

Gewoehnliche Differentialgleichungen - Notizen¹

Jena - Sommersemester 2015

Daniel Lenz

¹Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung. Konstruktive Kommentare sind willkommen.

Inhaltsverzeichnis

Einfuehrung	5
Klassische Mechanik	5
Populationsentwicklung	5
Variationsrechnung.	6
Ziele und Themen	6
Kapitel 0. Grundlegende Begriffe und Notation	7
Kapitel 1. Differentialgleichungen in einer Dimension	11
1. Wenn die rechte Seite nur von x abhaengt	11
2. Wenn die rechte Seite nur von y abhaengt - Autonome Differentialgleichungen	12
3. Wenn die rechte Seite ein Produkt ist - Differentialgleichungen mit getrennten Variablen	37
4. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung in einer Dimension	48
5. Loesen von Differentialgleichungen mittels Substitution und weitere Beispiele.	50
Kapitel 2. Differentialgleichungen in zwei Dimensionen: Erste Integrale, Hamiltonfunktionen und exakte Differentialgleichungen	55
1. Erste Integrale und Hamiltonfunktionen	55
2. Exakte Differentialgleichungen und Darstellung durch Graphen	58
3. Integrierende Faktoren	60
Kapitel 3. Reduktion auf Systeme erster Ordnung	63
Kapitel 4. Existenz von Loesungen	65
1. Der Peanosche Existenzsatz (Lokale Existenz von Loesungen)	65
2. Maximale Loesungen und globale Existenz	66
Kapitel 5. Der Eindeutigkeitssatz	71
1. Die lokale Lipschitzbedingung	71
2. Der Eindeutigkeitssatz	73
Kapitel 6. Das Picard Lindeloef Verfahren	75
Kapitel 7. Stetige Abhaengigkeit von den Anfangsbedingungen	79
Kapitel 8. Systeme linearer Differentialgleichungen	83
1. Existenz- und Eindeutigkeit der Loesungen fuer Systeme linearer Differentialgleichungen	83
2. Die homogene Gleichung: Loesungsmatrix und Fundamentalsystem	84

3. Die inhomogene Gleichung	88
4. Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	89

Einfuehrung

In diesem Kapitel diskutieren wir einige Situationen, in denen gewoehnliche Differentialgleichungen auftreten. Die hier gegebenen Situationen werden dann spaeter in der Vorlesung im Detail und mit ausfuehrlichen Erlaeuterungen noch einmal diskutiert werden. Hier geht es darum, einen ersten Eindruck vom Themengebiet zu erhalten.

Klassische Mechanik

Typische Frage. Wie bewegt sich die Erde um die Sonne?

Allgemeiner ist die Bewegung eines oder mehrere Massepunkte ein zentrales Thema der klassischen Mechanik. Fuer einen solchen Punkt mit von der Zeit t abhaengiger Ortskoordinate x lautet die Newtonsche Gleichung

$$(N) \quad mx'' = F(x),$$

wobei F das Kraftfeld beschreibt und $m > 0$ die Masse des Massepunktes angibt. Das ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung (da die zweite Ableitung die hoechste auftretende Ableitung ist). Der Zustand des Systems kann beschrieben werden durch den Vektor $(x, p) = (x(t), p(t))$ mit dem Impuls $p = mx'$. Die Newtonsche Gleichung und der Anfangszustand $(x(t_0), p(t_0))$ legen dann die gesamte Bewegung des Systems fest: Tatsaechlich ist naemlich die Newtonsche Gleichung (N) aequivalent zur Differentialgleichung erster Ordnung

$$(x, p)' = \left(\frac{p}{m}, F(x) \right) =: V(x, p)$$

und solche Gleichungen sind (unter geeigneten Voraussetzungen an V) eindeutig loesbar. Allgemein heisst in einer Gleichung der Form

$$y' = V(y)$$

die Funktion V das Vektorfeld. Ein Wert y_G mit $V(y_G) = 0$ heisst Gleichgewicht. Fuer einen solchen Punkt ist (offenbar) $y \equiv y_G$ eine Loesung.

Populationsentwicklung

Typische Frage: Wie entwickelt sich eine Population bzw. mehrere interagierende Populationen?

Beispiel - Normale Vermehrung. $p' = ap =: V(p)$ mit $a > 0$ bzw. $a < 0$.

Beispiel - Vermehrung unter (interner) Konkurrenz. $p' = a(1 - \frac{p}{p_0})p$.

Raeuber-Beute Modell. Es sind zwei Populationen p, q gegeben, wobei p sich von q ernaeht (und sonst ausstirbt) und q sich (ohne den Einfluss von p) normal vermehren wuerde:

$$q' = kq - aqp = aq \left(\frac{k}{a} - p \right), \quad p' = -lp + bqp = bp \left(-\frac{l}{b} + q \right)$$

mit $k, a, l, b > 0$, d.h.

$$(q, p)' = V(q, p)$$

mit

$$V(q, p) = (aq(k/a - p), bp(-l/b + q)).$$

Offenbar ist

$$(q_G, p_G) = \left(\frac{l}{b}, \frac{k}{a} \right)$$

ein Gleichgewichtspunkt.

Variationsrechnung.

Typische Fragen.

- Kuerzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene, auf der Kugel,...
- 'Schnellste Rutschbahn' zwischen zwei Punkten.

Allgemeiner geht es um die Extrema einer Funktion, die auf einer Menge von Kurven definiert ist. Die notwendige Bedingung fuer ein solches Extremum ist das Verschwinden der Variationsableitung und das fuehrt auf die Euler - Lagrangeschen Differentialgleichungen.

Ziele und Themen

Aus der bisherigen Diskussion ergeben sich die Ziele und Themen der Vorlesung wie folgt.

Klassische Theorie.

- Elementare Beispiele und Phaenomene.
- Existenz von Loesungen.
- Eindeutigkeit von Loesungen.
- Stetige Abhaengigkeit von den gegebenen Groessen.

Qualitative Theorie.

- Eigenschaften von Loesungen.

Ein wichtiges Hilfsmittel dazu ist die Theorie der Fluesse / dynamischen Systeme.

KAPITEL 0

Grundlegende Begriffe und Notation

In diesem Abschnitt lernen wir grundlegende Konzepte aus der Theorie kennen. Entsprechend sind die Ausführungen recht abstrakt. In den kommenden Abschnitten werden die Konzepte dann an vielen Beispielen erprobt werden. Es mag hilfreich sein eines der Beispiele aus dem vorigen Abschnitt, etwa die Grundgleichung der Newtonschen Mechanik

$$mx'' = F(x)$$

im Hinterkopf zu haben.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

mit $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ mit

$$\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{1+m(n+1)}$$

(wobei F tatsächlich von $y^{(n)}$ abhängen soll). Hier eine Erklärung zu den einzelnen Begriffen:

- Es handelt sich um eine Gleichung für die \mathbb{R}^m -wertige Funktion $y = y(x)$
- *Gewöhnlich*: Freie Variable x läuft in \mathbb{R} ; es kommen keine partiellen Ableitungen von y vor.
- *n -ter Ordnung*: Die höchste auftretende Ableitung von y ist die n -te.

Kann man die Gleichung in der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

schreiben mit $f : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\Omega^* \subset \mathbb{R}^{1+mn}$, so spricht man von einer *expliziten Differentialgleichung* und andernfalls von einer *impliziten Differentialgleichung*. Es heißt dann f die *rechte Seite* der Differentialgleichung. Wir werden es meist mit expliziten Differentialgleichungen zu tun haben, da man im allgemeinen implizite Differentialgleichungen nicht lösen kann (e.g. $F(x, y, y') = x^2 + |y'|^2 + 1 \dots$)

Ein *Anfangswertproblem* (AWP) besteht aus einer Differentialgleichung

$$0 = F(x, y', \dots, y^{(n)})$$

zusammen mit einer *Anfangsbedingung*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Wir kommen nun zum entscheidenden Begriff.

DEFINITION (Loesung). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+m(n+1)}$ und $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ gegeben.

(a) Ein Paar (I, φ) bestehend aus einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ (mit nichtleerem Inneren) und einer Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ heisst Loesung der Differentialgleichung

$$0 = F(x, y, y' \dots),$$

wenn gilt

- φ ist n -mal stetig differenzierbar.
- $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \in \Omega$ fuer alle $x \in I$.
- $F(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$ fuer alle $x \in I$.

(Hier dienen die ersten beiden Punkte dazu, dass die Aussage im dritten Punkt formuliert werden kann.)

(b) Sei nun zusaetzlich $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1})$ gegeben. Dann ist eine Loesung des (AWP)

$$0 = F(x, y, y', \dots),$$

$$(y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)) = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}),$$

gegeben durch eine Loesung (I, φ) der Differentialgleichung mit

$$(\varphi(x_0), \varphi'(x_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0)) = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}).$$

(c) Die Gesamtheit aller Loesungen bezeichnen wir als Loesungsschar.

Bemerkung.

- Fuer $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ definiert man

$$\varphi'(x) := \lim_{z \rightarrow x, z \neq x, z \in I} \frac{1}{z - x} (\varphi(z) - \varphi(x))$$

(falls der Grenzwert existiert). Dieser Grenzwert existiert genau dann, wenn jede Komponente von φ in x differenzierbar ist (Uebung). Die hoeheren Ableitungen von φ sind dann induktiv definiert durch $\varphi^{(n+1)} := (\varphi^{(n)})'$ (falls dies existiert).

- Oft werden Loesungen auch mit $x(t)$ oder $y(x)$ bezeichnet!

Notation. Im folgenden schreiben wir manchmal auch $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ oder nur φ statt (φ, I) .

Das Loesen einer Differentialgleichung bedeutet eine Kurve $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ zu finden, deren Ableitung im Punkt x gerade durch $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ gegeben ist. Damit wird also die Tangente an den Graphen $(x, \varphi(x))$, $x \in I$, der Loesung im Punkt (x, y) gerade durch den Vektor $(1, f(x, y))$ beschrieben. Das legt folgende Begriffsbildung nahe.

DEFINITION (Richtungsfeld). Sei eine gewoehnliche Differentialgleichung der Form

$$y' = f(x, y)$$

mit

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

gegeben. Dann heisst die Funktion

$$\Omega \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto (1, f(x, y)),$$

das Richtungsfeld der Differentialgleichung.

Bemerkung.

- Diese Terminologie ist nicht komplett standardisiert.
- Wenn es darum geht, das Richtungsfeld zu zeichnen, wird meist eine normierte Version gezeichnet d.h. die Vektoren $(1, f(x, y))$ werden alle auf die gleiche Länge skaliert (und Vektoren dieser Länge werden in 'vielen' Punkten angezeichnet).

DEFINITION (Autonome Differentialgleichungen und Vektorfeld). *Haengt bei der gewoehnlichen Differentialgleichung der Form $y' = f(x, y)$ mit*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

die Funktion f nicht von x ab, d.h. gilt $f(x, y) = g(y)$ mit

$$g : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

und

$$\Omega = \mathbb{R} \times \Sigma,$$

so spricht man von einer autonomen Differentialgleichung und schreibt

$$y' = g(y).$$

In diesem Fall bezeichnet man g als das Vektorfeld der Differentialgleichung. Zeichnet.

Bemerkung. Autonome Differentialgleichungen spielen eine grosse Rolle als Naturgesetze (zeitunabhaengig!).

PROPOSITION. *Ist $y' = g(y)$ eine autonome Differentialgleichung, so ist mit jeder Loesung (I, φ) auch $(a + I, \varphi_a)$ mit $\varphi_a(x) = \varphi(x - a)$ eine Loesung der Differentialgleichung*

Beweis. Einsetzen liefert

$$\varphi_a'(x) = \varphi'(x - a) = f(\varphi(x - a)) = f(\varphi_a(x)).$$

□

Bemerkungen.

- Bei einer nichtautonomen Differentialgleichung liefert die entsprechende Rechnung $\varphi_a'(x) = f(x - a, \varphi_a(x))$.
- Es ist ein allgemeines Phaenomen, dass Symmetrien der Differentialgleichung (hier Invarianz unter Verschiebungen in der x -Koordinate) zu Symmetrien der Loesungen fuehren.

KAPITEL 1

Differentialgleichungen in einer Dimension

In diesem Kapitel behandeln wir einige Klassen von Beispielen und lernen grundlegende Phaenomene kennen. Dazu betrachten wir die zu

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

gehörende Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

bzw. ein entsprechendes Anfangswertproblem. Gesucht ist jeweils eine Funktion $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ auf I . Wir werden verschiedene Einschränkungen an f machen.

1. Wenn die rechte Seite nur von x abhaengt

In diesem Abschnitt untersuchen wir den Fall, dass f nur von x abhaengt und nicht von y . Es geht also um Loesungen der Differentialgleichung

$$y^{(\prime)} = f(x).$$

Unter Umstaenden ist auch noch eine Anfangswert $y(x_0) = y_0$ gegeben.

Ist f stetig, so laesst sich dies durch einfaches Integrieren loesen: Es ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Funktion φ mit

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^x f(s) ds + y_0$$

eine Loesung des Anfangswertproblems.

Bemerkung.

- Entsprechend lassen sich natuerlich auch Differentialgleichungen hoeherer Ordnung behandeln, indem man dieses Verfahren iteriert.
- Entsprechend laesst sich auch der Fall behandeln, dass f vektorwertig ist d.h. nach \mathbb{R}^k mit $k > 1$ abbildet.
- Tatsaechlich lassen sich auch vektorwertige Gleichungen hoeherer Ordnung loesen. So führt etwa $x'' = (0, 0, g)$ auf $x = x_0 + tv + \frac{1}{2}t^2(0, 0, g)$ mit geeigneten x_0, v .

Ist f nicht stetig, so laesst sich die Gleichung im Allgemeinen nicht loesen. Das werden wir nun an einem Beispiel diskutieren:

Beispiel. $y' = 1_{\{0\}}(x)$. Sei φ eine Loesung auf einem Intervall um 0. Dann ist nach dem Mittelwertsatz φ konstant fuer $x < 0$ und fuer $x > 0$. Wegen der Stetigkeit von φ (tatsaechlich ist ja φ sogar differenzierbar) ist dann φ konstant und damit erfuehlt es nicht mehr die Differentialgleichung in $x = 0$.

Um diese Probleme zu vermeiden, werden wir immer die Stetigkeit der rechten Seite voraussetzen.

2. Wenn die rechte Seite nur von y abhaengt - Autonome Differentialgleichungen

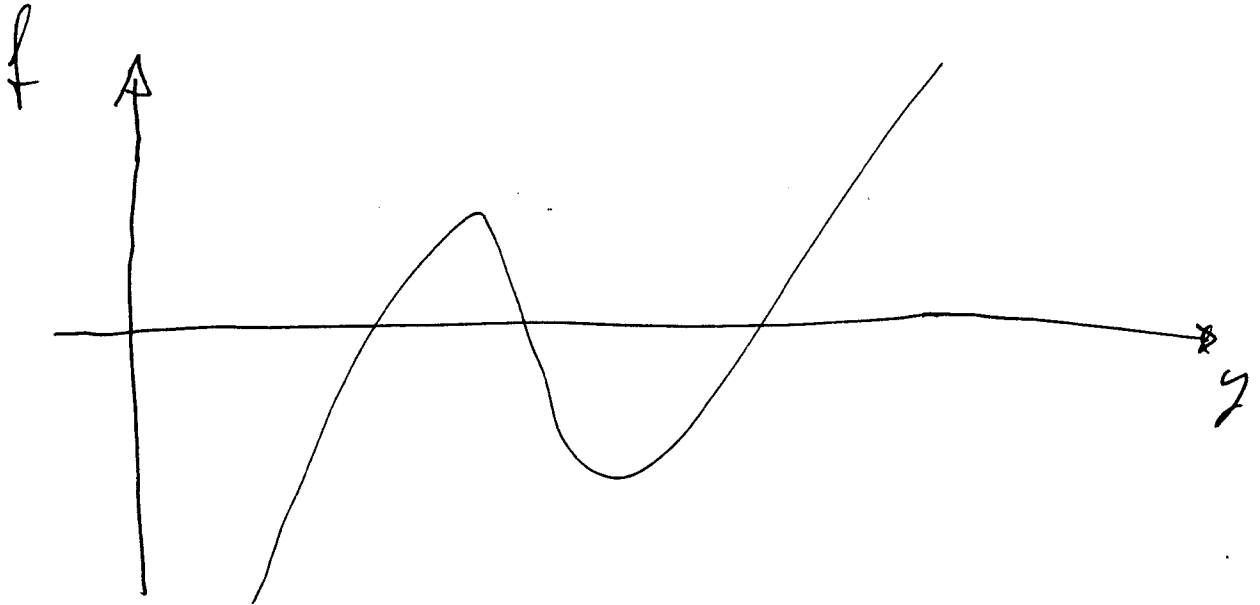
In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall, dass f nur von y abhaengt. Es geht also um folgende Situation: Sei $J := \Omega \subset \mathbb{R}$ offen und $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$y' = f(y)$$

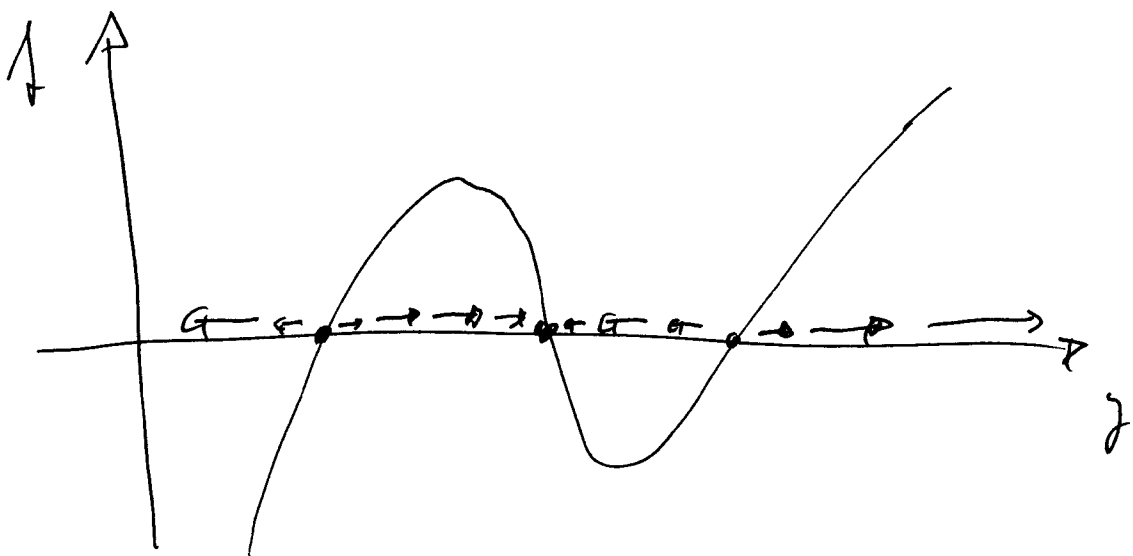
und geben gegebenenfalls noch einen Anfangswert $y(x_0) = y_0$ vor.

Zeichnung.

Funktion



Vektorfeld (u. Funktionen)



Die Zeichnung suggeriert, dass eine Loesung existiert, eindeutig ist und bis zum Gleichgewichtspunkt wandert.

Formal (d.h. unter Annahme der Existenz einer Loesung sowie gewisser weiterer Eigenschaften) laesst sich das auf folgende Art loesen: Gilt $f(y_0) = 0$, so ist $\varphi \equiv y_0$ eine Loesung. Sei nun $f(y_0) \neq 0$. Sei (φ, I) eine Loesung mit $\varphi(x_0) = y_0$. Dann gilt fuer x nahe x_0 also

$$f(\varphi(x)) \neq 0$$

und damit nach der Differentialgleichung

$$\frac{\varphi'(x)}{f(\varphi(x))} = 1,$$

also

$$\int_{x_0}^x \frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} dt = \int_{x_0}^x 1 dt$$

also

$$F(\varphi(x)) - F(\varphi(x_0)) = x - x_0$$

mit einer Stammfunktion F von $\frac{1}{f}$. Auflösen nach φ (falls moeglich) liefert dann

$$\varphi(x) = F^{-1}(x - x_0 + F(\varphi(x_0))).$$

Bei diesen Betrachtungen haben wir vorausgesetzt, dass eine Loesung existiert und Auflösen moeglich ist. Wenn man so vorgeht muss man also auf jeden Fall die Probe machen. Tatsaechlich ist unser Vorgehen gerechtfertigt, wie folgender Satz zeigt.

← Ende der Vorlesung →

Wir beginnen mit einer Vorueberlegung, die nichts mit Differentialgleichungen zu tun hat, sondern nur mit monotonen Funktionen.

LEMMA. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $y_0 \in J$ mit $f(y_0) \neq 0$ gegeben. Sei (y_-, y_+) das groesste Teilintervall von J um y_0 , auf dem f nicht verschwindet. Sei

$$F : (y_-, y_+) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{f(s)} ds.$$

Dann ist F streng monoton, es existieren

$$x_+ := \lim_{y \rightarrow y_+} F(y), \quad x_- := \lim_{y \rightarrow y_-} F(y),$$

(wobei die Werte $\pm\infty$ moeglich sind), und

$$F : (y_-, y_+) \rightarrow (x_-, x_+)$$

ist bijektiv und stetig differenzierbar (mit Ableitung $1/f$) und seine Inverse ist ebenfalls stetig differenzierbar.

Bemerkung. Ist J ein offenes Intervall in \mathbb{R} und $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(y_0) \neq 0$, so ist das groesste Teilintervall um y_0 , auf dem f nicht verschwindet, notwenigerweise offen.

Notation. In obigem Lemma (und im weiteren Text) schreiben wir (a, b) fuer das offene Intervall der Punkte in \mathbb{R} , die zwischen a und b liegen. Es gilt also

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ falls $a < b$ und $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : b < x < a\}$ falls $b < a$.

Beweis. Auf (y_-, y_+) verschwindet f nirgends. Daher ändert es sein Vorzeichen dort nicht. Daher ist F streng monoton. Damit existieren die Grenzwerte x_- und x_+ und

$$F : (y_-, y_+) \longrightarrow (x_-, x_+)$$

ist bijektiv, stetig differenzierbar mit Ableitung

$$F' = \frac{1}{f}.$$

Damit folgt die Aussage. \square

THEOREM (Autonome Differentialgleichungen in einer Dimension). *Sei $J \subset \mathbb{R}$ offen und $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $y_0 \in J$ mit $f(y_0) \neq 0$ gegeben. Sei (y_-, y_+) das größte Teilintervall von J um y_0 , auf dem f nicht verschwindet (das ist notwendig offen!). Sei*

$$F : (y_-, y_+) \longrightarrow (x_-, x_+), \quad F(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{f(s)} ds$$

die im vorigen Lemma studierte bijektive, streng monotone stetig differenzierbare Funktion mit Ableitung $1/f$. Dann ist

$$\varphi : (x_0 + x_-, x_0 + x_+) \longrightarrow (y_-, y_+), \quad \varphi(x) := F^{-1}(x - x_0)$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + x_+} \varphi(x) = y_+, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + x_-} \varphi(x) = y_-.$$

Ist (I, ψ) eine weitere Lösung des Anfangswertproblems, so stimmt sie auf $I \cap (x_0 + x_-, x_0 + x_+)$ mit φ überein. Statt mit F kann man auch mit einer beliebigen Stammfunktion \tilde{F} von $1/f$ rechnen und dann $\varphi(x) = \tilde{F}^{-1}(x - x_0 + \tilde{F}(y_0))$ betrachten.

Bemerkung. Der Satz liefert eine rigorose Bestätigung, dafür dass die Lösung existiert und (soweit es welche gibt) zu den Gleichgewichtspunkten 'fließt'. Der Satz klärt nicht, ob die Lösung solche Gleichgewichtspunkte in endlicher Zeit erreicht.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $x_0 = 0$ (autonomes System). Damit ist dann

$$\varphi := F^{-1} : (x_-, x_+) \longrightarrow (y_-, y_+)$$

eine streng monotone stetig differenzierbare Funktion nach dem vorigen Lemma. Weiterhin gilt nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\varphi'(x) = \frac{1}{F'(\varphi(x))} = f(\varphi(x)) \quad \text{und} \quad \varphi(0) = F^{-1}(0) = y_0 \quad (\text{da } F(y_0) = 0).$$

Es löst also φ das AWP. Weiterhin gelten aufgrund der Monotonie von F noch die Aussagen über die Grenzwerte von φ bei y_- und y_+ .

Ist \tilde{F} eine weitere Stammfunktion von $1/f$, so gilt $F = \tilde{F} - \tilde{F}(y_0)$. Damit folgen die Aussagen ueber \tilde{F} leicht. (Denn es fuehrt

$$x - x_0 = F(\varphi(x)) = \tilde{F}(\varphi(x)) - \tilde{F}(y_0),$$

direkt auf

$$\tilde{F}(\varphi(x)) = x - x_0 + \tilde{F}(y_0)$$

und damit ergibt sich

$$\varphi(x) = \tilde{F}^{-1}(x - x_0 + \tilde{F}(y_0)).$$

Es bleibt die Aussage ueber die Eindeutigkeit zu zeigen. Dies ergibt sich im wesentlichen als Konsequenz der oben durchgefuehrten formalen Rechnung: Sei (I, ψ) eine weitere Loesung des AWP. Dann gilt (fuer x nahe x_0) also (vgl. Formale Loesung)

$$\frac{\psi'(x)}{f(\psi(x))} = 1.$$

Das liefert nach Integration

$$F(\psi(x)) - F(y_0) = x - x_0.$$

Da F invertierbar ist folgt (mit $F(y_0) = 0$ und $x_0 = 0$)

$$\psi = F^{-1}(x - x_0 + F(y_0)) = \varphi.$$

Die Loesung eines AWP ist also lokal eindeutig. Damit ist sie aber auch global eindeutig nach einem ganz allgemeinen Schluss: Sei ohne Einschraenkung I das maximale Intervall auf dem beiden Loesungen existieren. Sei U das maximale Intervall auf dem die Loesungen uebereinstimmen. Angenommen: $U \neq I$. Dann ist (ohne Einschraenkung) der rechte Randpunkt d von U kleiner als der rechte Randpunkt von I . (Zeichnung) Aufgrund der Stetigkeit stimmen die Loesungen noch in d ueberein. Aufgrund der lokalen Eindeutigkeit (angewendet mit dem Startpunkt d) stimmen die Loesungen dann noch etwas rechts von d ueberein. Das ist ein Widerspruch zur Maximalitaet von U . \square

Aus dem Satz ergeben sich leicht zwei Varianten, wie man konkret Loesungen von $y' = f(y)$ finden kann.

