Sommersemester 2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 6 **Abgabe: Donnerstag 1.7.2010**

(1) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig. Betrachtet sei das AWP $y' = f(x, y)$ mit $y(x_0) = y_0$. Zeigen Sie, dass sich jede Lösung zu einer maximalen Lösung fortsetzen lässt.

(2) Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(y) = y \cdot (e^{-\|y\|^2} - \frac{1}{2})$, wobei $y = (y_1, y_2, y_3)$. Betrachten Sie das AWP

$$y' = f(y), \qquad \text{mit } y(0) = (0, 0, 0).$$

a.) Warum gibt es eine eindeutige Lösung?

b.) Bestimmen Sie das maximale Lösungsintervall.

(3) Sei $f : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ stetig mit $f(x) \le \alpha + \beta \int_a^x f(t)dt$. Zeigen Sie durch Iteration der Ungleichung, dass $f(x) \le \alpha e^{\beta x}$.

(4) Nutzen Sie das Picard-Lindelöf Verfahren, um das Anfangswertproblem

$$y^{'} = Ay, \qquad y(0) = y_0$$

zu lösen, wobei A eine gegebene $m \times m$ Matrix ist.

Zusatzaufgaben:

1. Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ stetig mit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen. Sei $K \subset \Omega$ kompakt. Sei $\varphi : [x_0, b) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Lösung des AWP $y^{'} = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$, die das Kompaktum $K \subset \Omega$ nicht verlässt. Zeigen Sie, dass dann $\lim_{x\to b} \varphi(x)$ existiert.

2. Betrachtet Sei das folgende AWP:
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^{'} = \begin{pmatrix} 1/(1+y_1^2+y_2^2) - \frac{1}{2} \\ 1 - \arctan(y_1^2+y_2^2) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   a.) Zeigen Sie, dass das AWP eindeutig lösbar ist.
   b.) Zeigen Sie, dass sich die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen läßt.

3. Sie $I := [a,b] \subset \mathbb{R}$, mit $a < b$. Sei $\beta : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Gelte
$$u'(x) \leq \beta(x)u(x), \qquad \text{für } x \in I.$$
   Zeigen Sie: u ist nach oben durch die Lösung der DGL $y' = \beta y$ beschränkt.

4. Bestimmen Sie die Lösung von
$$y^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y$$
   zu den Anfangswerten $x_0 = 0,\ y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mithilfe des Picardschen Iterationsverfahrens.