Analysis I

Wintersemester 2010/2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 3 **Abgabe 11.11.2010**

(1) ('Kurze Induktion' impliziert 'Lange Induktion') Es genüge (N, e, ν) den Peano Axiomen. Seien A_n, $n \in N$, die eindeutigen Teilmengen von N mit $A_e = \{e\}$ und $A_{\nu(n)} = A_n \cup \{\nu(n)\}$ für alle $n \in N$. Seien weiterhin Aussagen $A(n)$, $n \in N$, gegeben. Zeigen Sie, dass $A(n)$ für alle $n \in N$ wahr ist, falls folgendes gilt:

- $A(e)$ ist wahr.
- Gilt fuer ein $m \in N$ die Aussage $A(k)$ für alle $k \in A_m$, so folgt die Gültigkeit von $A(\nu(m))$.

(2) (Wohlordnung und Induktionsaxiom) Sei eine Menge B gegeben mit einem ausgezeichneten Element e und einer bijektiven Abbildung

$$\nu : B \longrightarrow B \setminus \{e\}$$

und einer Totalordnung $<$ mit

$$n < \nu(n) \text{ für alle } n \in B.$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) $(B, <)$ ist wohlgeordnet (d.h. jede nichtleere Teilmenge von $(B, <)$ besitzt ein bzgl. $<$ kleinstes Element).

(ii) Es erfüllt (B, e, ν) das zweite Peano Axiom.

(Hinweis zu (ii) $\Longrightarrow$ (i): Seien A_n die eindeutigen Teilmengen von N mit $A_e = \{e\}$ und $A_{\nu(n)} = A_n \cup \{\nu(n)\}$ für alle $n \in N$. Dann ist die Menge $A_n \cup \{l : n < l\}$ induktiv (Warum?), stimmt also mit N überein. Damit ist also (Warum?) $\nu(n)$ ein kleinstes Element des Komplements von A_n. Zeigen Sie nun, dass eine Teilmenge von B ohne kleinstes Element im Komplement aller A_n liegt.)

b.w.

(3) Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und es werde das Inverse bzgl. Addition von $x \in K$ mit $-x$ bezeichnet. Beweisen Sie

$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y.$$

Geben Sie bei jedem Schritt an, welches Körperaxiom sie verwenden.

(4) Finden Sie eine Addition und eine Multiplikation auf $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$, so dass $\mathbb{F}_3$ ein Körper wird. Kann man $\mathbb{F}_3$ anordnen?

Zusatzaufgabe: (Rekursive Definition von Mengen) Es genüge (N, e, ν) den Peano Axiomen. Es sei zu jedem $n \in N$ gegeben eine Menge X_n und eine Abbildung F_n, die Teilmengen von X_n auf Teilmengen von $X_{\nu(n)}$ abbildet. Sei $S_e \subseteq X_e$ gegeben. Zeigen Sie:

Es gibt eine eindeutige Familie von Mengen T_n, $n \in N$, mit $T_e = S_e$ und $T_{\nu(n)} = F_n(T_n)$ für alle $n \in N$.