Variante 1. Die maximale vom Satz gegebenen Loesung einschliesslich des korrekten Anfangswertes und eine spezielle Stammfunktion F mit $F(y_0) = 0$ findet man man mit folgendem Algorithmus, bei dem automatisch die richtigen Anfangsbedingungen erfuehrt sind:

- Bestimmen des maximalen Intervalles (y_-, y_+) um y_0 , auf dem f nicht verschwindet und Berechnen von $F(y) = \int_{y_0}^y 1/f(s)ds$.
- Bestimmen von (x_-, x_+) als Grenzwert. (Das liefert das Intervall auf dem die Loesung definiert ist.)
- Auflösen von $(x - x_0) = F(y) - F(y_0)$ nach y .

Variante 2. Der Satz besagt, dass das folgende oft praktizierten Verfahren immer lokal, d.h. in einer Umgebung von x_0 gerechtfertigt ist (und tatsaechlich korrekt ist, solange man sich auf Bereiche von Loesungen y mit nicht-verschwindendem f beschraenkt):

2. WENN DIE RECHTE SEITE NUR VON y ABHAENGT - AUTONOME DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

- Aufstellen der Gleichung gemäss

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \implies dx = \frac{dy}{f(y)} \implies x = F(y) + C$$

mit Stammfunktion F von $1/f$ und C geeignet. (Das ist gerade die im Satz genannte Wahl einer Stammfunktion)

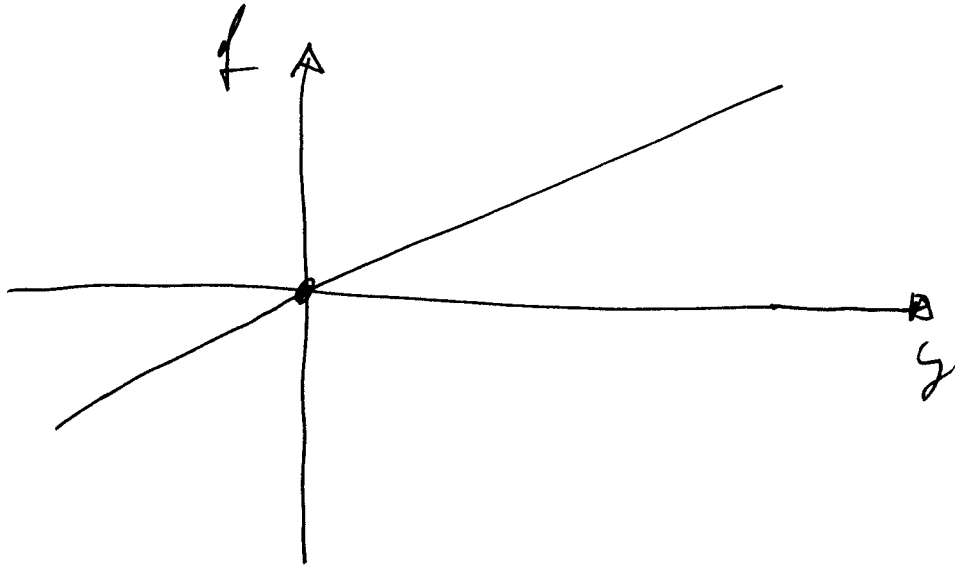
- Bestimmen von C aus dem Anfangswert gemäss $x_0 = F(y_0) + C$. (Das ist gerade das im Satz genannte 'Verschieben' um $\tilde{F}(y_0)$).
- Auflösen nach y (Das ist gerade das im Satz genannte Umkehren von F .)

Damit koennen wir nun einige Beispiele diskutieren (die wir zum Teil schon kennen). Dabei werden wir bei der Diskussion aller Beispiele nach dem folgenden Schema vorgehen.

- Zeichnen der Funktion $f(y)$ in einem Koordinatensystem, dessen horizontale Achse die y -Achse ist und dessen vertikale Achse die Werte von f darstell.
- Zeichnen des Vektorfeldes.
- Anhand der Zeichnung des Vektorfeldes kann man einen ersten Eindruck vom Verlauf der Loesungen erhalten.
- Wir 'arbeiten' dann Variante 1 ab (und zeichnen die entstehende Loesungen schematisch).
- Wir zeichnen schliesslich die Loesungsschar. Die Loesungsschar ist die Menge aller Loesungen. Dabei wird ein Koordinatensystem verwendet, dessen horizontale Achse die x -Achse ist und dessen vertikale Achse die y -Achse ist. Zu jedem Punkt (x_0, y_0) in der $x - y$ -Ebene zeichnen wir die / eine Loesung. (Der besseren Übersichtlichkeit halber zeichnen wir nicht alle Loesungen sondern nur eine endliche Anzahl ;-)

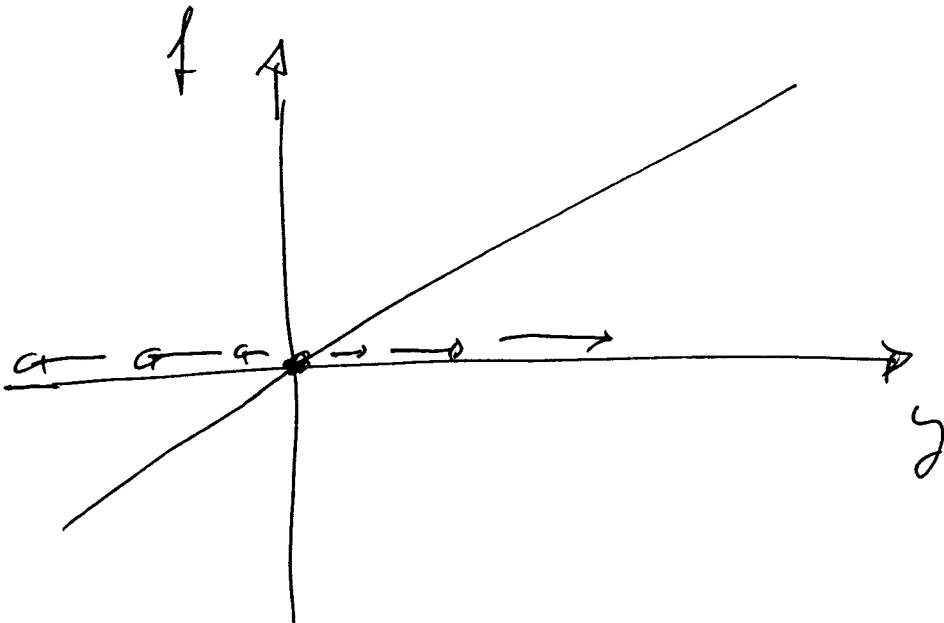
Normale Vermehrung. $y' = ay = f(y)$, $y(x_0) = y_0$ mit $a \neq 0$.

Funktion
 $f(x) = ax$



$a > 0$

Vektorfeld (und Funktion)



Wir unterscheiden drei Fälle:

Es gilt $y_0 > 0$. Dann ist

$$(y_-, y_+) = (0, \infty)$$

$$F(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{f(s)} ds = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{y}{y_0}\right),$$

$(x_-, x_+) = (-\infty, +\infty)$ d.h. Lösung existiert und ist eindeutig auf ganz \mathbb{R} .

Auflösen von

$$x - x_0 = \frac{1}{a} \ln \frac{y}{y_0}$$

liefert

$$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}.$$

Es gilt $y_0 < 0$. Dann ist

$$(y_-, y_+) = (-\infty, 0)$$

$$F(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{f(s)} ds = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{y}{y_0}\right),$$

$(x_-, x_+) = (-\infty, +\infty)$ d.h. Lösung existiert und ist eindeutig auf ganz \mathbb{R} .

Auflösen von

$$x - x_0 = \frac{1}{a} \ln \frac{y}{y_0}$$

liefert

$$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}.$$

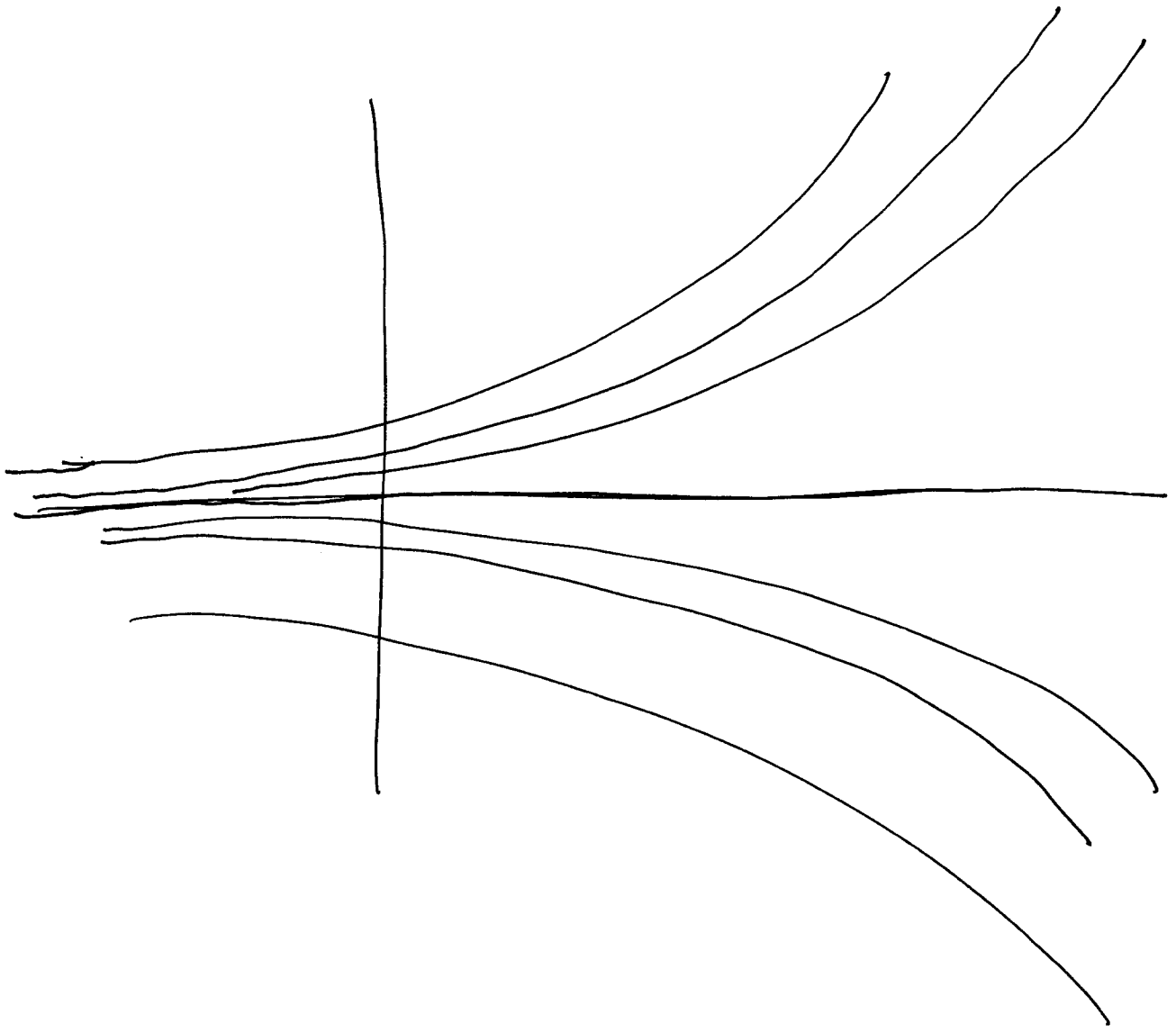
Es gilt $y_0 = 0$. Dann ist $y \equiv 0 = y_0 e^{a(x-x_0)}$ eine Lösung. Nach dem bisher betrachteten ist es sogar die einzige Lösung (da die anderen Lösungen nicht in Null 'einmünden').

Zusammenfassung: Das Anfangswertproblem $y' = ay, y(x_0) = y_0$ hat die eindeutige auf ganz \mathbb{R} definierte Lösung

$$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}.$$

Insbesondere wird der Gleichgewichtspunkt nicht in endlicher Zeit erreicht und die Lösung explodiert nicht in endlicher Zeit.

Lösungsschar ($y' = ay$)

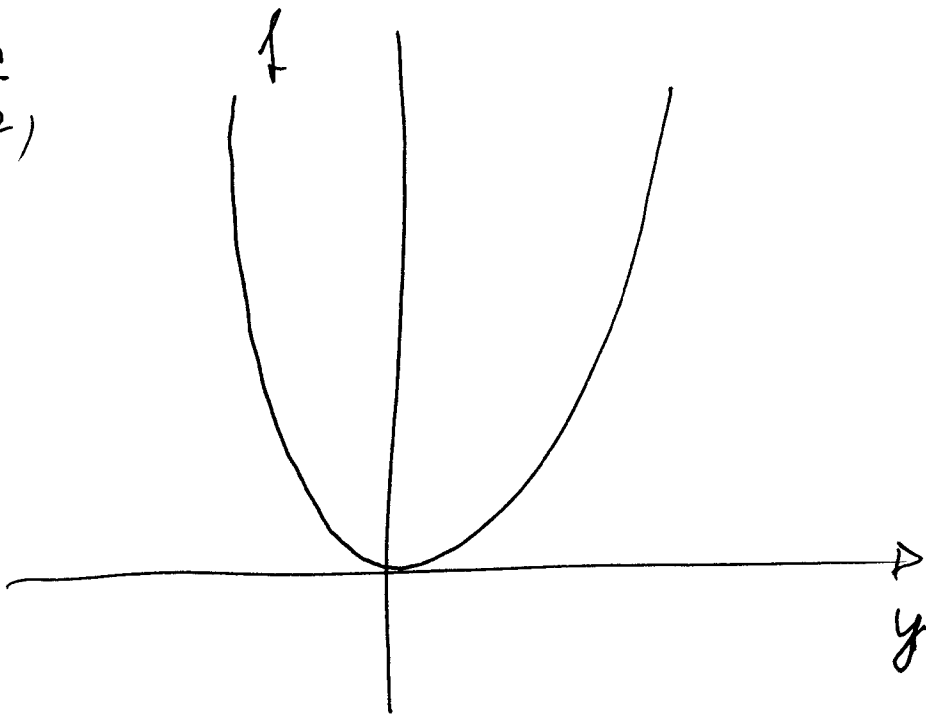


2. WENN DIE RECHTE SEITE NUR VON y ABHÄNGT - AUTONOME DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

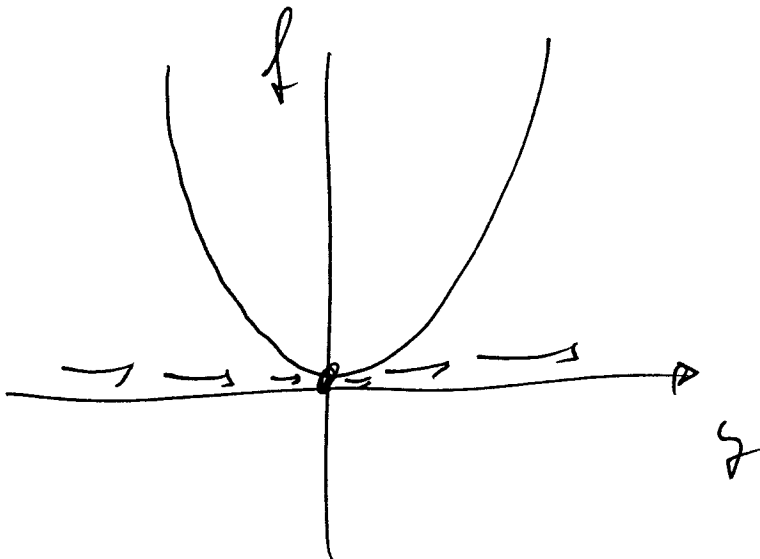
'Starke Vermehrung. $y' = ay^2 = f(y)$, $y(x_0) = y_0$.

←—————→
Ende der Vorlesung.

Funktion
($f(x) = ax^2$)



Vektorfeld (und Funktion)



Ohne Einschränkung $a > 0$. (Anderer Fall analog, Zeitumkehr)

Wir unterscheiden drei Fälle:

Es gilt $y_0 > 0$. Dann ist

$$(y_-, y_+) = (0, \infty)$$

$$F(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{as^2} ds = \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} \right),$$

$$(x_-, x_+) = \left(-\infty, \frac{1}{ay_0} \right).$$

Auflösen von

$$x - x_0 = \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} \right)$$

liefert

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - a(x - x_0)}.$$

Zeichnung (positive Funktion, explosion am rechten Rand, konvergiert gegen 0 am linken Rand). Wieder ist die Lösung eindeutig (klar...).

Es gilt $y_0 < 0$. Dann ist

$$(y_-, y_+) = (-\infty, 0)$$

$$F(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{as^2} ds = \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} \right),$$

$$(x_-, x_+) = \left(\frac{1}{ay_0}, +\infty \right).$$

Auflösen von

$$x - x_0 = \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} \right)$$

liefert

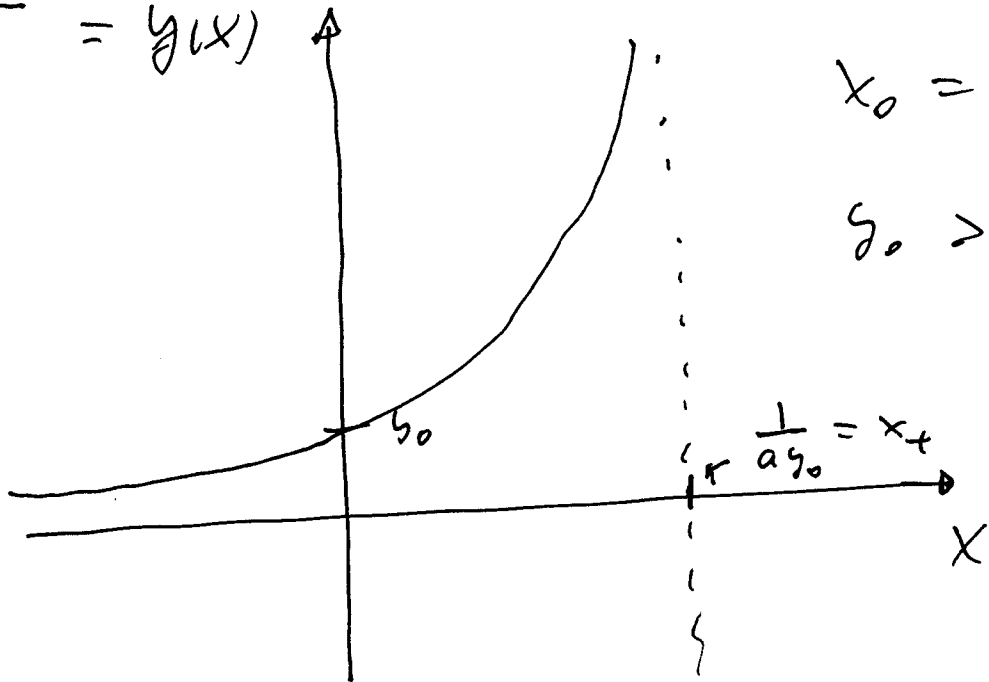
$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - a(x - x_0)}.$$

Zeichnung. (Negative Funktion, Explosion am linken Rand, konvergiert gegen 0 am rechten Rand) Wieder ist die Lösung eindeutig.

Es gilt $y_0 = 0$. Dann ist $y \equiv 0$ eine Lösung. Nach dem bisher betrachteten ist es sogar die einzige Lösung (da die anderen Lösungen nicht in Null 'einmünden').

Lösungen ($y' = ay^2$)

$$\frac{1}{\frac{1}{y_0} - ax} = y(x)$$

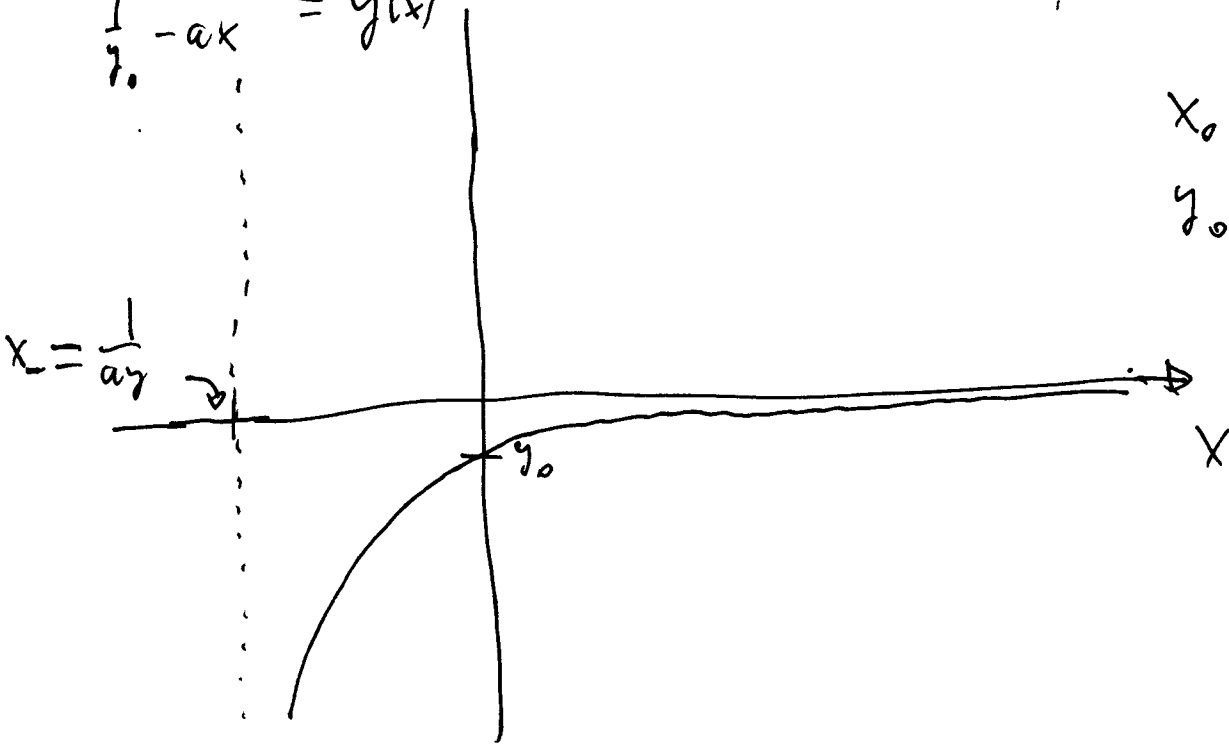


$$x_0 = 0$$

$$y_0 > 0$$

$$x = \frac{1}{ay_0} = x_{\text{t}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{y_0} - ax} = y(x)$$



$$x_0 = 0$$

$$y_0 < 0$$

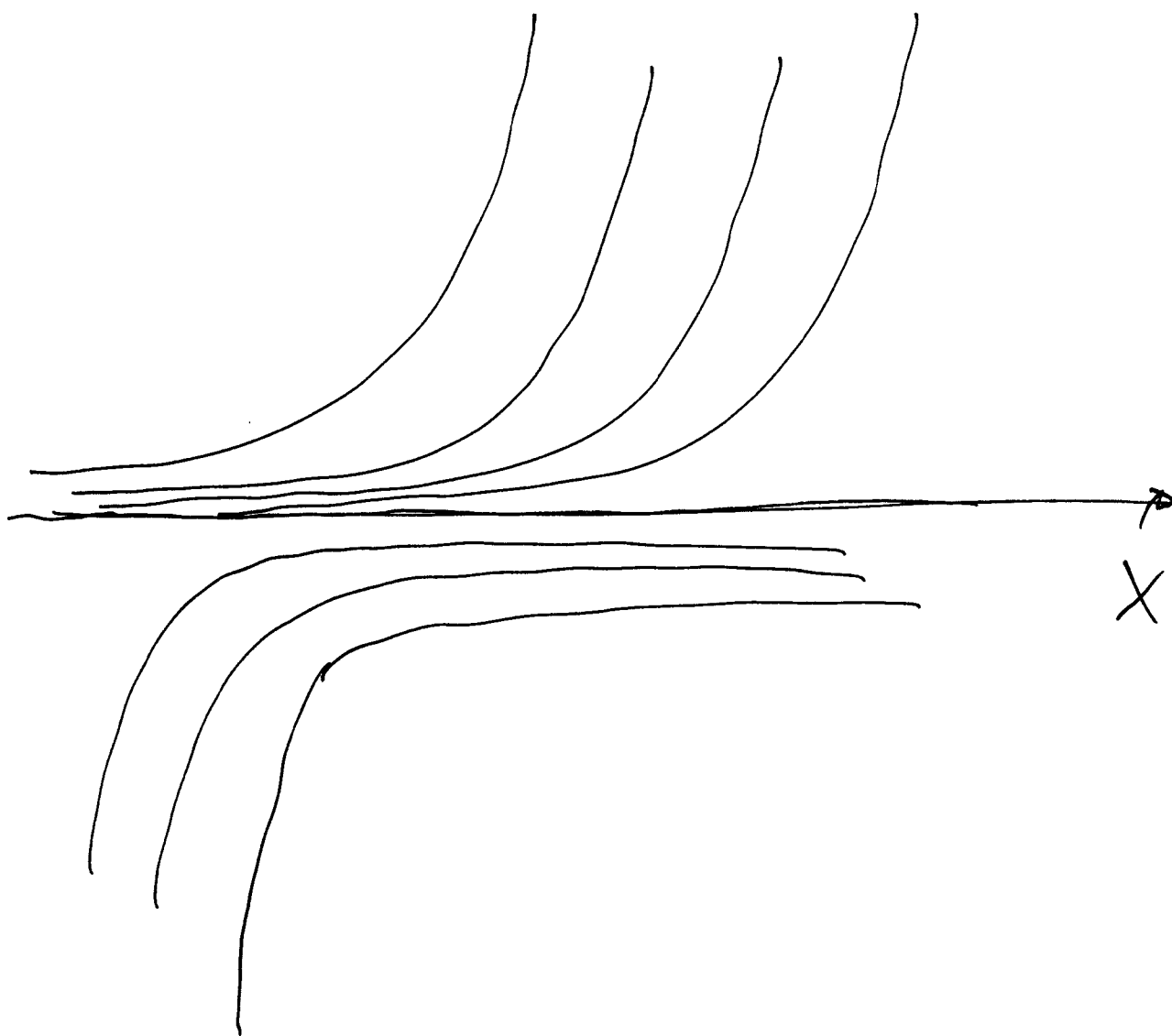
$$x = \frac{1}{ay}$$

2. WENN DIE RECHTE SEITE NUR VON y ABHAENGT - AUTONOME DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Zusammenfassung: Auch in diesem Fall ist die Loesung eindeutig, erreicht den Gleichgewichtspunkt nicht in endlicher Zeit. Allerdings existiert die Loesung in diesem Fall auch nicht ueberall, sondern 'explodiert' in endlicher Zeit. Der Grund fuer die Explosion liegt im starken Wachstum von y^2 fuer grosse Werte von y .

