Wintersemester 2015/16 **Prof. Dr. D. Lenz**

Höhere Analysis II

Blatt 3 **Zur Besprechung in der Übung am 17.11.2015**

(1) Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$. Zeigen Sie, dass T genau dann normal ist, wenn $T^*T = TT^*$ gilt.

Erinnerung: Ein dicht definierter Operator T auf H heißt normal, falls $D(T) = D(T^*)$ und $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in D(T)$ gilt.

(2) Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ normal. Zeigen Sie, dass $r(T) = \|T\|$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\|(T^*T)^{2^n}\| = \|T\|^{2^{n+1}}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(3) Der Operator T auf $E = C([0,1])$ sei gegeben durch

$$D(T) = \{f \in E \mid \text{es ex. } g \in E\colon f(t) = \int_0^t g(s)\,ds\},\ Tf = f'.$$

Zeigen Sie, dass $\sigma(T) = \emptyset$ gilt.

(4) Für $k \in L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ sei

$$K\colon L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n),\ Kf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)f(y)\,dy.$$

(a) Zeigen Sie, dass K ein beschränkter linearer Operator ist.

(b) Berechnen Sie K^*.