M^\circ$.

(c) Zeigen Sie außerdem, dass im Allgemeinen $\partial(\partial M) = \partial M$ nicht gilt.

Zusatzaufgabe 4. Man zeige für die Abbildungen $d_p : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$, $p \in [1, \infty)$,

$$d_p(x, y) := \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^N,$$

die Konvergenz

$$\lim_{p\to\infty} d_p(x, y) = d_\infty(x, y) := \max_{j=1,\ldots,N} |x_j - y_j|, \qquad x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Zusatzaufgabe 5. Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung besprochene normierte Raum $\ell^2(\mathbb{N})$ vollständig ist.

Anleitung: Sei $(u_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$ eine Cauchy-Folge. Zeigen Sie der Reihe nach:

- u_n konvergiert punktweise gegen eine Folge u, d.h. für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $u_n(m) \to u(m)$.
- Es existiert $c > 0$, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$

  $$\|(u)_N\|_2 \leq c,$$

  wobei $(u)_N = (u(1), u(2), \ldots, u(N), 0, \ldots)$ für $u = (u(1), u(2), \ldots)$ definiert ist.
- $u \in \ell^2(\mathbb{N})$.
- $\|(u - u_n)_N\| \to 0$ gleichmäßig in N.