Man beachte, dass die Loesung nicht ueberall existiert, obwohl das Vektorfeld f auf ganz \mathbb{R} definiert ist!

Lösungschar:

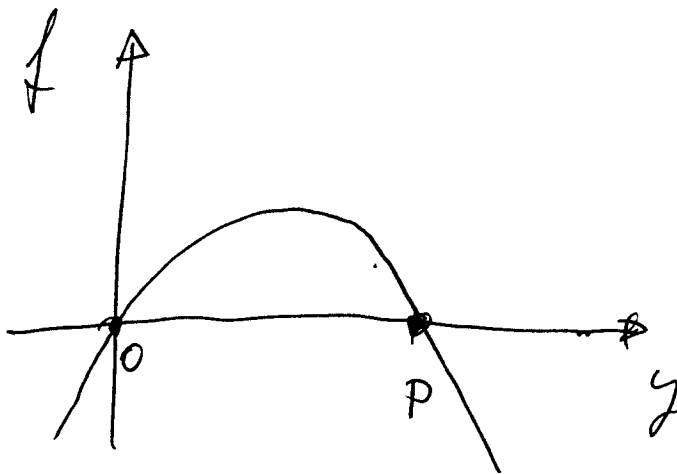


2. WENN DIE RECHTE SEITE NUR VON y ABHÄNGT - AUTONOME DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

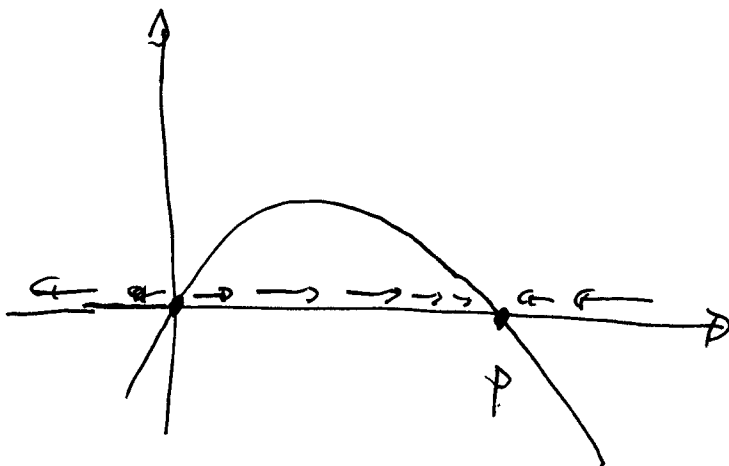
Bemerkung. Die Auftretenden $(x - x_0)$ Terme sind typisch fuer autonome Differentialgleichung (Invarianz unter Verschiebung).

Populationsentwicklung. $y' = (a - by)y = b\left(\frac{a}{b} - y\right)y = f(y)$ fuer $a, b > 0$.
(Den Fall $a = 0$ oder $b = 0$ haben wir schon behandelt.)

Funktion ($f(y) = b(p-y)y$)



Vektorfeld (und Funktion):



Idee: Gleichgewichtspunkte in 0 und $p = a/b$. Alle Loesungen ausser den Gleichgewichtspunkten laufen nach a/b

Sei $0 < y_0 < p$. Dann gilt:

$$(y_-, y_+) = (0, p)$$

$$F(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{b(p-s)s} ds = \frac{1}{a} \int_{y_0}^y \left(\frac{1}{p-s} + \frac{1}{s} \right) ds = \frac{1}{a} (-\ln(p-y) + \ln y) + C$$

mit $C := \frac{1}{a} (\ln(p-y_0) - \ln y_0)$.

$$(x_-, x_+) = (-\infty, +\infty) \text{ (Loesung existiert. auf ganz } \mathbb{R} \text{).}$$

Auflösen von

$$x - x_0 = \frac{1}{a} \ln \frac{y}{p-y} + C$$

liefert

$$y(x) = \frac{p}{1 + \frac{p-y_0}{y_0} e^{-a(x-x_0)}}.$$

Zeichnung. (vgl. erwartetes Verhalten)

Sei $p < y_0$. Dann gilt:

$$(y_-, y_+) = (p, \infty)$$

$$F(y) = \dots = \frac{1}{a} \ln \frac{y}{y-p} + C$$

mit

$$C = -\frac{1}{a} \ln \frac{y_0}{y_0-p} < 0.$$

$$(x_-, x_+) = (C, \infty)$$

(Hier: C kommt von $y_+ = \infty$; ∞ kommt von $y_- = p$.) Damit explodiert die Loesung am linken Rand.) Auflöesung von

$$x - x_0 = F(y)$$

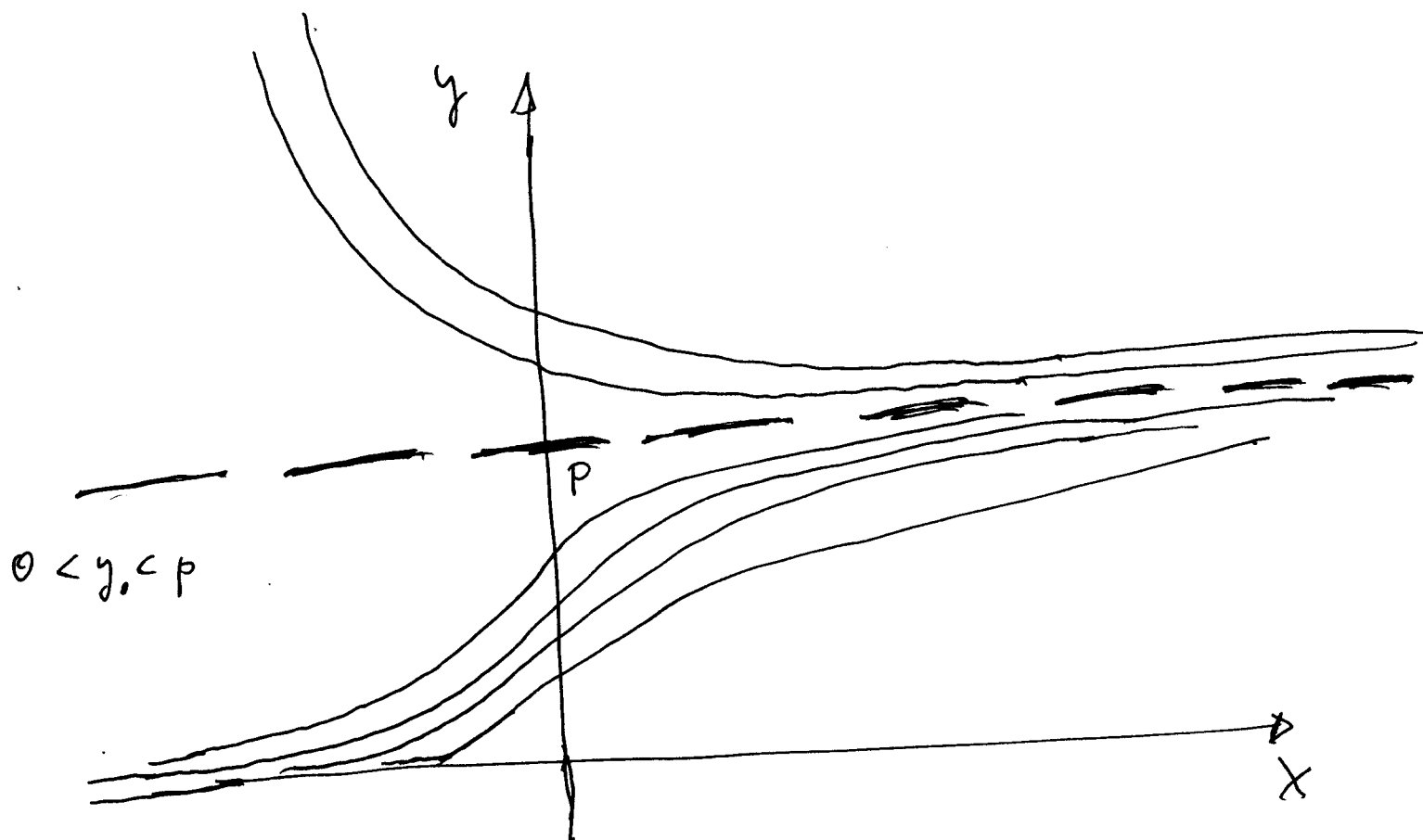
liefert wieder

$$y(x) = \frac{p}{1 + \frac{p-y_0}{y_0} e^{-a(x-x_0)}}.$$

Zeichnung, erwartetes Verhalten vgl. $y' = y^2$.

Sei $y_0 = 0$ oder $y_0 = p$. Dann erhalten wir die konstante Loesung. $y \equiv 0$ bzw. $y \equiv p$ und keine andere (da die anderen Loesungen diese Werte nicht annehmen).

Lösungen ($y' = b(p-y)y$)



$$y(x) = \frac{p}{1 + \frac{p-y_0}{y_0} e^{-a(x-x_0)}}$$

2. WENN DIE RECHTE SEITE NUR VON y ABHAENGT - AUTONOME DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

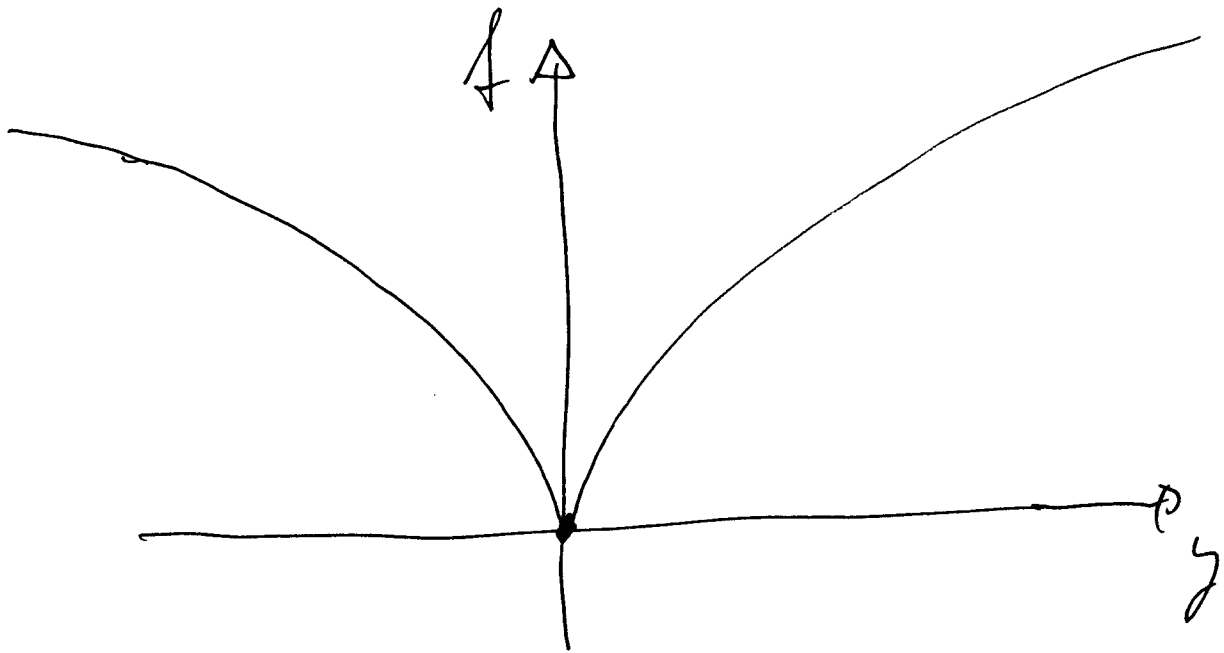
Zusammenfassung: Auch in diesem Fall ist die Loesung eindeutig, erreicht den Gleichgewichtspunkt nicht in endlicher Zeit. Allerdings existiert die Loesung in diesem Fall auch nicht ueberall, sondern 'explodiert' in endlicher Zeit. Der Grund fuer die Explosion liegt im starken Wachstum der Groessenordnung y^2 fuer grosse Werte von y .

Man beachte, dass die Loesung nicht ueberall existiert, obwohl das Vektorfeld f auf ganz \mathbb{R} definiert ist!

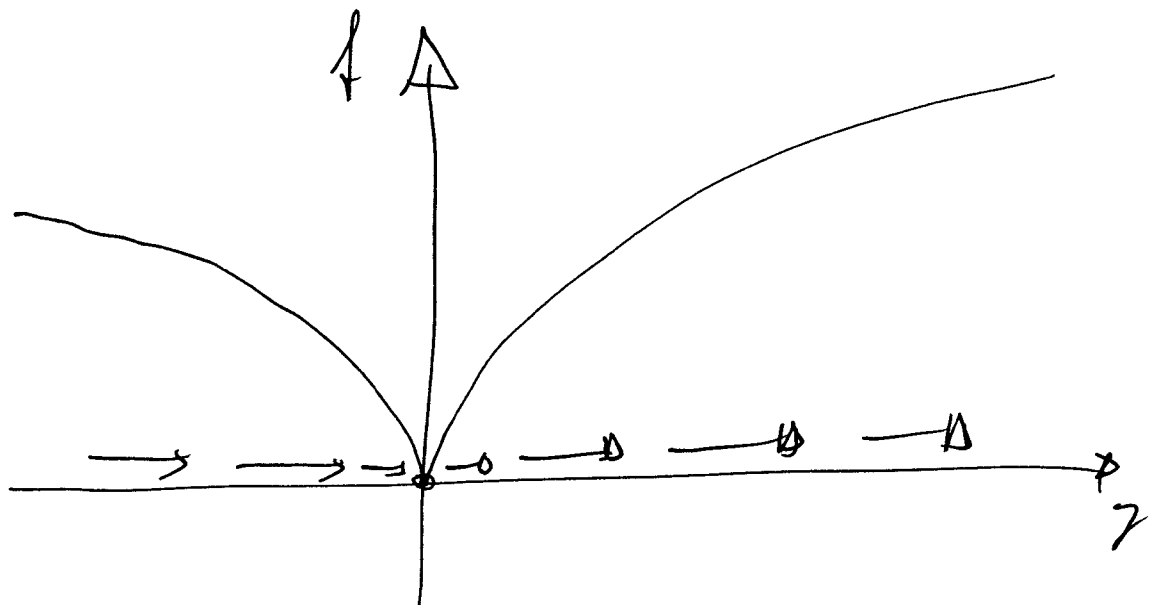
'Schwache' Vermehrung. $y' = |y|^{1/2} = f(y) \quad y(x_0) = y_0.$

←-----→
Ende der Vorlesung.

Funktion: $f(y) = |y|^{\frac{1}{2}}$



Vektorfeld (und Funktion)



Beachte: In 0 ist die Funktion nicht stetig differenzierbar. Tatsächlich existieren links- und rechtsseitig die Grenzwerte der Differenzenquotienten uneigentlich und liefern $-\infty$ und $+\infty$. Zeichnung.

Sei $y_0 > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(y_-, y_+) &= (0, \infty) \\ F(y) &= \int_{y_0}^y \frac{1}{s^{1/2}} ds = 2(\sqrt{y} - \sqrt{y_0}) \\ (x_-, x_+) &= (-2\sqrt{y_0}, \infty).\end{aligned}$$

Auflösen von

$$x - x_0 = 2(\sqrt{y} - \sqrt{y_0})$$

liefert

$$y(x) = \frac{1}{4}(x - x_0 + 2\sqrt{y_0})^2.$$

Für $(x - x_0) \rightarrow -2\sqrt{y_0}$ gilt also $y(x) \rightarrow 0$. Der Gleichgewichtspunkt wurde vor endlicher Zeit verlassen. Zeichnung.

Sei $y_0 < 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(y_-, y_+) &= (-\infty, 0) \\ F(y) &= .. = -2(\sqrt{(-y)} - \sqrt{(-y_0)}) \\ (x_-, x_+) &= (-\infty, 2\sqrt{(-y_0)}).\end{aligned}$$

Auflösen von

$$x - x_0 = -2(\sqrt{(-y)} - \sqrt{(-y_0)})$$

liefert

$$y(x) = -\frac{1}{4}(x - x_0 - 2\sqrt{-y_0})^2.$$

Für $x - x_0 \rightarrow 2\sqrt{-y_0}$ gilt wieder $y(x) \rightarrow 0$. Der Gleichgewichtspunkt wird in endlicher Zeit erreicht.

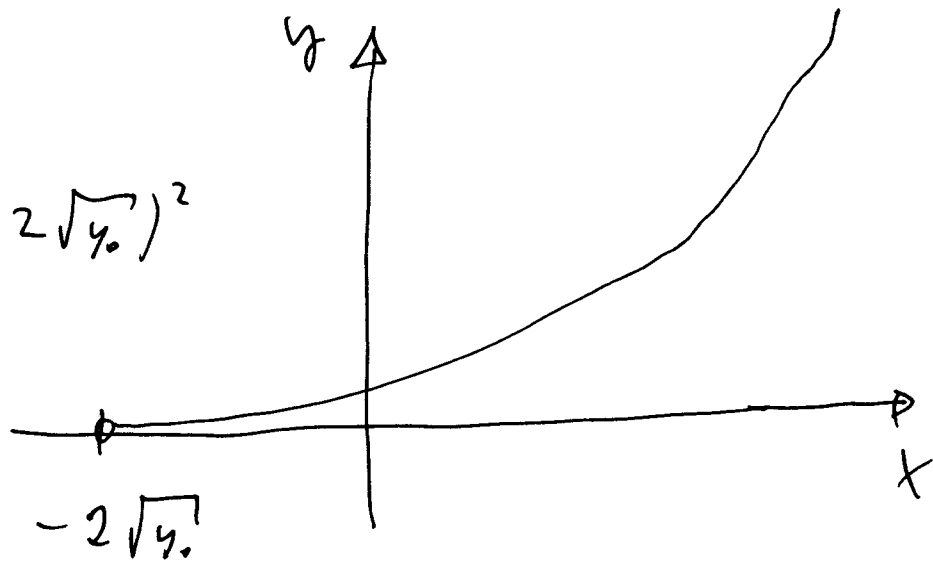
Sei $y_0 = 0$. Dann ist $(I, 0)$ eine Lösung auf jedem Intervall I .

Lösungen ($y' = |y|^{\frac{1}{2}}$)

$$y_0 > 0$$

$$x_0 = 0$$

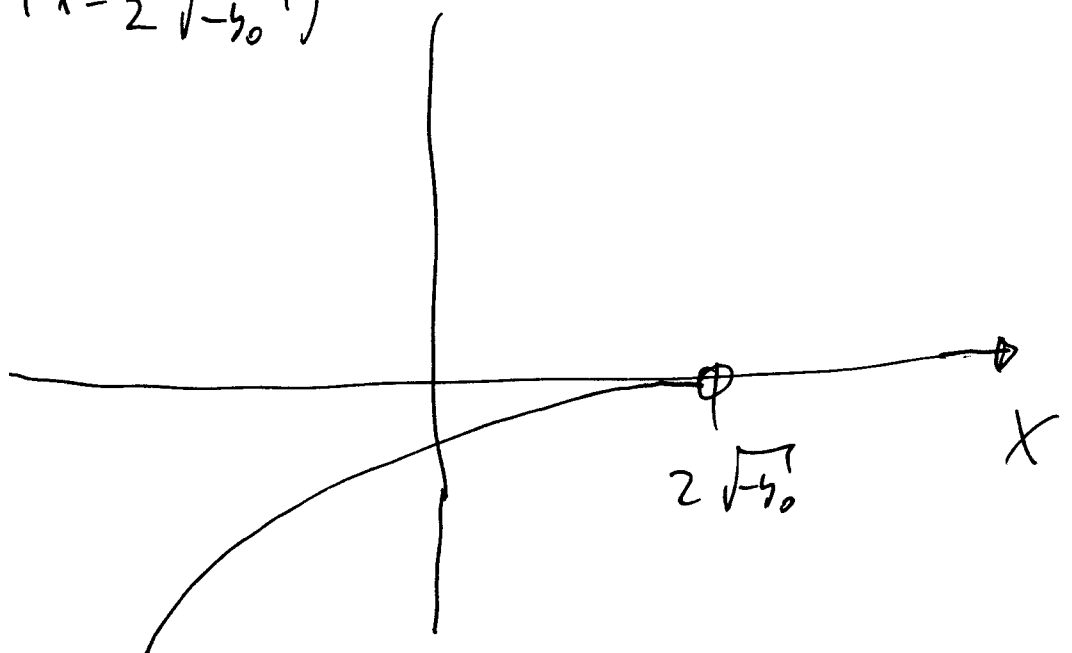
$$y(x) = \frac{1}{4} (x + 2\sqrt{y_0})^2$$



$$y_0 < 0$$

$$x_0 = 0$$

$$y(x) = -\frac{1}{4} (x - 2\sqrt{-y_0})^2$$



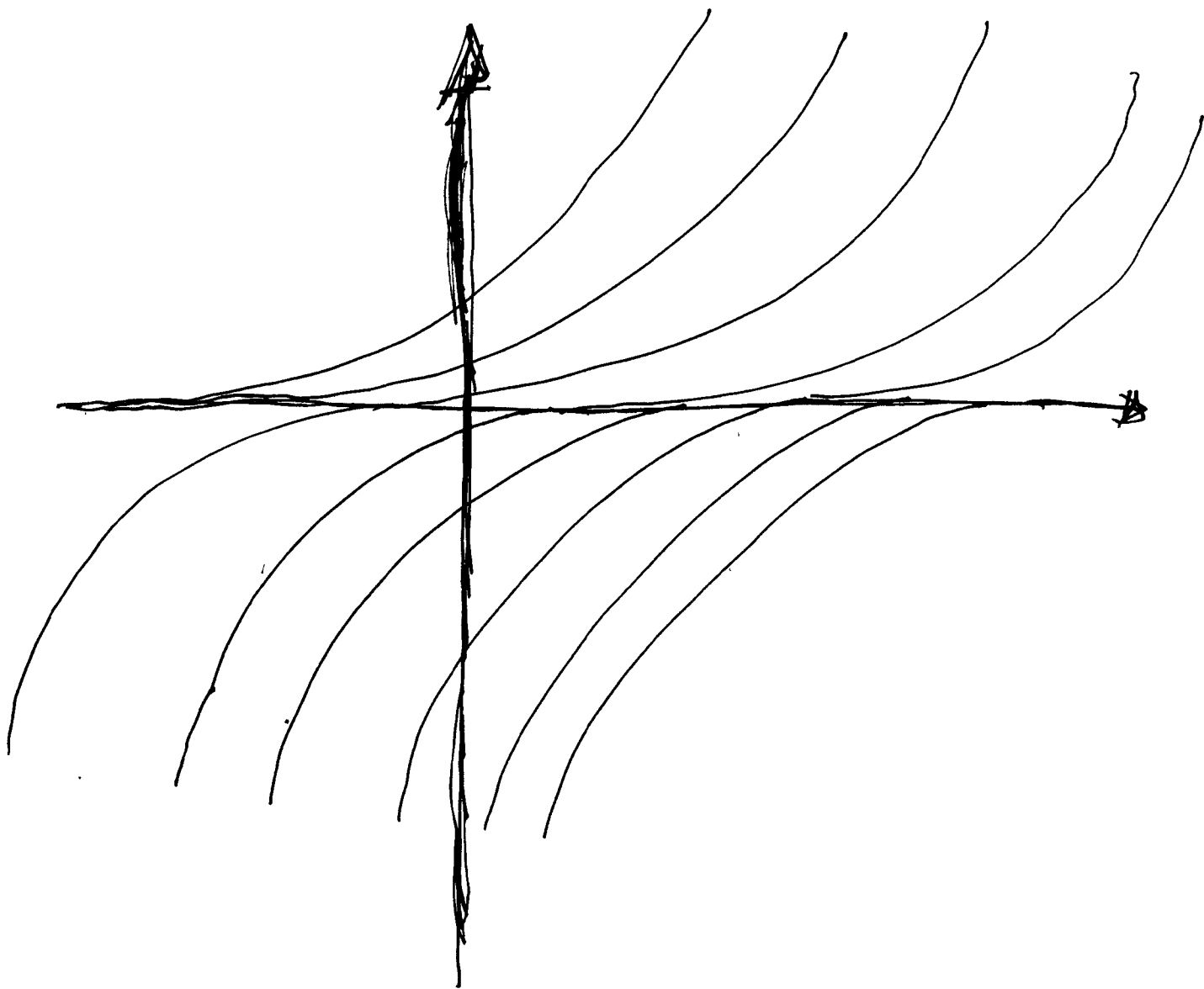
Diese drei Lösungen können kombiniert werden (Nachrechnen! oder allgemeines Resultat). Die allgemeine Lösung lautet dann also

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1/4(x - D)^2 & : x \geq D \\ 0 & : C \leq x \leq D \\ -1/4(x - C)^2 & : x \leq C. \end{cases}$$

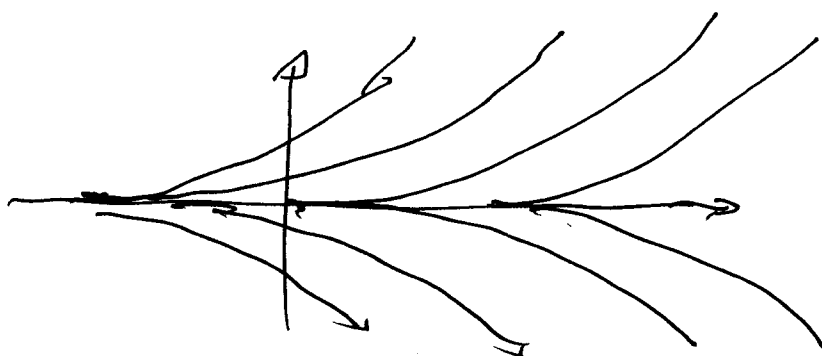
Zeichnung.

Zusammenfassung: In diesem Fall kann also jede Lösung auf \mathbb{R} fortgesetzt werden; aber Lösungen sind gar nicht eindeutig und zwar weder nach rechts noch nach links.

Lösungsskizze ($y' = |y|^{\frac{1}{2}}$)



Lösungsskizze ($y' = \operatorname{sgn}(y) |y|^{\frac{1}{2}}$) (Übung)



Beispiel. $y' = \operatorname{sgn}y|y|^{1/2} = f(y)$. (vgl. Übung.)

$y_0 > 0$. Das wurde oben schon behandelt.

$y_0 < 0$. Das ist bis auf Vorzeichen wie oben. Die Lösung ergibt sich durch 'Spiegelung' in x .

Loesung begann im Gleichgewicht vor endlicher Zeit, kommt aber davon nicht mehr weg. Zeichnung.

In den Beispielen haben wir gesehen, dass die Lösung manchmal den Gleichgewichtspunkt in endlicher Zeit erreicht. Hier diskutieren wir Kriterium. Wir wenden uns also der Frage zu, ob x_+, x_- endlich sind (falls $f(y_{\pm}) = 0$ gilt).

FOLGERUNG (Erreichen des Gleichgewichts in endlicher Zeit). *Sei die Situation wie im Satz und $f(y_+) = 0$ bzw. $f(y_-) = 0$. Dann gilt*

$$x_+ \in \mathbb{R} \text{ bzw. } x_- \in \mathbb{R} \iff \frac{1}{f} \text{ ist bei } y_+ \text{ bzw. } y_- \text{ uneigentlich Riemann intbar.}$$

Beweis. Es gilt nach dem Satz

$$x_{\pm} = \lim_{y \rightarrow y_{\pm}} F(y) = \lim_{y \rightarrow y_{\pm}} \int_{y_0}^y \frac{1}{f(s)} ds.$$

Das liefert sofort die Aussage. \square

FOLGERUNG. *Situation wie in der Folgerung. Dann kann ein Gleichgewichtspunkt y_G mit $|f(y) - f(y_G)| \leq C|y - y_G|$ fuer y nahe y_G nicht in endlicher Zeit erreicht werden. Insbesondere koennen Gleichgewichtspunkte, in denen f stetig differenzierbar ist nicht in endlicher Zeit erreicht werden.*

Beweis. Ohne Einschraenkung $y_G = 0$ und $y_0 < 0$ und $f > 0$ zwischen y_0 und y_G . Wegen $f(y_G) = 0$ gilt

$$\int_{y_0}^{y_G} \frac{1}{f(s)} ds \geq \int_{y_0}^{y_G} \frac{1}{C|s|} ds = \infty.$$

\square

Bemerkung. Das Erreichen des Gleichgewicht in endlicher Zeit haengt auch mit der Eindeutigkeit der Gleichung zusammen: Nach dem Satz sind die Anfangswertproblem eindeutig loesbar, wenn das Gleichgewicht nicht in endlicher Zeit erreicht wird. Wird umgekehrt das Gleichgewicht in endlicher Zeit erreicht, so sind nicht alle Anfangswertproblem eindeutig loesbar (Skizze). Das bedeutet auch, dass die Bedingung

$$|f(y) - f(y_G)| \leq C|y - y_G|$$

die Eindeutigkeit der Loesung garantiert!

3. Wenn die rechte Seite ein Produkt ist - Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

In diesem Abschnitt spezialisieren wir die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ zu

$$y' = f(y)g(x)$$

gegebenenfalls zusammen mit einem Anfangswert $y(x_0) = y_0$.

DEFINITION. Eine Differentialgleichung der Form $y' = f(y)g(x)$ mit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, wobei I, J offene Intervalle sind, heisst Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Bemerkung.

- Gleichgewichtspunkte sind gerade die p mit $f(p) = 0$.
- Die Faelle $f \equiv 1$ bzw. $g \equiv 1$ wurden in den letzten beiden Abschnitten behandelt.

Wieder koennen wir *formal* (d.h. unter der Annahme der Existenz einer Loesung und gewisser Invertierbarkeiten) die Differentialgleichung loesen wie folgt:

Sei φ Loesung mit $\varphi(x_0) = y_0$ und $f(y_0) \neq 0$. Dann gilt fuer x nahe x_0

$$\int_{x_0}^x \frac{\varphi'(s)}{f(\varphi(s))} ds = \int_{x_0}^x g(s) ds.$$

Also

$$F(y) = G(x) + C$$

mit Stammfunktionen F von $1/f$ und G von g und C mit $F(y_0) = G(x_0) + C$. Falls F invertierbar ist, liefert dies

$$y = F^{-1}(G(x) + C).$$

Wieder werden wir Invertierbarkeit von F zeigen und dann das einfach rueckwaerts lesen um eine Loesung zu bekommen. Das ist im wesentlichen der Inhalt des kommenden Satzes. Um den Satz kuerzer formulieren zu koennen, fixieren wir die Situation wie folgt.

Wir betrachten folgende Situation (S):

- (S) Seien I_f und I_g offene Intervalle in \mathbb{R} und $f : I_f \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : I_g \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $x_0 \in I_g$ und $y_0 \in I_f$ mit $f(y_0) \neq 0$ gegeben.
- Sei F eine Stammfunktion von $1/f$ auf dem groessten offenen Teilintervall (y_-, y_+) um y_0 in I_f auf dem f nicht verschwindet.
 - Sei G eine Stammfunktion von g

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt, ist dann F streng monoton, stetig differenzierbar mit $F' = 1/f$ und es existieren also

$$s_- := \lim_{y \rightarrow y_-} F(y), \quad s_+ := \lim_{y \rightarrow y_+} F(y)$$

und

$$F : (y_-, y_+) \rightarrow (s_-, s_+)$$

ist bijektiv und stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Inversen.

THEOREM. Es gelte (S). Dann gilt fuer das Anfangswertproblem

$$(*) \quad y' = f(y)g(x), \quad y(x_0) = y_0$$

folgendes:

- (a) Ist (I, φ) eine Loesung von $(*)$, so gilt $F(\varphi(x)) = G(x) + C$ mit $C = F(y_0) - G(x_0)$ fuer x nahe x_0 . Ist umgekehrt I offen und $\varphi : I \rightarrow (y_-, y_+)$ stetig differenzierbar mit $F(\varphi(x)) = G(x) + F(y_0) - G(x_0)$ und $\varphi(x_0) = y_0$, so ist (I, φ) eine Loesung von $(*)$.

(b) Es gibt ein offenes Intervall I in \mathbb{R} mit $x_0 \in \mathbb{R}$, auf dem es genau eine Lösung von (*) gibt.

(c) Sind (I, φ_1) (I_2, φ_2) Lösungen von (*) mit $f \circ \varphi_1 \neq 0$, so stimmen φ_1 und φ_2 auf $I_1 \cap I_2$ ueberein.

Beweis. (a) Sei (I_1, φ) eine Lösung von (*) mit $\varphi(x_0) = y_0$. Dann gilt $f(\varphi(x)) \neq 0$ fuer x nahe x_0 , d.h. $\varphi(x) \in (y_-, y_+)$ fuer x nahe x_0 . Damit folgt (vgl. Rechnung oben)

$$F(\varphi(x)) = G(x) + C \text{ mit } C = F(y_0) - G(x_0).$$

Da F bijektiv ist, folgt also

$$\varphi(x) = F^{-1}(G(x) + C).$$

Das liefert dann auch die lokale Eindeutigkeit (da rechte Seite eindeutig ist). Sei umgekehrt φ mit $\varphi(x_0) = y_0$ und $F(\varphi(x)) = G(x) + C$ gegeben. Dann liefert Ableiten

$$F'(\varphi(x))\varphi'(x) = G'(x).$$

Also

$$\frac{1}{f(\varphi(x))}\varphi'(x) = g(x).$$

Also

$$\varphi'(x) = g(x)f(\varphi(x)).$$

(b): Sei $C := F(y_0) - G(x_0)$. Dann gilt

$$G(x_0) + C = F(y_0) \in (s_-, s_+).$$

Da G stetig ist, gibt es dann ein offenes Intervall I mit

$$x_0 \in I \text{ und } C + G(I) \subset (s_-, s_+).$$

Dann ist

$$\varphi : I \longrightarrow (y_-, y_+), x \mapsto F^{-1}(G(x) + C)$$

stetig differenzierbar mit $F(\varphi) = G(x) + C$ und $\varphi(x_0) = F^{-1}(G(x_0) + C) = F^{-1}(F(y_0)) = y_0$. Damit folgt aus dem schon in (a) gezeigten, dass φ eine Lösung ist.

Die Lösung ist lokal eindeutig, da nach F bijektiv ist und nach dem in (a) gezeigten fuer jede Lösung jedenfalls gilt

$$F(\varphi(x)) = G(x) + C \text{ mit } C = F(y_0) - G(x_0).$$

(c): Lokale Eindeutigkeit gilt, solange f nicht verschwindet. Da $f \circ \varphi_1$ auf I_1 nicht verschwindet kann man mit lokaler Eindeutigkeit (nach dem schon bekannten Schluss) die Eindeutigkeit auf $I_1 \cap I_2$ erhalten. \square

Der Satz liefert konkrete Schritte, um alle lokalen Loesungen einer Differentialgleichung mit getrennten Variablen zu bestimmen:

- Bestimme Stammfunktionen F von $1/f$ und G von g .
- Loese $F(y) = G(x) + C$ nach y auf. (Das liefert alle lokalen Loesungen zu Anfangswertproblem mit $g(y_0) \neq 0$ nach Teil (1) des Satzes.)
- Bestimme C so, dass $y = y_C(x_0) = y_0$ gilt. Das ist moeglich mit $C = G(y_0) - F(x_0)$.

Bemerkungen. (a) Tatsächlich kann man sich den dritten Schritt sparen, wenn man im ersten Schritt die Stammfunktion $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ und $G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)}ds$ wählt. Dann gilt $G(y_0) = F(x_0) = 0 = C$.

(b) Auch könnte man die Reihenfolge des zweiten und dritten Schrittes vertauschen.

Dieses Verfahren funktioniert fuer alle Anfangswerte y_0 mit $f(y_0) \neq 0$. Der Fall von y_0 mit $f(y_0) = 0$ muss getrennt behandelt werden. In diesem Fall existiert jedenfalls die konstante Loesung $y \equiv y_0$.

← Ende der Vorlesung →

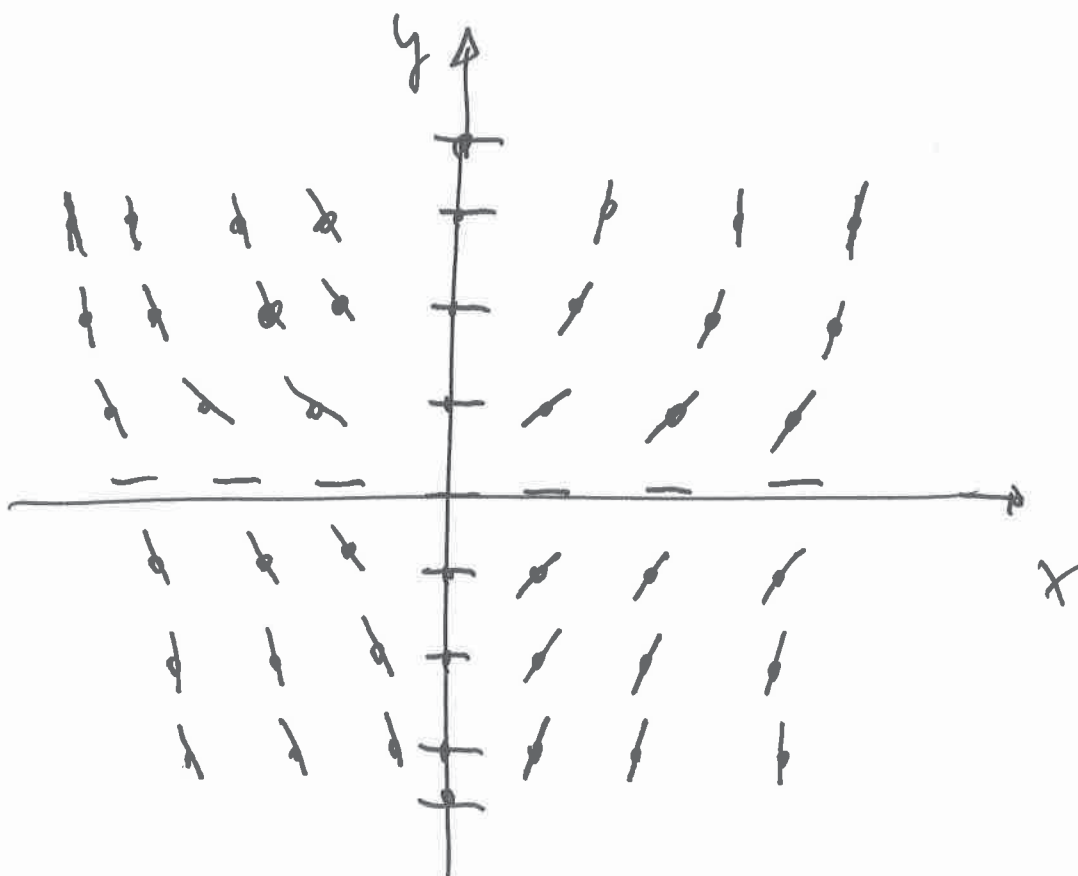
Beispiel. $y' = xy^2$, $y(x_0) = y_0$. Dann gilt also $y' = f(y)g(x)$ mit $f(y) = y^2$ und $g(x) = x$. (Natuerlich waeren auch andere Wahlen von f und g moeglich.)

Wir zeichnen zunaechst das Richtungsfeld. Das liefert uns einen ersten Eindruck von den Loesungen. Tatsaechlich sind die Loesungen ja gerade diejenigen Kurven, deren Tangenten in jedem Punkt gerade durch das Richtungsfeld beschrieben werden. Speziell tragen wir zu 'jedem' Punkt (x, y) eine normierte Version von $(1, g(y)f(x))$ an.

Richtungsfeld.

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = x y^2$$



Zur Loesung folgen wir den drei oben angegebenen Schritten.

Erster Schritt. Falls $y_0 \neq 0$. $G(x) = \frac{1}{2}x^2$ auf \mathbb{R} und $F(y) = -\frac{1}{y}$ auf $(0, \infty)$ bzw. $(-\infty, 0)$.

Zweiter Schritt. Loese $-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$. Das liefert

$$y = \frac{-1}{C + 1/2x^2}.$$

Dritter Schritt. Auflösen von $y(x_0) = y_0$ liefert

$$y(x) = \frac{-1}{-1/2x_0^2 - 1/y_0 + 1/2x^2}.$$

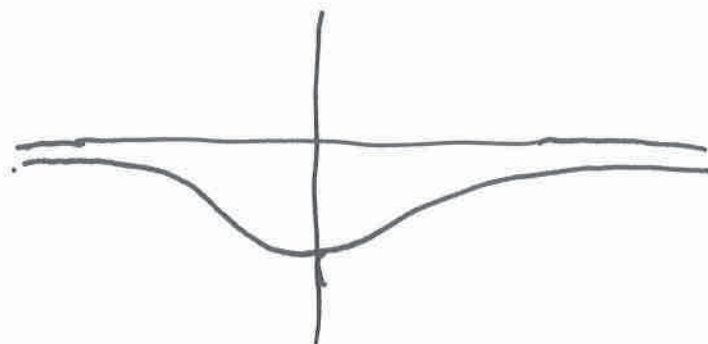
Hier gilt $C = -1/2x_0^2 - 1/y_0$.

Um uns ein Bild von der Loesungsschar d.h. der Menge aller Loesungen zu machen, geben wir einige Zeichnungen. Dabei ist das Ziel, fuer jeden Anfangswert die entsprechende Loesung zu skizzieren. Es erweist sich als zweckmaessig in zwei Schritten vorzugehen. Dazu beschreiben wir zunaechst die Loesungen in Abhaengigkeit von C und machen uns dann klar in welchen Bereichen der Ebene welches Vorzeichen von C gilt. Zusammenfassen dieser beiden Informationen erlaubt es dann recht zuegig, die Loesungsschar zu zeichnen.

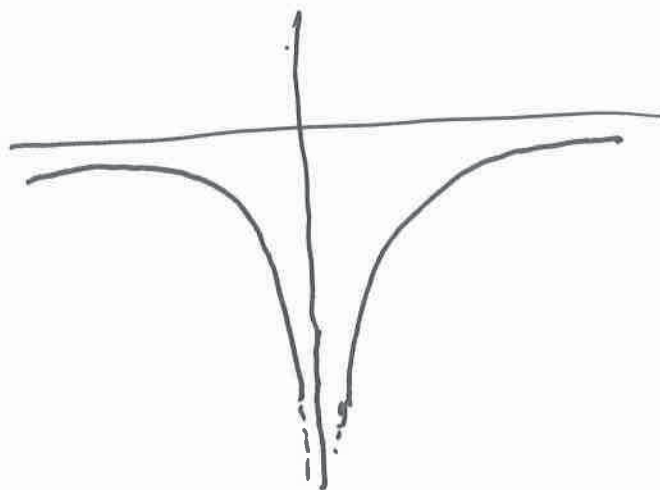
Zunaechst zeichnen wir fuer festes C die Loesung. Dabei unterscheiden wir drei Faelle $C > 0$, $C < 0$, $C = 0$:

$$y = \frac{-1}{c + \frac{1}{2}x^2}$$

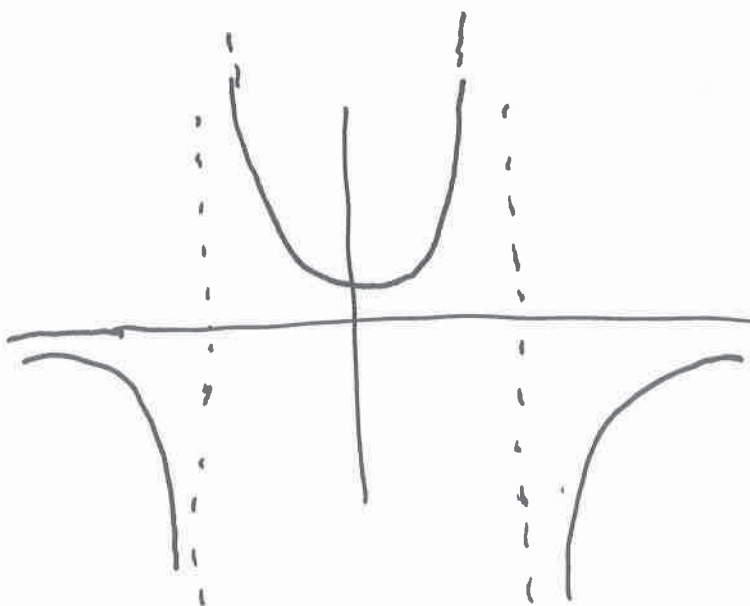
$c > 0$:



$c = 0$:



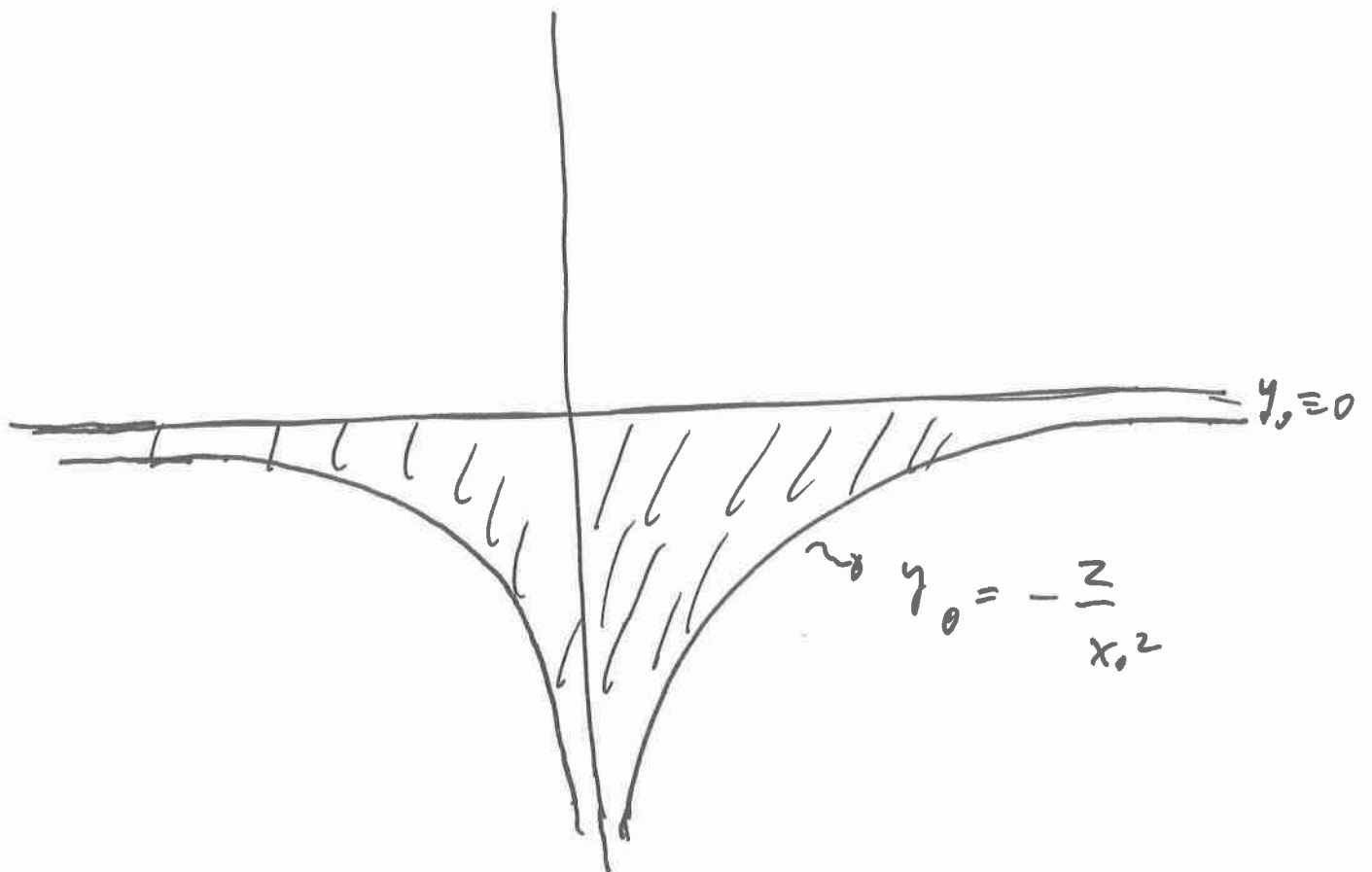
$c < 0$:



Nun zerlegen wir \mathbb{R}^2 in die Teile der Anfangswerte (x_0, y_0) mit $C > 0$, $C < 0$ und $C = 0$. Diese Teile werden durch die Kurven $y_0 = 0$ und $y_0 = \frac{-2}{x_0^2}$ begrenzt.

$$C = -\frac{1}{y_0} - \frac{1}{2} x_0^2 \quad (y_0 \neq 0)$$

$$0 = -\frac{1}{y_0} - \frac{1}{2} x_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = -\frac{2}{x_0^2}$$



$\boxed{C > 0}$: Lösung ex. auf ganz \mathbb{R}

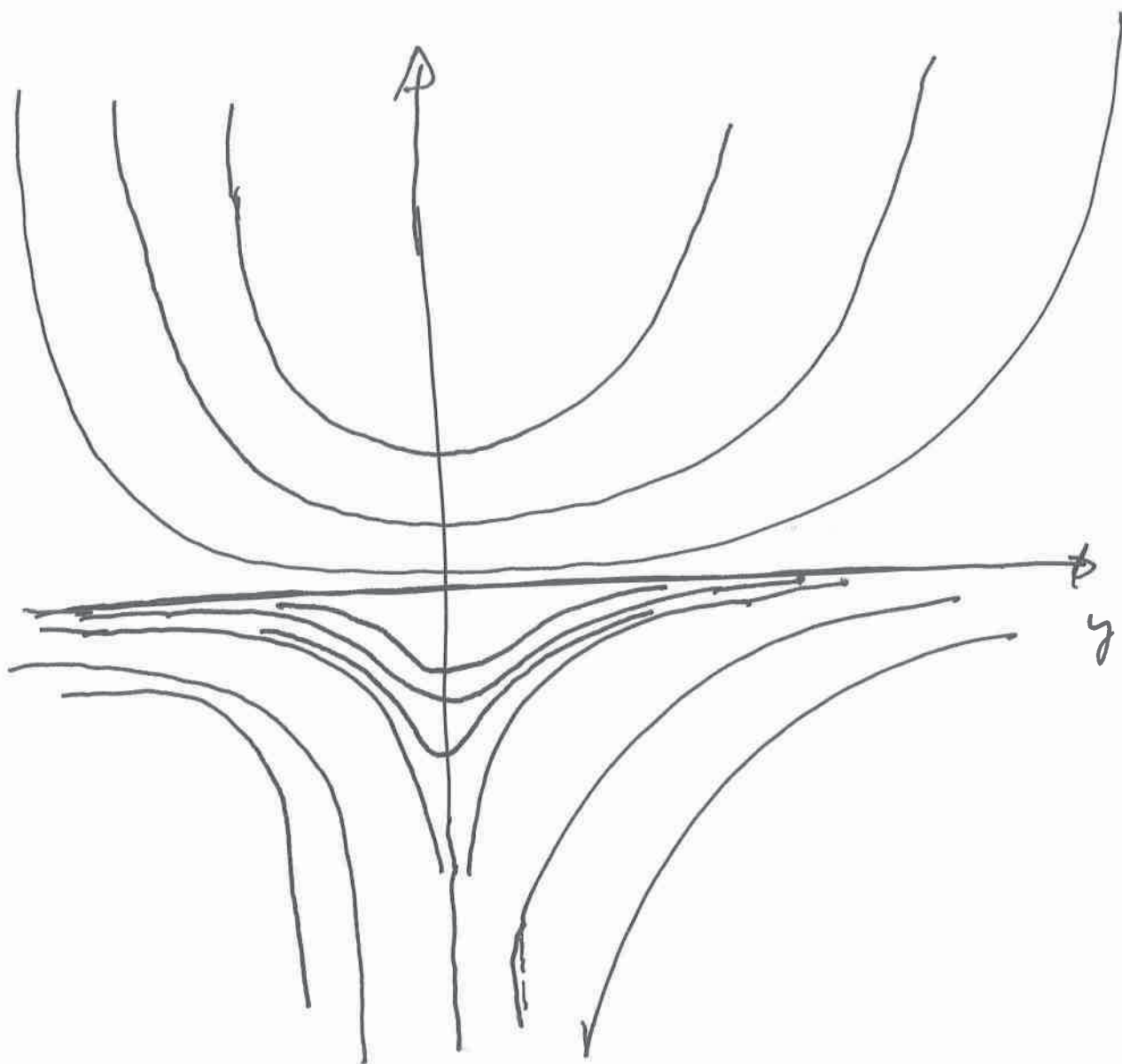
$\boxed{C < 0}$: Lösung ex. auf geeigneten Teilintervallen.

$\boxed{C = 0}$: Teilintervallen.

Nun koennen wir zu 'jedem' Anfangswert die entsprechende Loesungskurve zeichnen und erhalten die Loesungsschar.

Locunqs shw

$$y' = x y^2$$



4. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung in einer Dimension

In diesem Abschnitt spezialisieren wir die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ zu

$$y' + g(x)y = h(x)$$

bzw.

$$y' = -g(x)y + h(x).$$

Eine solche Gleichung heisst *lineare Differentialgleichung erster Ordnung* (in einer Dimension). Gilt $h \equiv 0$, so heisst die Gleichung *homogen*, andernfalls heisst sie *inhomogen*.

Wir loesen zunaechst die homogene Gleichung.

LEMMA (Loesung der homogenen linearen Differentialgleichung). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$y' + g(x)y = 0, y(x_0) = y_0,$$

auf ganz I die eindeutige Loesung

$$\varphi(x) = y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^x g(s)ds\right).$$

Beweis. Existenz. Wir geben zwei Varianten.

Variante 1: Direktes Nachrechnen.

Variante 2: Loesen der Differentialgleichung $y' = -g(x)y$ mit getrennten Variablen:

Erster Schritt: Es sind

$$G(x) = -\int_{x_0}^x g(s)ds$$

$$F(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{s} ds = \ln \frac{y}{y_0} \text{ auf } (0, \infty) \text{ bzw. } (-\infty, 0).$$

die gesuchten Stammfunktionen.

Zweiter Schritt: Aufloesen von $F(y) = G(x)$ d.h.

$$\ln \frac{y}{y_0} = -\int_{x_0}^x g(s)ds$$

nach y liefert

$$y(x) = F^{-1}(G(x)) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x g(s)ds}.$$

Der dritte Schritt 'Bestimmen von C aus den Anfangsbedingungen' ist nicht noetig, da $C = 0$ aufgrund der speziellen Wahl der Stammfunktionen gilt. Da fuer diese Loesung fuer $y_0 \neq 0$ auch $f(y)$ nirgends verschwindet, ist sie eindeutig.

Der Fall $y_0 = 0$ wird getrennt behandelt. Es ist dann

$$y \equiv 0 = y_0 e^{-\int_{x_0}^x g(s)ds}$$

eine Loesung.

Eindeutigkeit. Die Eindeutigkeit im Falle $f(y_0) = y_0 \neq 0$ folgt aus dem Satz ueber Differentialgleichungen mit getrennten Variablen, da die angegebene Loesung φ fuer alle $x \in I$ auch $f(\varphi(x)) \neq 0$ erfuehlt. Die Eindeutigkeit im Falle $y_0 = 0$ folgt nach dem schon bekannten Schluss, da die anderen Loesungen nicht in die Nullloesung einmuenden. \square

Bemerkung. Der Fall $g \equiv a$ liefert $y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$ (wie schon oben behandelt).

Wir kommen nun zur inhomogenen Gleichung.

THEOREM. *Sei I ein offenes Intervall. Seien $g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$y' + g(x)y = h(x), y(x_0) = y_0$$

die auf ganz I definierte eindeutige Loesung

$$\varphi = \varphi_{hom} + \varphi_{spez}$$

mit

$$\varphi_{hom} = y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^x g(s)ds\right)$$

einer Loesung der homogenen Gleichung mit Anfangswert $y(x_0) = y_0$ und

$$\varphi_{spez} = \left(\int_{x_0}^x h(s) \exp\left(\int_{x_0}^s g(t)dt\right)ds\right) \exp\left(-\int_{x_0}^x g(s)ds\right)$$

einer speziellen der Loesung der inhomogenen Gleichung mit Anfangswert $y(x_0) = 0$.

Bemerkung. Die Loesung φ_s sieht wie eine Loesung der homogenen Gleichung mit von x abhaengigem y_0 aus. Das ist kein Zufall (s.u.).

Beweis. Das angegebene φ ist Loesung. Offenbar ist φ_{hom} eine Loesung der homogenen Gleichung zum Anfangswertproblem $y(x_0) = y_0$. Nachrechnen zeigt, dass φ_{spez} eine Loesung der inhomogenen Gleichung zum Anfangswert $y(x_0) = 0$ ist:

Bezeichne die beiden Terme mit a und b , also $\varphi_{spez} = ab$. Dann gilt

$$\varphi'_{spez} = a'b + ab' = (-ga)b + aha^{-1} = -gab + h = -g\varphi_{spez} + h.$$

Damit gilt fuer $\varphi = \varphi_{spez} + \varphi_{hom}$ also

$$\varphi' = \varphi'_{hom} + \varphi'_{spez} = -g(x)\varphi_{hom} + (-g(x))\varphi_s + h = -g(x)\varphi + h$$

sowie

$$\varphi(x_0) = y_0 + 0 = y_0.$$

Damit loest φ das Anfangswertproblem.

Eindeutigkeit. Sei ψ eine weitere Loesung des Anfangswertproblem. Sei $w := \varphi - \psi$. Dann gilt

$$w' + gw = \varphi' - \psi' + g(\varphi - \psi) = h - h = 0$$

$$w(x_0) = \varphi(x_0) - \psi(x_0) = y_0 - y_0 = 0.$$

Damit loest w das homogene Problem zum Anfangswert 0. Da die Loesung des homogenen Problems eindeutig ist (s.o.) und $y \equiv 0$ eine solche Loesung ist, folgt $w \equiv 0$. \square

Bemerkung - Finden der obigen Formel mittels Variation der Konstanten.]
Die angegebene Lösung kann auch mittels des Verfahrens der *Variation der Konstanten* bestimmt werden: Sei y eine Lösung des homogenen Problems

$$y' + gy = 0, \quad y(x_0) = 1.$$

Dann verschwindet y nirgends (nach dem ersten Teil des Lemma). Damit kann man fuer die Lösung φ das inhomogene Problem auf jeden Fall den Ansatz machen

$$\varphi := C(x)y.$$

Wenn es ueberhaupt eine Lösung des inhomogenen Problems gibt, muss sie so dargestellt werden koennen mit einer noch zu bestimmenden Funktion C . Wir erhalten fuer die Ableitung von φ zwei Gleichungen:

- Produktregel und Nutzen der Gleichung fuer y : $\varphi' = C'y + Cy' = C'y + C(-gy) = C'y - g\varphi$.
- Lösung inhomogene DGL: $\varphi' = -g\varphi + h$.

Vergleichungen liefert

$$C'y = h.$$

Damit folgt

$$C' = \frac{h}{y}.$$

Integration ergibt

$$C(x) = C(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{h(s)}{y(s)} ds.$$

Betrachten der Anfangsbedingung

$$y_0 = \varphi(x_0) = C(x_0)y(x_0) = C(x_0)$$

gibt $C(x_0) = y_0$. Damit erhaelt man insgesamt die angegebene Formel. Dieser Zugang 'begruendet' die Darstellung als Produkt.

Bemerkung.

- Der Eindeutigkeitsbeweis zeigt, dass Differenz von Loesungen der inhomogenen Gleichung die homogene Gleichung loest.
- Zum Anfangswert $y(x_0) = 0$ kann es eine nichtverschwindende Loesung der inhomogenen Gleichung geben (aber nicht der homogenen Gleichung!).
- Der Satz gilt auch, wenn das Intervall I halboffen oder abgeschlossen ist.
- Die Aussagen gelten auch fuer komplexwertige g und h (Nachrechnen).

← Ende der Vorlesung. →

5. Loesen von Differentialgleichungen mittels Substitution und weitere Beispiele.

Unter Umstaenden laesst sich eine Differentialgleichung durch eine Substitution in eine besser untersuchbare Differentialgleichung ueberfuehren. Wir behandeln den eindimensionalen Fall. Fuer den hoeherdimensionalen Fall kann man entsprechendes durchfuehren.

Zur Einstimmung behandeln wir zunachst ein **Beispiel**. Sei $y' = (y - x)^2$ gegeben. Dann erfuehlt die neue Funktion $z = y - x$ also die Differentialgleichung

$$z' = y' - 1 = z^2 - 1 = f(z).$$

Das ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Wir koennen sie loesen und erhalten dann $y = z + x$ als Loesung der gewuenschten Differentialgleichung.

Abstrakt laesst sich das ganze so behandeln:

Sei

$$(x, y) \mapsto (\sigma(x), \zeta(x, y))$$

stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Inversen

$$(s, z) \mapsto (\xi(s), \eta(s, z))$$

also insbesondere

$$(x, y) = (\xi \circ \sigma(x), \eta(\sigma(x), \zeta(x, y))).$$

Dann gilt:

- (1) Loest $\Phi(x)$ die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y),$$

so loest

$$\Psi(s) := \zeta(\xi(s), \Phi(\xi(s)))$$

die Differentialgleichung

$$z' = \xi' \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}(\xi, \eta) + \frac{\partial \zeta}{\partial y}(\xi, \eta) f(\xi, \eta) \right),$$

wobei $\xi = \xi(s)$ und $\eta = \eta(s, z)$.

(Bemerkung. $\xi', \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}$ sind bekannte gegebene Funktionen).

- (2) Loest Ψ die Differentialgleichung

$$z' = \xi' \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}(\xi, \eta) + \frac{\partial \zeta}{\partial y}(\xi, \eta) f(\xi, \eta) \right),$$

so loest

$$\Phi(x) := \eta(\sigma(x), \Psi(\sigma(x)))$$

die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y).$$

Beweis. Das folgt direkt durch Nachrechnen:

- (1) Nach Definition von Ψ gilt mit $x = \xi(s)$ und $y = \Phi$

$$\Phi(\xi(s)) = y(x) = \eta(\sigma(x), \zeta(x, y)) = \eta(s, \zeta(\xi(s), \Phi(\xi(s)))) = \eta(s, \Psi(s)).$$

Ableiten von Ψ und Nutzen der Differentialgleichung fuer Φ' liefert dann

$$\begin{aligned}\Psi'(s) &= \frac{\partial \zeta}{\partial x}(\xi, \eta)\xi'(s) + \frac{\partial \zeta}{\partial y}(\xi, \eta)\Phi'(\xi(s))\xi'(s) \\ &= \xi'(s) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}(\xi, \eta) + \frac{\partial \zeta}{\partial y}(\xi, \eta)f(\xi, \Phi(\xi)) \right) \\ (\Phi(\xi(s)) = \eta(s, \Psi(s))) &= \xi' \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}(\xi, \eta) + \frac{\partial \zeta}{\partial y}(\xi, \eta)f(\xi, \eta) \right).\end{aligned}$$

(2) Es gilt mit $s = \sigma(x)$, $\xi(s) = x$ nach (1)

$$\Phi(x) = \eta(\sigma(x), \Psi(\sigma(x))).$$

Weiterhin gilt wegen $x = \xi(\sigma(x))$ nach Differentiation

$$1 = \xi'(\sigma(x))\sigma'(x) \quad (*)$$

sowie fuer $y = \eta(\sigma(x), \zeta(x, y))$ nach Differentiation

$$1 = \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial \eta}{\partial s} \sigma' + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (**)$$

Damit kann man mit $\omega = (\sigma(x), \Psi(\sigma(x)))$ rechnen

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \frac{\partial \eta}{\partial s}(\omega)\sigma'(x) + \frac{\partial \eta}{\partial z}(\omega)\Psi'(\sigma(x))\sigma'(x) \\ (\text{Differentialgleichung } \Psi) &= \frac{\partial \eta}{\partial s}(\omega)\sigma' + \frac{\partial \eta}{\partial z}(\omega)\xi' \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}(\xi, \eta) + \frac{\partial \zeta}{\partial y}(\xi, \eta)f(\xi, \eta) \right) \sigma' \\ (*) &= \frac{\partial \eta}{\partial s}(\omega)\sigma' + \frac{\partial \eta}{\partial z}(\omega) \frac{\partial \zeta}{\partial x}(\xi, \eta) + \frac{\partial \eta}{\partial z}(\omega) \frac{\partial \zeta}{\partial y}(\xi, \eta)f(\xi, \eta) \\ (**) &= 0 + 1 \cdot f(\xi, \eta) = f(x, y)\end{aligned}$$

□

Wir betrachten nun einige Anwendungen.

Anwendung. $y' = f(ax + by + c)$ mit gegebenen reellen a, b, c .

Ohne Einschraenkung $b \neq 0$ (sonst ist sowieso alles klar...). Betrachte die Transformation

$$(x, y) \mapsto (x, ax + by + c)$$

mit der Inversen

$$(x, z) \mapsto \left(x, \frac{z - c - ax}{b}\right).$$

Dann loest y die Gleichung $y' = f(ax + by + c)$ genau dann wenn $z = ax + by + c$ die Gleichung

$$z' = a + by' = a + bf(ax + by + c) = a + bf(z)$$

loest. Letzteres ist eine autonome Differentialgleichung. Sie kann wie oben diskutiert geloest werden. Die Loesung der Ursprungsgleichung ergibt sich als

$$y = \frac{1}{b}(z - ax - c).$$

Anwendung - Homogene Differentialgleichung $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Bemerkung. Diese Gleichung heisst homogene Differentialgleichung. Verwechselungen mit der (linearen) homogenen Differentialgleichung $y' + gy = 0$ sind zu vermeiden!

Betrachte die Transformation

$$(x, y) \mapsto \left(x, \frac{y}{x}\right)$$

mit Inverser

$$(x, z) \mapsto (x, xz).$$

Dann loest y die Differentialgleichung $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ genau dann, wenn $z = \frac{y}{x}$ die Differentialgleichung

$$z' = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{1}{x} \left(y' - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x} (f(z) - z)$$

loest. Das ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Sie kann wie oben diskutiert geloest werden. Die Loesung der Ursprungsgleichung wird durch

$$y = xz$$

gegeben.

Bei diesen Untersuchungen wird für die Werte von x jeweils ein Intervall zugrundegelegt, das 0 nicht enthaelt.

Anwendung $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$.

Bemerkung. Diese Differentialgleichung verallgemeinert die ersten beiden Anwendungen. Tatsaechlich werden wir zur Loesung zwei Faelle unterscheiden, die jeweils auf eine der beiden schon behandelten Anwendungen führen.

Fall 1. Es gilt $\det(ab; \alpha\beta) = 0$. Dann ist o.E. $(a, b) = \lambda(\alpha, \beta)$ mit $\lambda \neq 0$. Damit handelt es sich also um

$$y' = f\left(\frac{\lambda(\alpha x + \beta y) + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right) = g(\alpha x + \beta y)$$

mit $g(s) = f\left(\frac{\lambda s + c}{s + \gamma}\right)$. Dieser Fall wurde schon behandelt.

Fall 2. Es gilt $\det(ab; \alpha\beta) \neq 0$. Dann hat also das Gleichungssystem

$$0 = ax + by + c$$

$$0 = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

eine eindeutig bestimmte Loesung (ξ, η) . Sei nun die Transformation

$$(x, y) \mapsto (x - \xi, y - \eta) =: (\bar{x}, \bar{y})$$

mit der Inversen

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta)$$

gegeben. Dann wird $(x, y(x))$ abgebildet auf $(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}))$ mit

$$\bar{y}(\bar{x}) = y(x) - \eta = y(\bar{x} + \xi) - \eta.$$

Für $\bar{y}(\bar{x})$ gilt demnach

$$\begin{aligned}
 \bar{y}'(\bar{x}) &= y'(\bar{x} + \xi) \\
 &= f\left(\frac{a(\bar{x} + \xi) + by(\bar{x} + \xi) + c}{\alpha(\bar{x} + \xi) + \beta y(\bar{x} + \xi) + \gamma}\right) \\
 &= f\left(\frac{a(\bar{x} + \xi) + b(\bar{y}(\bar{x}) + \eta) + c}{\alpha(\bar{x} + \xi) + \beta(\bar{y}(\bar{x}) + \eta) + \gamma}\right) \\
 (\text{Konstr. } \xi, \eta) : &= f\left(\frac{a\bar{x} + b\bar{y}(\bar{x})}{\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}(\bar{x})}\right) \\
 &= f\left(\frac{a + b\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}{\alpha + \beta\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}\right) \\
 &= g\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)
 \end{aligned}$$

mit $g(s) = f\left(\frac{a+bs}{\alpha+\beta s}\right)$. Das ist gerade eine homogene Differentialgleichung. Die Lösung der Ursprungsgleichung ist dann gegeben durch

$$y(x) = \bar{y}(x - \xi) + \eta.$$

←→
Ende der Vorlesung

Differentialgleichungen in zwei Dimensionen: Erste Integrale, Hamiltonfunktionen und exakte Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und untersuchen das autonome System

$$(x, y)' = (f(x, y), g(x, y)) =: V(x, y) \quad (*)$$

in der $x - y$ -Ebene. Wir bezeichnen die unabhängige Variable, nach der abgeleitet wird, mit t ! (Auf diese Weise werden die Koordinaten in der Ebene wie üblich mit x und y bezeichnet.) Das Ziel ist natürlich die Untersuchung von Lösungen.

Unter Umständen begnügt man sich aber mit Kenntnis des *Graphen* der Lösung (d.h. des Bildes der Lösungskurve) *Zeichnung*. Dann verzichtet man also auf Information über 'Geschwindigkeiten' und hat dafür aber das Problem vereinfacht. Dazu gibt es zwei (verwandte) Ansätze:

- erste Integrale,
- zugehörige eindimensionale Differentialgleichung.

Das untersuchen wir in diesem Abschnitt.

1. Erste Integrale und Hamiltonfunktionen

DEFINITION. (*Erstes Integral*) $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine stetig differenzierbare Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *erstes Integral* von $(*)$, wenn gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x} f + \frac{\partial F}{\partial y} g \equiv 0$$

(d.h. wenn das Vektorfeld ∇F senkrecht auf dem Vektorfeld $V = (f, g)$ steht).

LEMMA. (*Interpretation erstes Integral*) Ist F ein erstes Integral und (I, φ) eine Lösung von $(*)$, so gilt $F \circ \varphi \equiv \text{constant}$.

Beweis. Das folgt direkt mit Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F \circ \varphi(t) &= \frac{\partial F}{\partial x} \varphi_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \varphi_2'(t) \\ (\varphi \text{ Lsg.}) &= \frac{\partial F}{\partial x} f + \frac{\partial F}{\partial y} g \\ (1. \text{ Integral}) &= 0. \end{aligned}$$

Das zeigt die Aussage. □

Ist F ein erstes Integral, so liegen die Loesungen also auf den Konstanzflaechen von F . Die Konstanzflaechen von F haben (unter geeigneten Voraussetzungen) nach dem Satz ueber implizite Funktionen gerade die Struktur von Graphen. Das kann eine wichtige Hilfe bei der Untersuchung von Loesungen sein.

Beispiel. $x' = -y, y' = x$. Dann ist $F(x, y) = x^2 + y^2$ ein erstes Integral. Die Loesungen der Differentialgleichung verlaufen also innerhalb von Kreislinien. (Zeichnung Vektorfeld.)

Einen wichtigen Spezialfall eines ersten Integral lernen wir als naechstes kennen.

DEFINITION (Hamiltonsch). $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann heisst $(*)$ hamiltonsch, wenn es ein stetig differenzierbares $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -g, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = f.$$

In diesem Fall heisst H Hamiltonfunktion von $(*)$.

Der Nutzen von Hamiltonschen Vektorfeldern liegt in folgendem Lemma.

LEMMA. Ist H eine Hamiltonfunktion, so ist H ein erstes Integral. Die Loesungen von $(*)$ verlaufen also innerhalb der Niveauflaechen (linien) von H .

Beweis. Direkte Rechnung liefert

$$\frac{\partial H}{\partial x} f + \frac{\partial H}{\partial y} g = -gf + fg = 0.$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkungen.

- Auf jeder Zusammenhangskomponente ist eine Hamiltonfunktion eindeutig bis auf eine Konstante. (Bew. H_1, H_2 hamiltonsch. Dann gilt $\nabla(H_1 - H_2) \equiv 0$. Damit folgt nach dem MWS auf jeder Zusammenhangskomponente $H_1 - H_2 = C$.)
- In den Anwendungen der Physik ist die Hamiltonfunktion (oft) gerade die Energie des Systems (Energieerhaltung).

Offenbar ist $(*)$ Hamiltonsch, genau dann, wenn $(-g, f)$ ein Gradientenfeld ist. Damit koennen wir mit den aus Analysis II bekannten Methoden entscheiden, ob $(*)$ Hamiltonsch ist und ggf eine Hamiltonfunktion bestimmen. Das diskutieren wir als naechstes.

Wir bginnen mit zwei *Erinnerungen*:

Sternfoermig. Eine Teilmenge D des Euklidischen Raumes heisst sternfoermig (mit Zentrum $p \in D$), wenn die Verbindung

$$\{p + t(x - p) : 0 \leq t \leq 1\}$$

von p nach x fuer jedes $x \in D$ ganz in D enthalten ist.

Lemma von Poincaré. Ist D eine offene sternfoermige Menge im Euklidischen Raum \mathbb{R}^M , so besagt das Lemma von Poincaré, dass ein stetig

differenzierbares $F : D \rightarrow \mathbb{R}^M$ genau dann ein Gradientenfeld ist (d.h. $F = \nabla \Phi$ gilt mit einem stetig differenzierbaren $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$\partial_j F_i(x) = \partial_i F_j(x)$$

fuer alle $i, j = 1, \dots, M$ und $x \in D$ gilt. Damit erhalten wir als Anwendung.

PROPOSITION. *Ist $D \subset \mathbb{R}^2$ sternfoermig und offen und sind f, g stetig differenzierbar, so sind aequivalent:*

- (i) $(*)$ ist Hamiltonsch (d.h. $(-g, f)$ ein Gradientenfeld.
- (ii) Es gilt $-\partial_y g = \partial_x f$.

Hinweis. Ist $(*)$ Hamiltonsch, so ergibt sich die Hamiltonfunktion auf folgende Weise:

- Integration von $\partial_x H = -g$ und $\partial_y H = f$.
- Vergleichen und Zusammenfassen der Loesungen.
- Probe.

Beispiel - harmonischer Oszillator. (Zeichnung) Es gilt $F = ms''$ nach Newtonscher Gleichung. Weiterhin gilt im konkreten Model $F = -ks$. Insgesamt erhaelt mal also

$$ms'' = -ks.$$

Diese Gleichung hat (noch) nicht die gewuenschte Form. Wir formen sie daher in ein aequivalentes System erster Ordnung um. Mit den neuen Variablen $x = s$ und $y = ms'$ erhaelt man

$$(x, y)' = (x', y') = \left(\frac{1}{m}y, -kx\right).$$

Das ist eine Gleichung der von uns betrachteten Form $(*)$ mit $f(x, y) = \frac{1}{m}y$ und $g(x, y) = -kx$. Wir wollen die vorigen Proposition anwenden und berechnen

$$\partial_x f = 0, \partial_y g = 0.$$

Nach der vorigen Propoistion gibt es also eine Hamiltonfunktion $H = H(x, y)$. Diese erfuehlt:

$$-\frac{1}{m}y = f = \partial_y H \text{ also } H = \frac{1}{2m}y^2 + C(x),$$

$$+kx = -g = \partial_x H \text{ also } H = \frac{kx^2}{2} + D(y).$$

Insgesamt ergibt sich damit durch Vergleich (Probe!) dann die Hamiltonfunktion

$$H(x, y) = \frac{k}{2}x^2 + \frac{1}{2m}y^2.$$

(Das ist in der Tat gerade die Energie des Systems.)

2. Exakte Differentialgleichungen und Darstellung durch Graphen

Nach den Ueberlegungen zu ersten Integralen, kommen wir nun zu einer Darstellung der Loesungskurven mittels Graphen.

Zunaechst eine Vorueberlegung: Ist (x, y) eine Loesung von $(*)$ mit $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ mit $f(x_0, y_0) \neq 0$, also

$$x'(t_0) = f(x, y) \neq 0,$$

so kann man $x(t)$ um t_0 herum nach t auflösen, $t = t(x)$ (Zeichnung). Damit genuegt dann der Graph $x \mapsto y(t(x))$ der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y'(t(x)) \frac{dt}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Es gilt also

$$f(x, y) \frac{dy}{dx} - g(x, y) = 0 \quad (**)$$

Die Loesungskurve von $(*)$ ist (lokal) durch den Graphen der Loesungen von $(**)$ gegeben. Damit hat man in gewisser Weise das Problem um eine Dimension reduziert! Allerdings verliert man in dieser Darstellung Information ueber die Geschwindigkeit, in der die Loesungskurven durchlaufen werden. *Zeichnung.*

LEMMA (Loesung als Graph). *Ist (φ, I) eine Loesung von $(*)$ durch (x_0, y_0) mit $f(x_0, y_0) \neq 0$, so verlauft die Loesungskurve lokal im Graphen der Loesung von $(**)$.*

Bemerkung. Ist $V(x, y) \neq 0$ (d.h. (x, y) ist kein Gleichgewicht), so gilt $f(x, y) \neq 0$ oder $g(x, y) \neq 0$. Entsprechend kann man dann den obigen Satz zumindest lokal anwenden nach ggf Vertauschen von f und g und x und y . In diesem Sinne liefert der Satz ein effektives Verfahren ausserhalb der Gleichgewichtspunkte. Ist $V(x, y) = 0$, so erhaelt man auf jede Fall die konstante Gleichgewichtsloesung.

Wir untersuchen nun die Loesungen des reduzierten System $(**)$.

DEFINITION (Exakte Differentialgleichung). *Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die Differentialgleichung $(**)$ heisst exakt, wenn es ein $S : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit*

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -g, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = f.$$

*Dann heisst S Stammfunktion der Differentialgleichung $(**)$.*

Bemerkung.

- Eine Stammfunktion S zu $(**)$ ist gerade ein Hamiltonfunktion H zu $(*)$ (und umgekehrt).
- Haengt g nur von x ab und f nur von y , so ist $(**)$ exakt mit $S = F(y) - G(x)$ mit Stammfunktionen F von f und G von g . Dann handelt es sich im wesentlichen um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen der Form $y' f(y) - g(x) = 0$.
- (Die Definition sagt gerade, dass die 1-Form $\omega = f dy - g dx$ exakt ist, d.h. es gilt $\omega = dF$).

Beispiel. Im Falle des harmonischen Oszillators $(x, y)' = (\frac{1}{m}y, -kx)$ erhält man als System (***) gerade

$$\frac{1}{m}yy' + kx = 0.$$

Das ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen und mit Stammfunktionen $F(y) = \frac{1}{2m}y^2$ von $f(y) = 1/my$ und $G(x) = -\frac{k}{2}x^2$ von $g(x) = -kx$ ist dann

$$S(x, y) = F(y) - G(x) = \frac{1}{2m}y^2 + \frac{k}{2}x^2$$

die uns schon als Hamiltonfunktion bekannte Stammfunktion.

Offenbar gilt direkt nach den Definitionen folgendes.

LEMMA. *Aequivalent:*

- (i) *Es ist (*) Hamiltonsch.*
- (ii) *Es ist (***) exakt.*
- (iii) *Es ist $(-g, f)$ ein Gradientenfeld.*

Ist D sternförmig und sind f, g stetig differenzierbar, so ist dies äquivalent zu

$$(iv) \quad -\partial_y g = \partial_x f.$$

Ohne Bedingungen an D ist in jedem Fall (iv) eine notwendige Bedingung (falls f, g stetig differenzierbar sind).

Bemerkung. Statt der Sternförmigkeit reicht es auch vorauszusetzen, dass D einfach zusammenhängend ist.

Wir fassen unsere bisherigen Überlegungen zusammen.

THEOREM. *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(x, y) \neq 0$ für alle $x, y \in D$.*

(a) *Es verläuft die Lösung von (*) lokal im Graphen der Lösung von (***)*

$$fy' - g = 0.$$

(b) *Ist die Gleichung (***) exakt mit Stammfunktion S, so erhält man alle ihre Lösungen lokal durch Auflösen der Gleichung $S(x, y) = C$.*

Beweis. (a) Die erste Aussage wurde oben schon gezeigt. (Beachte, dass $f(x, y) \neq 0$ nach Voraussetzung).

(b) Ist φ eine Lösung von (***), so gilt

$$\frac{d}{dx}S(x, \varphi(x)) = \frac{\partial S}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial S}{\partial y}\varphi'(x) = -g(x, \varphi(x)) + f(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0.$$

Umgekehrt ist wegen $\partial_y S = f \neq 0$, das Auflösen stets lokal eindeutig möglich und liefert nach dem Satz über implizite Funktionen eine Funktion $y = y(x)$ mit

$$S(x, y(x)) \equiv C$$

also

$$0 = \partial_x S + \partial_y S y' = f y' - g.$$

Das beendet den Beweis. □

3. Integrierende Faktoren

Manchmal ist eine Differentialgleichung der Form

$$f \frac{dy}{dx} - g = 0$$

nicht exakt, wird aber exakt nach Multiplikation mit einer Funktion $M = M(x, y)$, die nicht verschwindet. Dann heisst diese Funktion ein *integrierender Faktor* oder *Eulerscher Multiplikator*. Die Multiplikation mit einem solchen Faktor aendert die Loesungsmenge nicht (da er nicht verschwindet).

LEMMA (Lokales Berechnen integrierender Faktor). *Es gilt lokal:*

(a) *Verschwindet f nicht, so ist $M = M(x)$ genau dann ein integrierender Faktor, wenn gilt*

$$\frac{M'}{M} = -\frac{\partial_y g + \partial_x f}{f}.$$

Insbesondere existiert ein integrierender Faktor, der nur von x abhaengt, wenn die rechte Seite nur von x abhaengt.

(b) *Verschwindet g nicht, so ist $M = M(y)$ ein integrierender Faktor, genau dann, wenn gilt*

$$\frac{M'}{M} = -\frac{\partial_y g + \partial_x f}{g}.$$

Insbesondere existiert ein integrierender Faktor, der nur von y abhaengt, wenn die rechte Seite nur von y abhaengt.

Bemerkung. Die integrierenden Faktoren im letzten Teil der Aussagen von (a) bzw. (b) des Lemma ergeben sich durch Integration einer Gleichung mit getrennten Variablen zu:

$$\ln(M/M_0) = \text{Stammfunktion von } (\dots)$$

also

$$M = M_0 e^{\text{Stammfunktion}}.$$

Beweis. Zu loesen ist $Mf = \partial_y S$, $-Mg = \partial_x S$. Lokal ist unsere Menge sternfoermig und wir erhalten als notwendige und hinreichende Bedingung (Lemma von Poincaré)

$$\partial_x(Mf) = \partial_y(-Mg).$$

Dies ist aequivalent zu

$$\partial_x M \cdot f + M \partial_x f = (-\partial_y M) \cdot g - M \partial_y g.$$

(a) Es ist $M = M(x)$ genau dann, wenn $\partial_y M = 0$. Damit ergibt sich

$$\partial_x M \cdot f + M(\partial_x f) = -M \partial_y g$$

und nach Division durch M und f die Behauptung.

(b) Es ist $M = M(y)$ genau dann, wenn $\partial_x M = 0$. Damit ergibt sich

$$+M \partial_x f = (-\partial_y M) \cdot g - M \partial_y g$$

und nach Division durch M und g die Behauptung. □

Beispiel. Wir betrachten das Raebler-Beute Modell.

$$x' = ax - bxy =: f(x, y)$$

$$y' = -cy + dx =: g(x, y)$$

mit gegebenem $a, b, c, d > 0$. Das System ist nicht Hamiltonsch. (Denn die Integrabilitätsbedingung ist offenbar nicht erfüllt, da gilt $\partial_x f = a - by$, $-\partial_y g = -c + dx$.) Es führt auf die Differentialgleichung

$$(ax - bxy)y' + (cy - dx) = 0.$$

(Lösungskurven des Ursprungssystem liegen auf Niveauflächen dieser Differentialgleichung.) Diese Differentialgleichung ist nicht exakt (da ursprüngliche Differentialgleichung nicht Hamiltonsch ist). Multiplikation mit $M(x, y) = \frac{1}{xy}$ führt auf

$$\left(\frac{a}{y} - b\right)y' + \left(\frac{c}{x} - d\right) = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist exakt, da die Vorfaktoren nur von x bzw. y abhängen (s.o.). Eine Stammfunktion ist gegeben durch

$$S(x, y) = a \ln y - by + c \ln x - dx.$$

Damit liegen die Lösungskurven der Ursprungsgleichung auf den Konstanzflächen von S . Statt Konstanzflächen von S kann man natürlich auch Konstanzflächen von e^S betrachten. Es geht also um die Mengen

$$N_K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^a e^{-by} = K x^{-c} e^{dx}\}$$

für ein festes $K \geq 0$.

Wir analysieren nun N_K mit Hilfe der beiden Funktionen $h(y) = y^a e^{-by}$ und $k(x) = K x^{-c} e^{dx}$.

Zeichnung (linke Seite h): beschränkte nichtnegative Funktion, verschwindet bei 0 und ∞ .

Zeichnung (rechte Seite k): positive Funktion, explodiert bei $x = 0$ und $x = \infty$.

Da h global nach oben beschränkt ist, muss auch k auf N_K nach oben beschränkt sein. Daher ist also die x Koordinate von der Null weg beschränkt und nach oben beschränkt. Da k global nach unten von Null weg beschränkt ist, muss auch h auf N_K von der Null weg beschränkt sein. Damit folgt also, dass auch y nach oben und von der Null weg beschränkt ist. Insgesamt folgt also, dass sowohl x als auch y auf N_K von Null weg beschränkt und nach oben beschränkt sind.

Eine etwas feinere Analyse zeigt, dass die N_K sogar geschlossene Kurven sind.

KAPITEL 3

Reduktion auf Systeme erster Ordnung

In diesem Kapitel beginnen wir die Entwicklung einer allgemeinen Theorie. Fuer die Entwicklung dieser Theorie grundlegend ist die Erkenntnis, dass es aus abstrakter Sicht genuegt, gewoehnliche Differentialgleichungen erster Ordnung zu betrachten. Das werden wir als naechstes diskutieren.

Zur Behandlung von

$$0 = F(x, y, \dots, y^{(n)})$$

- fuehren wir zunaechst neue Variablen ein

$$(y, y', \dots, y^{(n-1)}) = (\eta_0, \dots, \eta_{n-1}) =: \tilde{y}$$

- schreiben dann das System in diesen neuen Variablen als $0 = \tilde{F}(x, \tilde{y}, \tilde{y}')$ mit geeignet modifizierter Funktion \tilde{F}
- und Ergaenzen das Ursprungssystem um Gleichungen fuer die neuen Variablen gemaess

$$\eta'_0 = \eta_1, \eta'_1 = \eta_2, \dots, \eta'_{n-2} = \eta_{n-1}.$$

Bei diesem Verfahren wird die Ordnung der Differentialgleichung verringert und gleichzeitig wird dafuer die Dimension des Zielraumes der Loesung y erhoehrt. (Vgl. Bemerkungen zur klassischen Mechanik und dem Impuls $p = mx'$ in der Einfuehrung.) Hier sind die Details.

THEOREM (Reduktion auf Systeme erster Ordnung). *Jede gewoehnliche Differentialgleichung ist aequivalent zu einer gewoehnlichen Differentialgleichung erster Ordnung im Sinne, dass folgendes gilt:*

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+m(n+1)}$ und $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ gegeben. Sei dann

$$\tilde{\Omega} := \{(x, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{1+nm+nm} : (x, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}, \xi_n) \in \Omega\}$$

und

$$\tilde{F} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{(n-1)m+p}$$

$$\tilde{F}(x, \eta_0, \dots, \eta_{n-1}, \xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_1 - \eta_1, \xi_2 - \eta_2, \dots, \xi_{n-1} - \eta_{n-1}, F(x, \eta_0, \dots, \eta_{n-1}, \xi_n)).$$

(a) Ist (I, φ) eine Loesung von $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, so ist $(I, (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)}))$ eine Loesung von $\tilde{F}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') = 0$.

(b) Ist (I, ψ) mit $\psi = (\psi_0, \dots, \psi_{n-1})$ eine Loesung von $\tilde{F}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') = 0$, so ist (I, ψ_0) eine Loesung von $0 = F(x, y, \dots, y^{(n)})$.

Entsprechendes gilt fuer Anfangswertprobleme.

Beweis. Das folgt direkt durch Einsetzen:

(a) Mit

$$\tilde{y} = (\varphi, \dots, \varphi^{(n-1)}) (= (\eta_0, \dots, \eta_{n-1}))$$

und

$$\tilde{y}' = (\varphi', \dots, \varphi^{(n)}) (= (\xi_1, \dots, \xi_n))$$

gilt nach Einsetzen in \tilde{F} in der Tat

$$\tilde{F}(x, \tilde{y}, \tilde{y}') = (\varphi' - \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)} - \varphi^{(n-1)}, F(x, \varphi, \dots, \varphi^{(n-1)}, \varphi^{(n)}) = 0,$$

wobei zum Ausrechnen der letzten Komponente von F genutzt wird, dass φ die Differentialgleichung erfuehlt.

(b) Mit

$$\tilde{y} = (\psi_0, \dots, \psi_{n-1}) (= (\eta_0, \dots, \eta_{n-1}))$$

und

$$\tilde{y}' = (\psi'_0, \dots, \psi'_{n-1}) (= (\xi_1, \dots, \xi_n))$$

gilt nach Einsetzen in $0 = \tilde{F}$ in der Tat

$$0 = \tilde{F}(x, \psi, \psi') = (\psi'_0 - \psi_1, \dots, \psi'_{n-2} - \psi_{n-1}, F(x, \psi_0, \dots, \psi_{n-1}, \psi'_{n-1})).$$

Damit folgt aus Betrachtung der ersten Komponenten (durch Induktion)

$$\psi_1 = \psi'_0, \psi_2 = \psi'_1 = \psi''_0, \dots, \psi'_{n-1} = \psi_0^{(n-1)}.$$

Einsetzen in die letzte Komponenten liefert dann

$$0 = F(x, \psi_0, \psi'_0, \dots, \psi_0^{(n)}).$$

Das zeigt, dass ψ_0 die Differentialgleichung erfuehlt.

Die Aussage fuer die Anfangswerte folgt entsprechend. □

FOLGERUNG. Die explizite gewoehnliche Differentialgleichung

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

ist aequivalent zur gewoehnlichen Differentialgleichung

$$Y' = (Y_1, \dots, Y_{n-1}, f(x, Y))$$

mit $Y = (Y_0, \dots, Y_{n-1})$. Entsprechendes gilt fuer Anfangswertprobleme.

Gute Uebung. Direkter Beweis der Folgerung.

Aufgrund der vorangehenden Überlegungen koennen wir (soweit es um Entwicklung abstrakter Theorie geht) und auf Differentialgleichungen der Form

$$y' = f(x, y)$$

einschraenken.

Existenz von Loesungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Existenz von Loesungen. Es zeigt sich, dass Existenz von Loesungen lokal unter sehr allgemeinen Bedingungen gilt. Es muss lediglich die Stetigkeit der rechten Seite vorausgesetzt werden.

Aus unseren abstrakten Ueberlegungen wissen wir schon, dass es genuegt Differentialgleichung erster Ordnung d.h. der Form

$$y' = f(x, y)$$

zu untersuchen (da der allgemeine Fall darauf zurueckgefuehrt werden kann).

1. Der Peanosche Existenzsatz (Lokale Existenz von Loesungen)

In diesem Abschnitt widmen wir uns dem folgenden Satz.

THEOREM (Peanoscher Existenzsatz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig. Sei $(x_0, y_0) \in \Omega$ beliebig. Seien $a > 0$ und $r > 0$ mit*

$$Z := [x_0 - a, x_0 + a] \times B_r(y_0) \subset \Omega$$

gewaehlt. Sei $M := \sup\{|f(x, y)| : (x, y) \in Z\}$ und $\beta := \min\{a, \frac{r}{M}\}$. Dann existiert eine Loesung des Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

auf $[x_0 - \beta, x_0 + \beta]$.

Bemerkungen.

- Die Menge Z beschreibt einen Zylinder in Ω . Der Wert fuer β ergibt sich als der kleinste Wert zu dem die Loesung an den Rand von Z stoest. Das kann auf zwei Arten geschehen (Zeichnung):
 - Die Loesung stoest an den 'rechten' Rand des Zylinders, d.h. sie existiert mindestens bis $x_0 + a$.
 - Die Loesung stoest an den Mantel des Zylinders d.h. es gilt fuer ein x dann $\|\varphi(x) - y_0\| = r$.
- Die Voraussetzungen sind in gewisser Weise optimal, denn es wird nur die Stetigkeit von f vorausgesetzt und eine solche Voraussetzung ist notwendig (s.o.).
- Der Satz liefert keine Eindeutigkeit und Eindeutigkeit wird unter diesen Voraussetzungen im Allgemeinen nicht gelten (vgl. Beispiele $y' = |y|^{1/2} \dots$)
- Der Satz gibt ein explizites Intervall auf dem die Loesung existiert.

Wir beschreiben nun die *Idee des Beweises* (und verzichten auf Details). Betrachte $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$. (Zeichnung). Zeige Existenz der Loesung in zwei Schritten:

Schritt 1: Betrachte Zerlegung \mathcal{Z} von $[x_0, x_0 + \beta]$ in (kleine) Teilintervalle via $\mathcal{Z} : x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = x_0 + \beta$ und definiere *Naeherungsloesung* $\varphi = \varphi_{\mathcal{Z}}$ durch das 'Euler Polygon'

$$\phi(x) = \phi(x_0) + (x - x_0)f(x_0, \phi(x_0)) : x \in [x_0, x_1]$$

$$\phi(x) = \phi(x_1) + (x - x_1)f(x_1, \phi(x_1)) : x \in [x_1, x_2]$$

...

Fuer diese ϕ gilt

$$\phi'(x) = f(x_j, \phi(x_j))$$

fuer alle $x \in [x_j, x_{j+1}]$. Da f und ϕ stetig sind, ist die rechte Seite 'nahe' an dem gewuenschten Wert $f(x, \phi(x))$, wenn die Abstaende von x_j zu x_{j+1} klein sind. In diesem Sinne ist ϕ nahe an einer Loesung (also eine Naeherungsloesung).

Schritt 2. Zeige, dass die $\phi = \phi_{\mathcal{Z}}$ gegen eine Loesung des Anfangswertproblem konvergieren, wenn man die Zerlegungen immer feiner macht. (Das sind zwei Aussagen: Konvergenz der Naeherungsloesungen gegen einen Grenzwert und Aussage, dass der Grenzwert eine Loesung ist).

Das beendet die Diskussion des Beweises.

Bemerkungen.

- Der diskutierte Beweis liefert auch numerisch nuetzliches Verfahren zur Bestimmung von Loesungen: Eulersche Polygone.
- Der diskutierte Beweis rechtfertigt ebenfalls den zeichnerischen Zugang zur Diskussion von Loesungen.

2. Maximale Loesungen und globale Existenz

In diesem Abschnitt diskutieren wir das Konzept von maximaler Loesung. Das wird es uns erlauben, einen 'globalen' Existenzsatz fuer Loesungen zu beweisen.

DEFINITION (Maximale Loesung). *Eine Loesung (φ, I) der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ heisst rechtsmaximal, wenn sie keine echte Fortsetzung nach rechts erlaubt (d.h. keine Loesung (ψ, J) mit $I \subset J$, $\varphi = \psi$ auf I und $J \setminus I$ enthaelt einen Punkt groesser als alle Punkte von I). Entsprechend definiert man linksmaximal. Eine Loesung heisst maximal, wenn sie rechts- und linksmaximal ist.*

Bemerkung. Das Intervall I einer rechts / links maximale Loesung (I, φ) ist am rechten / linken Randpunkt offen (da sonst nach dem lokalen Existenzsatz eine echte Fortsetzung existierte).

Maximale Loesungen sind dadurch charakterisiert, dass sie lange genug existieren, um jedes Kompaktum zu verlassen:

Exkurs - Kompaktheit.

LEMMA (Charakteristische Eigenschaft maximaler Loesungen). Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und $(x_0, y_0) \in \Omega$. Sei $\varphi : [x_0, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Loesung von $y' = f(x, y)$ mit $y(x_0) = y_0$ mit $\min I = x_0$. Dann sind äquivalent:

- (i) Es ist (φ, I) rechtsmaximal.
- (ii) Fuer jedes kompakte $K \subset \Omega$ existiert ein $\tilde{x} \in I$ mit $(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) \notin K$.
- (iii) Fuer jedes kompakte $K \subset \Omega$ existiert ein $\tilde{x} \in I$ mit $(x, \varphi(x)) \notin K$ fuer alle $x \in I$ mit $\tilde{x} \leq x$.

Entsprechendes gilt fuer linksmaximale Loesungen.

Bemerkung. Zeichnung.

Beweis. (iii) \implies (ii): Klar.

(ii) \implies (i): Angenommen (I, φ) ist nicht rechtsmaximal. Dann existiert also eine echte Fortsetzung (J, ψ) nach rechts. Damit existiert ein $\tilde{x} \in J$ mit $I \subset [x_0, \tilde{x}] \subset J$. Dann gilt aber

Graph von $\varphi \subset$ Graph von $\psi|_{[x_0, \tilde{x}]}$ kompakt.

Das ist ein Widerspruch zu (ii).

(i) \implies (iii): Angenommen es gibt ein kompaktes $K \subset \Omega$, das φ nicht endgultig verlaesst. Dann gilt $b < \infty$. Weiterhin gibt es dann eine Folge (x_n) in I mit $x_n \rightarrow b$ so dass $(x_n, \varphi(x_n))$ in K bleibt. Ohne Einschraenkung koennen wir dann $(x_n, \varphi(x_n))$ als konvergent voraussetzen (da K kompakt). Sei (b, y^*) der Grenzwert. Wir zeigen nun

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) = y^*.$$

Damit hat dann $(\varphi, [x_0, b))$ eine echte Fortsetzung und ist also keine maximale Loesung. Das liefert einen Widerspruch zu (i).

Zu (*): Sei $s > 0, r > 0$, so dass

$$Z = [b - s, b] \times B_{2r}(y^*) \subset \Omega.$$

Dann ist f auf Z beschaenkt durch ein M . Damit folgt, dass fuer ein genuegend kleines $\delta > 0$ der Graph jeder Loesung von $y' = f(x, y), y(\tilde{x}) = \tilde{y}$ auf $[\tilde{x}, b]$ in Z enthalten ist, wenn $\tilde{x} \in [b - \delta, b], \tilde{y} \in B_\delta(y^*)$. Fuer genuegend grosses $N \in \mathbb{N}$ gilt aber nun $(x_N, \varphi(x_N)) \in [b - \delta, b] \times B_\delta(y^*)$. Damit ist also insbesondere der Graph von $(\varphi, [x_N, b))$ in Z enthalten. Insbesondere ist dann φ' auf $[x_N, b)$ beschaenkt durch M . Damit ist φ auf $[x_N, b)$ gleichmaessig stetig und es existiert $\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x)$. Aufgrund der Definition von y^* muss gelten $\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) = y^*$. \square

Bemerkung. Auf $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ gibt es zwei Arten, wie die Loesung jedes Kompaktum verlassen kann: Sie existiert entweder fuer alle Zeiten oder sie existiert nur fuer endliche Zeit, nutzt diese aber um mit ihren Funktionswerten bis zum Rand von \mathbb{R}^m zu gelangen. (Zeichnung). So kennen wir es auch von Beispielen. Fuer allgemeine Ω bedeutet Maximalitaet, dass die Loesung sich dem Rand von Ω naehert.

← Ende der Vorlesung →

Wir koennen aus dem Satz leicht eine Folgerung fuer Mengen Ω der Form $\Omega = \mathbb{R} \times U$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$ offen ziehen.

FOLGERUNG. Sei $\Omega = \mathbb{R} \times U$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ (wie es z.B. fuer autonome Systeme gilt). Sei $(\varphi, [x_0, b])$ eine rechtsmaximale Loesung von $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ und es gelte $a < \infty$. Dann existiert zu jedem kompakten $K \subset U$ ein $x_K \in (x_0, \hat{t})$ mit $\varphi(x) \notin K$ fuer $x \geq x_K$.

Beweis. Betrachte das kompakte $[x_0, b] \times K \subset \Omega$ und wende das vorige Lemma an. \square

Wir kommen nun zum schon erwaehten globalen Existenzsatz.

THEOREM. (*Existenz maximaler Loesungen*) Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und $(x_0, y_0) \in \Omega$ beliebig. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

eine maximale Loesung.

Beweis. Wir zeigen nur die Existenz rechtsmaximaler Loesungen. Die Existenz linksmaximaler Loesungen folgt analog und die Existenz maximaler Loesungen folgt dann durch Zusammensetzen.

Waehle die Folge kompakter Mengen K_n via $K_n := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n}\} \cap B_n(0)$.

Aufgrund des lokalen Existenzsatz und der Kompaktheit der K_n gilt die folgende Behauptung:

Beh. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\beta_n > 0$, so dass eine Loesung von $y' = f(x, y)$, $y(x^*) = y^*$ mit $(x^*, y^*) \in K_n$ auf $[x^*, x^* + \beta_n]$ existiert.

Damit koennen wir nun induktiv $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots$ und Loesungen $\varphi_n : [x_0, b_n] \rightarrow \mathbb{R}^m$ konstruieren mit

$$\varphi_1 : [x_0, b_1] \rightarrow \Omega \text{ mit } (b_1, \varphi(b_1)) \notin K_1,$$

$$\varphi_2 : [x_0, b_2] \rightarrow \Omega \text{ mit } \varphi_2|_{[x_0, b_1]} = \varphi_1 \text{ und } (b_2, \varphi(b_2)) \notin K_2,$$

...

$$\varphi_n : [x_0, b_n] \rightarrow \Omega \text{ mit } \varphi_n|_{[x_0, b_{n-1}]} = \varphi_{n-1} \text{ und } (b_n, \varphi(b_n)) \notin K_n,$$

Dann ist

$$\varphi : \bigcup_n [x_0, b_n] = [x_0, \lim b_n] \rightarrow \Omega, \quad \varphi|_{[x_0, b_n]} = \varphi_n,$$

eine Loesung des Anfangswertproblem mit $(b_n, \varphi(b_n)) \notin K_n$. Damit handelt es sich um eine Loesung, die nicht in irgendeinem Kompaktum (in Ω) enthalten ist. (Denn fuer jedes solche Kompaktum gilt wegen $\Omega = \cup K_n^\circ$ natuerlich $K \subset \cup_{j=1}^N K_j \subset K_N$.) Nach der Charakterisierung fuer maximale Loesungen, handelt es sich also um eine maximale Loesung. \square

Mit einer Variante des Beweises von (i) \implies (iii) im Charakterisierungslemma koennen wir aus dem vorigen Satz noch Existenz maximaler Fortsetzungen folgern.

FOLGERUNG. *Situation wie im Satz. Dann laesst sich jede Loesung des Anfangswertproblem*

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0,$$

zu einer maximalen Loesung fortsetzen.

Beweis. Sei $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Loesung. Wir untersuchen nur Rechtsmaximalitaet und nehmen an, dass x_0 der linke Randpunkt von I ist. Sei b der rechte Randpunkt. Hierbei sind die Faelle $b = \infty$ und $b \notin I$ moeglich. Wenn die Loesung jedes Kompaktum verlaesst ist sie schon maximal und es ist nichts zu tun. Es bleibt also nur der Fall zu untersuchen, dass die Loesung in einem Kompaktum enthalten ist. Wie im Beweis von (i) \implies (iii) im Charakterisierungslemma sieht man dann, dass der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) =: y^*$$

existiert. Nach dem vorigen Satz existiert eine rechts maximale Loesung von $y' = f(x, y), y(b) = y^*$. Fuegt man diese an die Loesung φ an, so erhaelt man eine rechtsmaximale Loesung. \square

Die Saetze ueber Existenz und Charakterisierung maximaler Loesungen erlauben es auf 'langes' Existieren der Loesung zu schliessen, wenn naemlich die Loesung Kompakta nicht verlassen kann. In diesem Sinne ist eine allgemeine 'Philosophie', dass Schranken an das Wachstum von Loesungen effektiv Existenz von Loesungen garantiert.

Wir untersuchen das in drei Situationen, naemlich Schranken auf

- Zylindern,
- Streifen,
- in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

FOLGERUNG. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig. Sei $(x_0, y_0) \in \Omega$. Dann gilt fuer das zugehoerige Anfangswertproblem und*

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 :$$

(a) *Enthaelt Ω den Zylinder $Z := [x_0, x_0 + a] \times B_b(y_0)$ und ist f auf Z durch M beschaenkt, so existiert jede maximale Loesung auf ganz $[x_0, x_0 + \min\{a, b/M\}]$.*

(b) *Enthaelt Ω den Streifen $S = [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}^m$ und gilt $|f(x, y)| \leq M + L|y|$, so existiert jede maximale Loesung auf ganz $[x_0, x_0 + a]$.*

(c) *Ist $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ und gilt $|f(x, y)| \leq M + L|y|$, so existiert jede maximale Loesung auf ganz \mathbb{R} .*

Bemerkung. In (b) und (c) ist eine Bedingung der Beschaenktheit von f in y noetig, wie das schon untersuchte Beispiel $y' = y^2$ in einer Dimension zeigt. *Beweis.* Aufgrund des vorangegangenen Satzes reicht es jeweils zu zeigen, dass die maximale Loesung den Rand des Definitionsbereiches fruehstens in der angegebenen Zeit erreicht.

(a) Solange y in Z existiert gilt $|y'| = |f(x, y)| \leq M$. Daher kann die Loesung fruehstens bei a bzw. b/M an den Rand von Z stossen (vgl. Bemerkung im Anschluss an den Existenzsatz von Peano).

(b) Nach Voraussetzung gilt $|f(x, y)| \leq M + L|y|$. Die **Grundidee** ist es nun eine Differentialgleichung fuer $|\varphi|$ herzuleiten und daraus die Beschaenkt-heit von φ zu schliessen. Um Probleme mit Nullstellen von φ zu vermeiden, erweist es sich als praktisch statt $|\varphi|$ die Funktion

$$g(x) = (1 + |\varphi|^2)^{1/2}$$

zu betrachten. Offenbar ist g ueberall differenzierbar (Betragsquadrat) und durch 1 nach unten beschaenkt.

Es folgt dann

$$g'(x) = \frac{\varphi(x) \cdot \varphi'(x)}{g(x)} \leq \frac{|\varphi(x)|}{g(x)} |f(x, y(x))| \leq |f(x, y(x))| \leq M + L|y(x)| \leq (M + L)g(x).$$

mit $K = L + |M|$. Damit ergibt sich mit Trennung der Variablen

$$g(x) \leq c e^{(M+L)x}$$

mit einer geeigneten Konstanten c , solange φ existiert. Das liefert

$$|\varphi(x)| \leq g(x) \leq c e^{(M+L)x}$$

solange φ existiert. Damit kann φ den Rand des Streifens fruehstens in $x_0 + a$ erreichen.

(c) Aus (b) folgt, dass die maximale Loesung auf jedem Streifen rechts von x_0 existiert. Damit folgt die Behauptung. \square

←
Ende der Vorlesung

Wir betrachten jetzt 'zeichnerisch' einige Situationen von autonomen Situationen, in denen eine maximale Loesung fuer alle Zeiten existieren muss.

Beispiel. Ebene, f verschwindet ausserhalb von Kompaktum.

Beispiel. Ebene, f blockiert Kompaktum durch 'Pfeile nach Innen'.

Beispiel. Auf \mathbb{R} , Verhalten zwischen zwei Nullstellen von f .

Beispiel. Ebene, f blockiert Kompaktum durch Kreis von Fixpunkten und es gilt Eindeutigkeit der Loesung.

Beachte. Die Betrachtungen dieses Abschnittes gelten auch fuer $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^k$ und stetiges $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^k$ (indem man naemlich \mathbb{C}^k durch \mathbb{R}^m mit $m = 2k$ ersetzt).

Der Eindeutigkeitsatz

In diesem Kapitel lernen wir ein sehr allgemeines Resultat zur Eindeutigkeit kennen.

1. Die lokale Lipschitzbedingung

In diesem Abschnitt lernen wir die Eigenschaft kennen, die die entscheidende Voraussetzung fuer den Eindeutigkeitsatz sein wird.

DEFINITION. Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto f(x, y)$$

gegeben.

(a) Es erfuehlt f eine globale Lipschitzbedingung bzgl. y , wenn eine Konstante L (die Lipschitzkonstante) existiert mit

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \text{ fuer alle } (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega.$$

(Es handelt sich um 'dasselbe' x . Nur y wird variiert!)

(b) Es erfuehlt f eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. y , wenn es zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \Omega$ eine Umgebung $U \subset \Omega$ gibt, so dass die Einschränkung $f|_U$ von f auf U eine Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante $L(U)$ erfuehlt.

Notation. Statt von Lipschitzbedingung bezueglich y werden wir im folgenden oft verkuerzt nur von Lipschitzbedingung sprechen. Es wird sich aber immer um eine Lipschitzbedingung bzgl. y handeln.

Bemerkung. Die Lipschitzbedingung ist eine starke Form der Stetigkeit (in y). Man kann sie auch verstehen (s.u.) als eine schwache Form der Differenzierbarkeit.

Beispiel - lineare Funktion Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\Omega = J \times \mathbb{R}^m$ und

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m, f(x, y) = A(x)y + b(x)$$

mit stetigen Funktionen $A : J \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ und $b : J \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Dann erfuehlt f eine lokale Lipschitzbedingung.

(Bew.....)

Es kann sehr wohl passieren, dass eine Funktion einer lokalen Lipschitzbedingung genuegt, aber keiner globalen (wenn naemlich die Konstanten $L(U)$ fuer wachsende U gegen ∞ konvergieren). Dazu diskutieren wir ein Beispiel.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy^2$. Dann genuegt f einer lokalen Lipschitzbedingung. Denn es gilt

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |xy_1^2 - xy_2^2| = |x(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)| \leq |x(y_1 + y_2)||y_1 - y_2|.$$

(Für y_1, y_2, t aus einer beschränkten Menge, bleibt der Vorfaktor $|t(y_1 + y_2)|$ beschränkt...) Allerdings genügt f nicht einer globalen Lipschitzbedingung: Betrachtet man nämlich $y_2 = y_1 + 1$ so gilt mit der gerade durchgeführten Rechnung

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x(2y_1 + 1)||y_2 - y_1|$$

und damit führt

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \leq L$$

auf $|x||2y + 1| \leq L$ also $L \rightarrow \infty$ für $y \rightarrow \infty$ und $x \neq 0$.

Es kann auch sein, dass eine Funktion nicht einmal lokal einer Lipschitzbedingung genügt:

Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = |y|^{1/2}$ genügt (bei 0) keiner Lipschitzbedingung. Denn es gilt

$$|f(x, 0) - f(x, \frac{1}{n^2})| = |\frac{1}{n^2}|^{1/2} = \frac{1}{n} = n|\frac{1}{n^2} - 0|.$$

Der folgende Satz zeigt, dass stetige partielle Differenzierbarkeit (bzgl. y) eine Lipschitzbedingung impliziert.

THEOREM. Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig und bzgl. y stetig partiell differenzierbar (d.h. die partiellen Ableitungen von f bzgl. y sind stetig auf Ω). Dann genügt f einer lokalen Lipschitzbedingung. Ist zusätzlich Ω konvex und die partiellen Ableitungen von f bzgl. y auf Ω beschränkt, so genügt f sogar einer globalen Lipschitzbedingung.

Beachte. Eine entsprechende Aussage (mit entsprechendem Beweis) gilt natürlich für Funktionen auf $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^k$, wenn man \mathbb{C}^k als \mathbb{R}^{2k} auffasst.

Beweis. Der Beweis ist im wesentlichen eine Folge des Mittelwertsatzes. Hier sind die Details:

Nach dem Mittelwertsatz gilt für eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $|\partial_k g_j(y)| \leq M$, $k = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ für alle $y \in U$ die Abschätzung

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leq M\sqrt{mn}|y_1 - y_2|$$

falls die Verbindungsstrecke von y_1 und y_2 ganz in U enthalten ist.

Da Ω offen ist und die partiellen Ableitungen von f nach y stetig sind, können wir zu jedem (x_0, y_0) eine Umgebung

$$V = (x_0 - r, x_0 + r) \times U_r(y_0) \subset \Omega$$

wählen, auf der die partiellen Ableitungen von f nach y beschränkt sind (durch ein M). Da V konvex ist, folgt aus dem Mittelwertsatz sofort die erste Behauptung.

Die zweite Behauptung folgt aus dem Mittelwertsatz mit der Wahl $V = \Omega$. \square

Bemerkung. Auch wenn f nicht differenzierbar ist, kann trotzdem eine Lipschitzbedingung (bezüglich y) gelten. Beispiel: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(y) = |y|$.

2. Der Eindeutigkeitsatz

In diesem Abschnitt lernen wir den grundlegenden Satz ueber Eindeutigkeit von Loesungen gewoehnlicher Differentialgleichung kennen.

THEOREM. (*Lokale Lipschitzbedingung impliziert globale Eindeutigkeit*) Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und erfuelle eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. y . Sind $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ Loesungen der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y), \quad \text{mit } \varphi(x_0) = \psi(x_0)$$

fuer ein $x_0 \in I$, so gilt $\varphi = \psi$.

Bemerkung. Erfuellt f die Bedingungen des Satzes und sind ψ und φ Loesungen desselben Anfangswertproblemles auf verschiedenen Intervallen, so muessen sie also auf dem Schnitt der beiden Intervalle uebereinstimmen.

Beweis. Wuerde die Aussage nicht gelten, so gaebe es ein

- $x' > x_0$ mit $x \in I$ und $\varphi(x') \neq \psi(x')$,
- oder
- $x' < x_0$ mit $x \in I$ und $\varphi(x') \neq \psi(x')$.

Ohne Einschraenkung koennen wir annehmen, dass der erste Fall vorliegt. Wir betrachten nun das maximale Intervall rechts von x_0 auf dem φ und ψ uebereinstimmen. Genauer sei

$$x_1 := \sup\{t \in I : \varphi(s) = \psi(s) \text{ fuer alle } x_0 \leq s \leq t\}.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$x_1 \leq x'.$$

Aufgrund der Stetigkeit von φ, ψ gilt auch

$$y_1 := \varphi(x_1) = \psi(x_1).$$

Zeichnung. Sei $r > 0$, so dass

$$U := (x_1 - r, x_1 + r) \times U_r(y_1) \subset \Omega$$

und f auf U einer lokalen Lipschitzbedingung mit Konstante $L = L(U)$ genuegt. Da φ, ψ stetig sind, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\varphi(x) \in U_r(y_1) \quad \text{und} \quad \psi(x) \in U_r(y_1)$$

fuer alle $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$. Ohne Einschraenkung $\delta < r$ (sonst Verkleinern von δ). Fuer $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ gilt dann aufgrund der Differentialgleichung und der Lipschitzbedingung (evtl. mehr Details)

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \psi(x)| &= |\varphi(x) - y_1 - (\psi(x) - y_1)| \\ &= \left| \int_{x_1}^x (f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))) ds \right| \\ &\leq \int_{x_1}^x L |\varphi(s) - \psi(s)| ds. \end{aligned}$$

(Idee:Das ist fuer x nahe x_1 unmoeglich. Denn: linke Seite $|\varphi(x) - \psi(x)|$, rechte Seite $\sim (x - x_1)L|\varphi(x) - \psi(x)|\dots$)

Wähle ein t mit $x_1 < t \leq x_1 + \delta$ und setze

$$S(t) := \sup\{|\varphi(s) - \psi(s)| : x_1 \leq s \leq t\}.$$

Dann gilt fuer beliebiges $x_1 < x \leq t$ also nach dem gezeigten

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \int_{x_1}^x L|\varphi(s) - \psi(s)|ds \leq (t - x_1)LS(t).$$

Bildet man das Supremum ueber alle $x \in [x_1, t]$ so folgt

$$S(t) \leq (t - x_1)LS(t).$$

Das ist fuer t nahe x_1 nur moeglich, falls $S(t) = 0$. Widerspruch (zur Konstruktion von x_1). \square

Bemerkung.

- Ohne eine lokale Lipschitzbedingung ist die Eindeutigkeitsaussage im allgemeinen falsch (vgl. Beispiel $y' = |y|^{1/2}$.)
- Der Beweis zeigt: $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ mit $f(t) \leq L \int_0^t f(s)ds$ muss identisch verschwinden. Das ist ein Spezialfall eines Gronwall Lemma (vgl. Uebung).

FOLGERUNG. (Bei eindeutiger Loesbarkeit koennen Gleichgewichtspunkte nicht in endlicher Zeit erreicht werden) Genuegt $y' = f(y)$ einer lokalen Lipschitzbedingung und gilt $f(y_g) = 0$, so kann eine Loesung (φ, I) mit Anfangswert $f(\varphi(x_0)) \neq 0$, den Wert y_g nicht annehmen.

Beweis. Offenbar ist $\psi(x) \equiv y_g$ eine Loesung von $y' = f(y)$. Aufgrund der Eindeutigkeit kann dann φ nirgends mit ψ uebereinstimmen. \square

Beispiel.

- Glatte Funktion auf \mathbb{R} mit Nullstelle. (Zeichnung.)
- Spirale

Das Picard Lindelof Verfahren

In diesem Abschnitt diskutieren wir kurz ein allgemeines Verfahren zum Berechnen von Lösungen (und damit auch Beweisen ihrer Existenz).

Wir betrachten folgende Situation:

(S) Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und erfülle eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. y .

Nach dem (HDI) löst dann die stetige Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ das Anfangswertproblem $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ genau dann, wenn

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) ds$$

für alle $x \in I$ gilt. Damit ist also das Anfangswertproblem der Differentialgleichung in eine Integralgleichung umgeformt worden.

Wir wollen nun die Integralgleichung durch Iteration lösen, d.h. wir setzen

$$(*) \quad y_0(x) \equiv y_0, \quad y_{k+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_k(s)) ds$$

und zeigen gleichmässige Konvergenz der y_k auf einem geeigneten Intervall. (Es ist nicht schwer zu sehen (s.u.), dass dann der gleichmässige Grenzwert y der y_k die Integralgleichung lösen muss.)

Hier sind die Details:

Da Ω offen ist, können wir ein $r > 0$ finden, so dass

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : |x - x_0| \leq r, |y - y_0| \leq r\}$$

in Ω enthalten ist und f auf A eine Lipschitzbedingung mit Konstante L erfüllt. Da f stetig ist, existiert weiter ein $M \geq 0$ mit

$$|f(x, y)| \leq M \text{ für alle } (x, y) \in A.$$

Sei nun

$$\varepsilon := \min\left\{r, \frac{r}{M}\right\}, \quad I := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

(Die Konstruktion ist gerade so, dass eine Kurve, die in (x_0, y_0) beginnt, frühestens an den Randpunkten von I an den Rand von A stossen kann. Zeichnung.)

Wir definieren nun die Funktionen y_k gemäss $(*)$ für $k = 0, 1, 2, \dots$ und $x \in I$ und zeigen, dass diese y_k auf ganz I definiert sind und auf I gleichmässig gegen eine Lösung der Integralgleichung (und damit des Anfangswertproblem) konvergieren: (Wir betrachten nur $[x_0, x_0 + \varepsilon]$.)

Alle y_k sind auf ganz I definiert: Wir zeigen induktiv, dass $|y_k(x) - y_0| \leq r$ fuer alle $x \in I$, $k \in \mathbb{N}_0$ gilt (und damit, dann auch y_{k+1} auf ganz I definiert ist).

← Ende der Vorlesung →

$k = 0$: ist klar.

$k \implies (k + 1)$: Es gelte $|y_k - y_0| \leq r$. Dann folgt aus der Rekursionsformel also

$$|y_{k+1}(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x f(s, y_k(s)) ds \right| \leq \int_{x_0}^x |f(s, y_k(s))| ds \leq M\varepsilon \leq r.$$

Es gilt die Abschaetzung $|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq ML^k \frac{|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$:

Induktion:

$k = 0$: Es gilt

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(s, y_0) ds \right| \leq M|x - x_0| = ML^0 \frac{|x - x_0|^{0+1}}{(0 + 1)!}.$$

$k \implies k + 1$:

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &\leq \int_{x_0}^x |f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))| ds \\ &\leq \int_{x_0}^x L|y_k(s) - y_{k-1}(s)| ds \\ &\leq L \frac{ML^{k-1}}{k!} \int_{x_0}^x |s - x_0|^k ds \\ &= ML^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k + 1)!}. \end{aligned}$$

(Erinnerung. Gleichmaessige Konvergenz und Stetigkeit des gleichmaessigen Grenzwertes stetiger Funktionen....)

Die Folge y_k konvergiert gleichmaessig gegen ein stetiges y . Fuer alle $x \in I$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt nach dem vorigen Behauptung

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq ML^k \frac{\varepsilon^{k+1}}{(k + 1)!}.$$

Da die rechte Seite nicht von $x \in I$ abhaengt und summierbar ist (vgl. Exponentialreihe) ist also die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |y_{k+1}(x) - y_k(x)|$$

auf I gleichmaessig konvergent. Somit konvergiert auch

$$y_{k+1} = y_0 + \sum_{l=0}^k (y_{l+1} - y_l)$$

gleichmaessig auf I gegen

$$y = y_0 + \sum_{l=0}^{\infty} (y_{l+1} - y_l)$$

und y ist stetig auf I (als gleichmaessiger Grenzwert stetiger Funktionen).

Der Grenzwert y der y_k loest die Integralgleichung. Wegen

$$|f(x, y(x)) - f(x, y_k(x))| \leq L|y(x) - y_k(x)|$$

und der gleichmaessigen Konvergenz der y_k gegen y , konvergiert $f(x, y_k(x))$ gleichmaessig gegen $f(x, y(x))$. Damit konvergiert dann auch (fuer jedes feste $x \in I$ $\int_{x_0}^x f(s, y_k(s))ds$ gegen $\int_{x_0}^x f(s, y(s))ds$.

Damit folgt fuer $x \in I$

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_k(s))ds \right) \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds. \end{aligned}$$

Damit haben wir die gewuenschte Konvergenz der (y_k) gezeigt.

Der Grenzwert y der y_k ist eine Loesung des Anfangswertproblem. (Das haben wir oben schon erwahnt.) Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt ist ein stetiges y mit

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds$$

differenzierbar mit $y'(x) = f(x, y(x))$ (da $s \mapsto f(s, y(s))$ stetig ist). Damit loest y also die Differentialgleichung. Weiterhin gilt fuer $x = x_0$ offenbar $y(x_0) = y_0$. Damit erfuehlt y die Anfangsbedingung. Insgesamt loest also y das Anfangswertproblem.

Bemerkung.

- Der erste Teil des Beweises zeigt, dass die (y_k) auf einem Intervall gleichmaessig konvergiert.
- Der letzte Teil des Beweis zeigt folgendes: Wenn die y_k auf einem Intervall gleichmaessig konvergieren, stellt ihr Grenzwert dort eine Loesung dar.
- Insbesondere kann in konkreten Faellen das Verfahren auf ganz \mathbb{R} konvergieren und dann auch auf ganz \mathbb{R} eine Loesung liefern (auch wenn unsere Betrachtung zunaechst auf ein bestimmtes Intervall eingeschaenkt ist).

Beispiel - Picard Lindeloef zum Loesen von $y' = ay, y(0) = y_0$: Wir erhalten

$$\begin{aligned} y_0 &= y_0, \\ y_1(x) &= y_0 + \int_0^x ay ds = y_0 + xay_0. \\ y_2(x) &= y_0 + \int_0^x ay_1(s)ds = y_0 + a \int_0^x (y_0 + xay_0)ds = y_0 + xay_0 + \frac{x^2 a^2}{2} y_0 \end{aligned}$$

und (nach einer kleinen Induktion)

$$y_k = y_0 \sum_{l=0}^k \frac{x^l a^l}{l!}.$$

Damit ergibt sich fuer die Loesung

$$y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_0 \sum_{l=0}^k \frac{x^l a^l}{l!} = y_0 e^{xa}.$$

Der Satz von Picard-Lideloef liefert nur Konvergenz auf einem Intervall um 0 herum. Im konkreten Fall erhaelt man (lokal gleichmaessige) Konvergenz aber auf ganz \mathbb{R} . Entsprechend ist y auf ganz \mathbb{R} eine Loesung. (Vgl. Uebung fuer den Fall von Matrizen.)

←→
Ende der Vorlesung

Stetige Abhaengigkeit von den Anfangsbedingungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Abhaengigkeit der (maximalen) Loesung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

von

- Anfangspunkt x_0 ,
- Anfangsbedingung y_0 ,
- rechter Seite f .

Es wird sich im wesentlichen eine stetige Abhaengigkeit ergeben. Dabei ist aber zu unterscheiden, ob Existenz der Loesung nach Stoerung schon vorausgesetzt ist oder noch zu zeigen. Das fundamentale Hilfsmittel sind jeweils sogenannte Gronwall - Abschaetzungen.

LEMMA (Gronwall-Lemma). *Sei I ein Intervall in \mathbb{R} mit linkem Endpunkt $a \in \mathbb{R}$ und $u : I \rightarrow [0, \infty)$ stetig mit*

$$u(t) \leq \alpha + \int_0^t \beta(s)u(s)ds$$

fuer geeignete $\alpha \geq 0$ und stetige $\beta : I \rightarrow [0, \infty)$. Dann gilt

$$0 \leq u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(s)ds}.$$

Bemerkung.

- Falls $\beta \equiv L$ erhalt man die Abschaetzung $u(t) \leq \alpha e^{L(t-a)}$.
- Fuer $\alpha = 0$ erhaelt man die Abschaetzung $u \equiv 0$ (vgl. Eindeutigkeitsbeweis).

Beweis. Es reicht den Fall $\alpha > 0$ zu behandeln. Der Fall $\alpha = 0$ folgt dann durch Grenzuebergang. Wir berechnen

$$\frac{d}{dt} \ln \left(\alpha + \int_a^t \beta(s)u(s)ds \right) = \frac{\beta(t)u(t)}{\alpha + \int_a^t \beta(s)u(s)ds} \leq \beta(t).$$

(Hier wird in der letzten Abschaetzung die Voraussetzung benutzt.) Integration von a bist t liefert

$$\ln \left(\alpha + \int_a^t \beta(s)u(s)ds \right) - \ln \alpha \leq \int_a^t \beta(s)ds.$$

Exponentieren und Nutzen der Voraussetzung liefert dann die Aussage

$$u \leq \alpha + \int_0^t \beta(s)u(s)ds \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(s)ds}.$$

Das beweist die Aussage. \square

THEOREM. (*Lokaler Stetigkeitssatz*) Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und f erfuelle globale Lipschitzbedingung bzgl y mit Konstante L . Sei φ eine Loesung von $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ und ψ eine Loesung von $y' = g(x, y), z(x_0) = z_0$. Dann gilt, solange φ und ψ existieren, dass

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq \|y_0 - z_0\| e^{L(x-x_0)} + \frac{S}{L} (e^{L(x-x_0)} - 1)$$

mit

$$S := \sup_{(x,v) \in \Omega} \|f(x, v) - g(x, v)\|.$$

Bemerkungen.

- Der Satz kann als eine Aussage zur stetigen Abhaengigkeit verstanden werden.
- Der Beweis setzt Existenz von Loesungen voraus. Er macht keine Aussage darueber, wie Existenz der einen Loesung auf einem Intervall, die Existenz der anderen Loesung auf einem (kleineren) Intervall erzwingt. Daher ist er noch nicht, dass gewuenschte Resultat.
- Das Auseinanderlaufen der Loesungen hat zwei verschiedene Ursachen: Verschiedene rechte Seiten und verschiedene AW. Das entspricht gerade den beiden Termen: Gilt $y_0 = z_0$, so faellt der erste Term weg. Gilt $f = g$ so faellt der zweite Term weg.
- Abschaetzung hat jeweils die Form: Differenz mal exponentielles Wachstum.
- Die Abschaetzung mag grob erscheinen, ist aber optimal, wie folgende Beispiele zeigen:

$$f(x, y) = g(x, y) = Ly, y_0 \neq z_0.$$

$$\text{Dann } \varphi(x) = y_0 e^{L(x-x_0)}, \psi(x) = z_0 e^{L(x-x_0)}.$$

$$f(x, y) = Ly, g(x, y) = f(x, y) + \varepsilon.$$

$$\varphi(x) = y_0 e^{L(x-x_0)}, \psi(x) = y_0 e^{L(x-x_0)} + \frac{\varepsilon}{L} (e^{L(x-x_0)} - 1).$$

- Durch Verschieben kann man mit dem Theorem auch den Fall von verschiedenen Anfangszeiten behandeln: $g(x, y) = f(x + (x_1 - x_0), y)$. Ist dann φ eine Loesung von $y' = g(x, y), y(x_0) = y_0$ so ist $\psi = \varphi(\cdot + (x_0 - x_1))$ gerade eine Loesung von

$$y' = f(x, y), y(x_1) = y_0.$$

Beweis. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t) - \psi(t)\| &\leq \|y_0 - z_0\| + \int_{x_0}^x \|f(t, \varphi(t)) - g(t, \psi(t))\| dt \\
&\leq \|y_0 - z_0\| + \int_{x_0}^x \|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\| dt \\
&\quad + \int_{x_0}^x \|f(t, \psi(t)) - g(t, \psi(t))\| dt \\
&\leq \|y_0 - z_0\| + L \int_{x_0}^x \|\varphi(t) - \psi(t)\| dt + \int_{x_0}^x S dt \\
&= \|y_0 - z_0\| + L \int_{x_0}^x \left(\|\varphi(t) - \psi(t)\| + \frac{S}{L} \right) dt.
\end{aligned}$$

Damit gilt dann also fuer

$$u(t) := \|\varphi(t) - \psi(t)\| + \frac{S}{L}$$

die Abschaetzung

$$u(t) \leq \|y_0 - z_0\| + \frac{S}{L} + L \int_{x_0}^x u(s) ds.$$

Mit Gronwall folgt

$$u(t) \leq (\|y_0 - z_0\| + \frac{S}{L}) e^{L(x-x_0)}.$$

Das liefert mittels der Definition von u sofort

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq \|y_0 - z_0\| e^{L(x-x_0)} + \frac{S}{L} (e^{L(x-x_0)} - 1).$$

Das ist die Behauptung. □

THEOREM (Allgemeine Loesung ist stetig). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig mit lokaler Lipschitzbedingung. Sei*

$\mathcal{D} := \{(x_0, y_0, z) \in \Omega \times \mathbb{R} : \text{maximale Loesung von } y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \text{ existiert noch zu } z\}$
und

$\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m, (x_0, y_0, z) \mapsto \text{Wert der maximalen Loesung von } y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \text{ an der Stelle } z$

Dann ist \mathcal{D} offen und Φ stetig.

Beweis. Wir skizzieren nur die Idee. Die Details sind muhselig (aber nicht schwierig). Stetigkeit folgt aus dem vorangegangenen Lemma und der Bemerkung zu verschobenen Funktionen. Die Offenheit folgt, wenn man zeigt, dass die Loesung bei 'kleinen' Aenderungen in der Anfangsbedingungen nicht schnell 'explodieren' kann. Das folgt ebenfalls aus dem vorigen Lemma. □

Wir werden das jetzt noch etwas umformulieren:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig mit lokaler Lipschitzbedingung. Sei $(\varphi_{x_0, y_0}, I_{x_0, y_0})$ die maximale Loesung von $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$. (Diese ist eindeutig aufgrund der lokalen Lipschitzbedingung.) Dann heisst

$$\mathcal{D} = \{(x_0, y_0, z) \in \Omega \times \mathbb{R} : z \in I_{x_0, y_0}\}$$

der Definitionsbereich der allgemeinen Lösung und

$$\Phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^m, (x_0, y_0, z) \mapsto \varphi_{x_0, y_0}(z).$$

heißt die allgemeine Lösung. Der Satz besagt dann, dass die allgemeine Lösung stetig ist und auf einer offenen Menge definiert.

←→
Ende der Vorlesung

Systeme linearer Differentialgleichungen

Mit diesem Kapitel verlassen wir den Aufbau der allgemeinen Theorie und wenden uns einer grossen und sehr wichtigen Klasse von Differentialgleichungen zu. Lineare Differentialgleichungen spielen eine wichtige Rolle, da sie zum einen konkrete in Anwendungen auftreten und da sie zum anderen auch in der Approximation komplizierterer Differentialgleichungen von Nutzen sind.

1. Existenz- und Eindeutigkeit der Loesungen fuer Systeme linearer Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt geht es um lineare Differentialgleichungen der Form

$$y' = A(x)y + b$$

mit $A : J \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$ und $b : J \rightarrow \mathbb{C}^m$ stetig. Diese Differentialgleichung heisst *lineare Differentialgleichung* oder *System linearer Differentialgleichung*. Ist $b \equiv 0$, so spricht man von *homogener Gleichung* andernfalls von *inhomogener Gleichung*. Wir zeigen zunaechst, dass jedes Anfangswertproblem auf ganz J loesbar ist. Anschliessend untersuchen wir dann die Struktur des Loesungsraumes.

THEOREM (Existenz und Eindeutigkeit der allgemeinen Loesung). *Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien $A : J \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$ und $b : J \rightarrow \mathbb{C}^m$ stetig. Dann ist fuer jedes $x_0 \in J$ und $y_0 \in \mathbb{C}^m$ das Anfangswertproblem*

$$y' = A(x)y + b, y(x_0) = y_0$$

eindeutig auf ganz J loesbar.

Beweis. Sei $J_0 \subset J$ eine beliebiges kompaktes Intervall mit $x_0 \in J_0$ und sei G_0 der Streifen $G_0 = J_0 \times \mathbb{C}^m$. (Zeichnung) Dann erfuehlt

$$f : G_0 \rightarrow \mathbb{C}^m, f(x, y) = A(x)y + b(x)$$

eine globale Lipschitzbedingung auf G_0 bzgl y :

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - f(x, y^*)\| &= \|A(x)y - A(x)y^*\| \\ &\leq \|A(x)\| \|y - y^*\| \\ &\leq \max\{\|A(x)\| : x \in J_0\} \|y - y^*\| \\ &= L \|y - y^*\| \end{aligned}$$

mit $L = \max\{\|A(x)\|\} < \infty$. (Beachte, dass $\|A(\cdot)\|$ auf J stetig ist, also auf dem kompakten J_0 sein Maximum annimmt.) Damit folgt aus den bekannten Saetzen die Existenz und Eindeutigkeit. Genauer folgt die Eindeutigkeit aus dem Eindeutigkeitsatz (dazu reicht lokale Lipschitzbedingung) und die

Existenz folgt aus dem Satz zur Existenz maximaler Loesungen auf Streifen. Da dies fuer jedes kompakte J_0 in J gilt, folgt insgesamt die gewuenschte Aussage durch Zusammensetzen der Loesungen. \square

Wir untersuchen nun die **Struktur des Loesungsraumes**:

- Die Loesungen der homogenen Gleichung $y' = Ay$ bilden einen Vektorraum d.h. es gilt das Superpositionsprinzip: Sind φ, ψ Loesungen und $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist auch $\varphi + \lambda\psi$ eine Loesung. (Nachrechnen!) Tatsaechlich gilt auch die Umkehrung: Ist $y' = f(x, y)$ eine Differentialgleichung auf einem Streifen und bilden die Loesungen einen Vektorraum so handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung. (Bew. Uebung)
- Ist V der Vektorraum der Loesungen des homogenen Problems und ψ eine beliebige Loesung des inhomogenen Problems $y' = Ay + b$, so ist $\psi + V$ die Menge der Loesungen des inhomogenen Problems. (Nachrechnen). Die Loesungen des inhomogenen Problems bilden also einen affinen Raum ueber den Loesungen des homogenen Systems.

In den folgenden Abschnitten wird es um eine genaue Beschreibung des Loesungsraumes und Berechnen der Loesungen gehen.

2. Die homogene Gleichung: Loesungsmatrix und Fundamentalsystem

Wir untersuchen nun die Struktur des Vektorraumes der Loesungen des homogenen Systems naeher. Insbesondere wird sich herausstellen, dass der Raum endlichdimensional ist. Wir werden seine Basen, unter dem Namen *Fundamentalsystem* diskutieren und aus einer speziellen Basis die *Loesungsmatrix* zusammensetzen.

Wir bezeichnen die Einheitsmatrix mit E .

LEMMA (Loesungsmatrix). Sei $A : J \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$ stetig.

(a) Das matrixwertige Anfangswertproblem $Y' = A(x)Y, Y(x_0) = E$ besitzt fuer jedes $x_0 \in J$ genau eine Loesung $Y_{x_0} : J \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$.

(b) Fuer jedes $y_0 \in \mathbb{C}^m$ und $x_0 \in J$ ist $y = Y_{x_0}y_0$ die eindeutige Loesung des Anfangswertproblem $y' = Ay, y(x_0) = y_0$.

(c) Fuer jedes $x \in J$ und $x_0 \in J$ ist $Y_{x_0}(x)$ invertierbar und es gilt fuer $x_0, x_1, x_2 \in J$

$$Y_{x_0}(x) = Y_{x_1}(x)Y_{x_0}(x_1).$$

Beweis. (a) Offenbar handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung fuer das matrixwertige Y (!) Damit folgen Existenz und Eindeutigkeit aus dem vorangehenden Satz.

(b) Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage des vorigen Satzes reicht es zu zeigen, dass $\phi := Y_{x_0}y_0$ das Anfangswertproblem $y' = Ay, y(x_0) = y_0$ loest. Das folgt direkt durch Nachrechnen:

Differentialgleichung: $\phi'(x) = Y' y_0 = AY y_0 = A\phi(x)$.

Anfangswert $\phi(x_0) = Y_{x_0}(x_0)y_0 = E y_0 = y_0$.

(c) Wegen $Y_{x_0}(x_0) = E$ reicht es die zweite Aussage zu zeigen. (Denn dann folgt aus

$$Y_x(x_0)Y_{x_0}(x) = Y_{x_0}(x_0) = E$$

die Invertierbarkeit von $Y_{x_0}(x)$.) Die zweite Aussage folgt aus der Eindeutigkeit der Loesungen auf folgende Weise: Sei die Funktion $\Phi : J \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$ definiert durch $\Phi(x) := Y_{x_1}(x)Y_{x_0}(x_1)$. Dann loest Φ offenbar das Anfangswertproblem

$$\Phi(x_1) = Y_{x_0}(x_1), \quad \Phi' = A\Phi.$$

Ebenso loest natuerlich $Y_{x_0}(x)$ dieses Anfangswertproblem. Damit folgt die Aussage aus der Eindeutigkeit. \square

Bemerkung.

- Die letzte Aussage ist eine 'Gruppeneigenschaft' der Loesungen.
- Die Eindeutigkeit der Loesung liefert einem auch dass keine Nicht-nullloesung jemals die Null erreichen kann. (Bew...)

FOLGERUNG. Die Spalten y_j der Matrix(-funktion) Y_{x_0} sind also die Loesungen zum Anfangswertproblem $y' = Ay$, $y(x_0) = e_j$. Die Loesung von $y' = Ay, y(x_0) = y_0$, ist dann eine Linearkombination der Spalten naemlich

$$y = Y y_0 = \sum y_0(j) y_j.$$

DEFINITION (Loesungsmatrix). Die matrixwertige Funktion $Y = Y_{x_0}$ aus dem vorigen Lemma heisst die Loesungsmatrix der Differentialgleichung $y' = Ay$ zum Anfangspunkt x_0 .

LEMMA. Sei $A : J \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$ stetig. Fuer Loesungen z_1, \dots, z_k von $y' = Ay$ sind aequivalent:

- (i) Die Funktionen z_1, \dots, z_k sind linear unabhaengig (d.h. $0 = \sum c_j z_j \implies c_j = 0, j = 1, \dots, k$).
- (ii) Fuer ein $\tilde{x} \in J$ sind die Vektoren $z_1(\tilde{x}), \dots, z_k(\tilde{x})$ linear unabhaengig.
- (iii) Fuer jedes $x \in J$ sind die Vektoren $z_1(x), \dots, z_k(x)$ linear unabhaengig.

Ist $k = m$ so ist dies aequivalent zu:

- (iv) Es sind z_1, \dots, z_m eine Basis des Raumes der Loesungen von $y' = Ay$.

Beweis. (iii) \implies (ii) \implies (i): Das ist klar.

(i) \implies (iii): Sei $0 = \sum c_j z_j(x_0)$ fuer ein $x_0 \in J$. Dann loest also $z := \sum c_j z_j$ das Anfangswertproblem $y' = Ay, y(x_0) = 0$. Die eindeutige Loesung dieses Anfangswertproblem ist aber $y \equiv 0$. Damit folgt $z \equiv 0$. Nach (i) gilt dann also $c_j = 0, j = 1, \dots, k$. Damit folgt die gewuenschte lineare Unabhaengigkeit.

Es bleibt die Aequivalenz der ersten drei Aussagen zu (iv) zu zeigen. Die Implikation (iv) \implies (i) ist offensichtlich. Es genuegt also (ii) \implies (iv) zu zeigen: Seien z_1, \dots, z_m linear unabhaengig in \tilde{x} . Dann sind also $z_1(\tilde{x}), \dots, z_m(\tilde{x})$ eine Basis von \mathbb{C}^m . Sei φ eine beliebige Loesung von $y' = Ay$. Dann gibt es

also (Basis !) $c_j, j = 1, \dots, m$, mit

$$\varphi(\tilde{x}) = \sum c_j z_j(\tilde{x}) =: y_0.$$

Damit loesen also φ und $z := \sum c_j z_j$ das Anfangswertproblem $y' = Ay$, $y(\tilde{x}) = y_0$ und stimmen also aufgrund des Eindeutigkeitsatzes ueberein. \square

← Ende der Vorlesung →

DEFINITION (Fundamentalsystem). Sei $A : J \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$ stetig. Eine Menge $\{y_1, \dots, y_m\}$ von Loesungen von $y' = Ay$ heisst Fundamentalsystem der Differentialgleichung, wenn eine der Bedingungen des vorigen Lemma gilt (d.h. wenn es sich um eine Basis des Raumes der Loesungen handelt).

PROPOSITION. Ist $Y = Y_{x_0}$ die Loesungsmatrix eines linearen Differentialgleichung

Beweis. Die Spalten von Y_{x_0} sind nach dem schon gezeigten Loesungen der Differentialgleichung. Im Punkt x_0 bilden sie gerade die Standardbasis $\{e_1, \dots, e_m\}$ im \mathbb{C}^m . Damit handelt es sich um m linear unabhängige Vektoren und die Aussage folgt aus dem vorigen Lemma. \square

Tatsaechlich kann man beliebige Fundamentalsysteme in die Loesungsmatrix 'umrechnen'. Das entspricht einem Basiswechsel:

LEMMA (Fundamentalsystem vs Loesungsmatrix). $A : J \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$ stetig und z_1, \dots, z_m ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$. Sei Z die Matrix mit den Spalten z_1, \dots, z_m . Sei $x_0 \in J$ beliebig. Dann ist $Z(x)$ fuer jedes $x \in J$ invertierbar und es gilt

$$Z(x)Z(x_0)^{-1} = Y_{x_0}(x), \quad Z(x) = Y_{x_0}(x)Z(x_0).$$

Beweis. Jedes z_j ist eine Loesung der Differentialgleichung $y' = Ay$. Damit gilt nach Konstruktion der Loesungsmatrix also $z_j = Y_{x_0} z_j(x_0)$ fuer jedes j . Insgesamt folgt $Z = Y_{x_0} Z(x_0)$. Da (nach dem vorigen Lemma) $Z(x)$ in jedem Punkt invertierbar ist, folgt die Behauptung. \square

Wir koennen die Betrachtungen zu Loesungsmatrix und Fundamentalsystem zusammenfassen:

THEOREM. $A : J \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$ stetig. Dann bilden die Loesungen von $y' = Ay$ einen m -dimensionalen Vektorraum. Die Basen dieses Vektorraum sind gerade die Fundamentalsysteme. Ist z_1, \dots, z_m ein beliebiges FS und $Z = (z_1, \dots, z_m)$, so ist die Loesungsmatrix gegeben durch $Y = ZZ(x_0)^{-1}$. Insbesondere ist die Loesung von $y' = Ay, y(x_0) = y_0$ gegeben durch

$$y(x) = \sum t_j z_j$$

mit $t_j = j$ -te Komponente von $Z(x_0)^{-1} y_0$.

Beweis. Bis auf die letzte Aussage ist alles schon explizit gezeigt worden. Die letzte Aussage folgt aus (dem schon bekannten)

$$y = Y_{x_0} y_0 = Z(x)Z(x_0)^{-1} y_0$$

sofort. \square

Man kann die Betrachtungen zu linearer Unabhängigkeit des Fundamentalsystem in jedem Punkt noch etwas präziser fassen. Dazu definieren wir zu Loesungen z_1, \dots, z_m von $y' = Ay$ die *Wronskideterminante* $W(z_1, \dots, z_m)(x)$ durch

$$W(z_1, \dots, z_m)(x) := \det(z_1(x), \dots, z_m(x)).$$

PROPOSITION (Zeitentwicklung der Wronskideterminante). *Seien z_1, \dots, z_m Loesungen von $y' = Ay$. Dann gilt fuer die zugehoerige Wronskideterminanten W fuer jedes $x_0 \in J$*

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^x \text{tr}(A(t))dt}.$$

Bemerkung. Nach Definition verschwindet die Wronskideterminante in einem Punkt, genau dann wenn z_1, \dots, z_m linear abhaengig sind. Nach der Proposition ist Verschwinden der Wronskideterminante in einem Punkt äquivalent zum Verschwinden in allen Punkten. Das liefert einen alternativen Beweis fuer einen Teil des vorigen Lemma.

Beweis. (Weggelassen) Es reicht $W'(x) = \text{tr}(A(x))W(x)$ in jedem $x \in J$ zu zeigen. Denn dann loesen W und die rechte Seite dieselbe Differentialgleichung. (Alternativ: dann DGL mit getrennten Variablen...) Wir zeigen das in einem festen x_0 : Sei $Z = (z_1, \dots, z_m)$. Dann gilt $Z(x) = Y_{x_0}Z(x_0)$, da beide Seiten dasselbe Anfangswertproblem loesen (siehe auch oben). Damit folgt

$$W(x) = \det Y_{x_0} W(x_0) = V(x)W(x_0)$$

mit $V(x) = \det Y_{x_0}(x)$. Es reicht also $V'(x_0) = \text{tr}A(x_0)$ zu zeigen. Wir berechnen mit $Y_{x_0} = Y = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ und $D(h) = \frac{\det Y(x+h) - \det(Y)}{h}$

$$\begin{aligned} D(h) &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^m (\det(y_1(x), \dots, y_{i-1}(x), y_i(x+h), \dots, y_m(x+h))) \\ &\quad - \det(y_1(x), \dots, y_i(x), y_{i+1}(x+h), \dots, y_m(x+h))) \\ &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^m \det(y_1(x), \dots, y_{i-1}(x), y_i(x+h) - y_i(x), y_{i+1}(x+h), \dots, y_m(x+h)) \\ &= \sum_{i=1}^m \det(y_1(x), \dots, y_{i-1}(x), \frac{y_i(x+h) - y_i(x)}{h}, y_{i+1}(x+h), \dots, y_m(x+h)) \\ &\stackrel{h \rightarrow 0}{=} \sum_{i=1}^m \det(y_1(x), \dots, y_{i-1}(x), y'_i(x), y_{i+1}(x), \dots, y_m(x)) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$V'(x_0) = \sum_{i=1}^m \det(e_1, \dots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \dots, e_m) = \sum_{i=1}^m a_{ii} = \text{tr}A.$$

Damit folgt die Behauptung. \square

FOLGERUNG. *Situation wie in voriger Proposition. Gilt $\text{tr}A(x) \equiv 0$, so ist die Wronskideterminante von jedem Fundamentalsystem konstant.*

Bemerkungen. Die Folgerung hat Anwendung in der Theorie der Sturm/Liouville Operatoren und in der Untersuchung von Erhaltung von Volumina im Phasenraum (Satz von Liouville).

3. Die inhomogene Gleichung

Um die inhomogene Gleichung zu lösen, muss man zunächst die homogene Gleichung lösen. Anschließend kann man entweder mittels einer speziellen (irgendwie gefundenen) Lösung der inhomogenen Gleichung oder mittels einer Integraldarstellung die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung berechnen.

Wir beginnen mit einer einfachen Aussage darüber, wie man bei gegebenen Fundamentalsystem und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung erhält.

THEOREM (Berechnen der allgemeinen Lösung mittels spezieller Lösung).
Seien $A : J \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$ und $b : J \rightarrow \mathbb{C}^m$ stetig. Sei z_1, \dots, z_m ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ und \tilde{y} eine spezielle Lösung von $y' = Ay + b$. Dann ist

$$y := \tilde{y} + Z(x)Z(x_0)^{-1}(y_0 - \tilde{y}(x_0))$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay + b, \quad y(x_0) = y_0.$$

Beweis. y ist Lösung des Anfangswertproblems. Das folgt durch einfaches Nachrechnen.

Eindeutigkeit der Lösung wurde schon gezeigt. \square

THEOREM (Berechnen der allgemeinen Lösung mittels Lösungsmatrix).
Seien $A : J \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$ und $b : J \rightarrow \mathbb{C}^m$ stetig und $Y = Y_{x_0}$ die Lösungsmatrix zu $x_0 \in J$. Dann ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay + b, \quad y(x_0) = y_0,$$

gegeben durch

$$y(x) = Y(x)y_0 + Y(x) \int_{x_0}^x Y(t)^{-1}b(t)dt.$$

Hierbei ist $Y(x)y_0$ die Lösung der homogenen Gleichung die die Anfangsbedingung erfüllt und $Y(x) \int_{x_0}^x Y(t)^{-1}b(t)dt$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zum Anfangswert 0.

Beweis. Es reicht, die letzte Aussage zu zeigen.

$Y(x)y_0$ ist eine Lösung der homogenen Differentialgleichung zum Anfangswert y_0 : Das ist klar (und wurde schon gezeigt).

Es ist $Y(x) \int_{x_0}^x Y(t)^{-1}b(t)dt$ Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zum Anfangswert 0: Das lässt sich sofort nachrechnen. \square

Bemerkung. Man kann diese Lösung durch Variation der Konstanten finden mittels des Ansatzes

$$y(x) = Y(x)y_0(x).$$

Dazu berechnen wir y' auf zwei Arten

$$y' = Ay + b \quad (\text{Differentialgleichung})$$

sowie

$$y' = Y' y_0 + Y y_0' = AY y_0 + Y y_0' = Ay + Y y_0'.$$

Gleichsetzen und subtrahieren von Ay liefert:

$$b = Y y_0'.$$

Damit folgt dann

$$y_0' = Y^{-1}b.$$

Integration liefert dann die gewünschte Aussage

$$y_0(x) = y_0 + \int_{x_0}^x Y(t)^{-1}b(t)dt.$$

4. Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung

In diesem Abschnitt untersuchen wir eine explizite lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung der Form

$$(*) \quad y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_{(n-1)}(x)y^{(n-1)} + b(x)$$

mit stetigen $a_j : J \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 0, \dots, n-1$ und $b : J \rightarrow \mathbb{C}$. Es ist nicht schwer zu sehen, dass $(*)$ äquivalent ist zu

$$(**) \quad \underline{y}' = A(x)\underline{y} + \underline{b}$$

mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0(x) & \dots & \dots & \dots & a_{n-2}(x) & a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = (0, \dots, 0, b(x))^t$$

und $y(x) = (y_0(x), \dots, y_{n-1}(x))^t$. Genauer gilt (vgl. Anfang des Semesters):

- y löst $(*)$ impliziert $\underline{y} = (y, y', \dots, y^{(n-1)})^t$ löst $(**)$.
- $y = (y_0, \dots, y_{n-1})$ löst $(**)$ impliziert y_0 löst $(*)$

Damit folgen aus den Betrachtungen des vorigen Abschnittes eine ganze Reihe von Aussagen fuer $(**)$. Das diskutieren wir nun. Natuerlich koennte man diese Aussagen auch direkt zeigen und das ist eine gute Uebung.

Als erstes diskutieren wir den Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

THEOREM. *Seien $a_j : J \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 0, \dots, n-1$ und $b : J \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann hat das (Anfangswertproblem)*

$$y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_{(n-1)}(x)y^{(n-1)} + b(x)$$

$$y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

genau eine Loesung.

Beweis. Das folgt sofort aus der weiter oben diskutierten eindeutigen Lösbarkeit von (**). \square

←→
Ende der Vorlesung