Analysis I - Notizen[1]

Daniel Lenz

Jena - Wintersemester 2016

[1] Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung, sondern lediglich um Notizen. Besten Dank an alle, die zu Verbesserungen früherer Notizen zur Analysis I beigetragen haben, und besonderen Dank an Daniel Kilian, Stefan Neumann und Frank Nußbaum für systematisches Durcharbeiten und Verschönern

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung: Zwei kleine Rechnungen

Eine Rechnung

Der Kurs wird mit 9 Leistungspunkten (LP) gewertet. Jeder Leistungspunkt entspricht 30h Arbeit. Damit geht es um

$$270h \text{ Arbeit}$$

Davon gehen ab:

$$-90h \quad \text{(6 h Vorlesung und Übung in 15 Wochen)}$$

$$-80h \quad \text{(2 Wochen Prüfungsvorbereitung à 40 h).}$$

Damit verbleiben noch 100 h Arbeit. Auf 15 Wochen verteilt bedeutet dies ca.

7 h Arbeit/ Woche

also

1 h Arbeit / Tag.

Eine andere Rechnung

Der Stoff der ersten drei Semester wurde beginnend mit Newton und Leibniz um 1670 bis etwa 1920 entwickelt. Es handelt sich also um

250 Jahre Entwicklung.

Bei 45 Wochen für die ersten drei Semester, wird also in einer Woche Vorlesung etwa

5 Jahre Entwicklung $\sim$ 260 Wochen

behandelt.

Folgerung

Es muss gearbeitet werden![1]

[1] Noch ein **Tipp**: Sprechen Sie mit ihren Banknachbarn und haben Sie Geduld.

Grundlagen

Wir setzen Grundtatsachen der Mengenlehre voraus[2] und erinnern in diesem Kapitel lediglich an einige Begriffe und Bezeichnungen.

1. Mengen

Ist X eine Menge, so schreiben wir $x \in X$ (lies: 'x Element von X') falls x zu X gehört. Gehört x nicht zu X, so schreibt man $x \notin X$ (lies: 'x nicht Element von X oder x nicht in X'). Seien X und Y Mengen. Dann bedeutet $Y \subset X$ (lies: Y Teilmenge von X), daß jedes Element von Y auch zu X gehört. Die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X ist die Menge aller Teilmengen von X. Dazu gehört immer auch die *leere Menge*, die mit $\emptyset$ bezeichnet wird.
Es bezeichnet $X \setminus Y$ (lies: 'X ohne Y' oder 'X minus Y') die Menge der Elemente von X, die nicht zu Y gehören. Diese Menge wird auch als *Komplement* von Y (in X) bezeichnet. Man schreibt dann, wenn klar ist, um welches X es sich handelt, auch einfach Y^c (lies: 'Komplement von Y').
Der *Durchschnitt* $X \cap Y$ der Mengen X und Y ist die Menge der Element, die sowohl zu X als auch zu Y gehoeren. Er ist also gegeben durch

$$X \cap Y := \{z : z \in X \;\text{ und }\; z \in Y\}.$$

Hier steht := fuer 'wird definiert durch' und die rechte Seite liest sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\{\cdots\} &: \text{ 'die Menge'} \\
z &: \text{ 'der z' oder 'aller z'} \\
: &: \text{ 'mit der Eigenschaft' oder 'sodass gilt'} \\
z \in X &: \text{ 'z gehoert zu X'} \\
\text{und} &: \text{ 'und'} \\
z \in Y &: \text{ 'z gehoert zu Y'.}
\end{aligned}$$

Die *Vereinigung* der Mengen X und Y ist gegeben durch die Menge aller Elemente die zu X oder zu Y gehoeren. Sie ist also gegeben durch

$$X \cup Y := \{z : z \in X \text{ oder } z \in Y\}.$$

[2] Die Entwicklung der entsprechenden Grundlagen würde mindestens ein Semester in Anspruch nehmen

(Wieder steht hier := fuer 'wird definiert durch' und die rechte Seite liest sich wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} \{\cdots\} & : & \text{'die Menge'} \\ z & : & \text{'der z' oder 'aller z'} \\ : & : & \text{'mit der Eigenschaft' oder 'sodass gilt'} \\ z \in X & : & \text{'z gehoert zu X'} \\ \text{oder} & : & \text{'oder'} \\ z \in Y & : & \text{'z gehoert zu Y'.} \end{array}$$

Ist A eine Menge und zu jedem $\alpha \in A$ eine Menge X_α gegeben, so nennt man X_α, $\alpha \in A$, eine *Familie von Mengen*. Für eine Familie X_α, $\alpha \in A$, von Mengen definiert man

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha := \{z : \text{z gehört zu (mindestens) einer der Mengen } X_\alpha\}$$

sowie

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha := \{z : \text{z gehört zu allen Mengen } X_\alpha\}.$$

Ist X_α, $\alpha \in A$, eine Familie von Mengen und X eine Menge, so gilt (siehe Übung)

$$X \setminus \bigcup_\alpha X_\alpha = \bigcap_\alpha (X \setminus X_\alpha)$$

$$X \setminus \bigcap_\alpha X\alpha = \bigcup_\alpha (X \setminus X_\alpha).$$

Aus zwei Objekten a, b bilden wir das *geordnete Paar* (a, b). Damit können wir aus zwei Mengen X, Y das *kartesische Produkt*

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

bilden.

2. Funktionen

Eine *Abbildung* oder *Funktion* von einer Menge X in die Menge Y ist eine Zuordnung, die jedem Element von X genau ein Element von Y zuordnet[3]. Wird die Abbildung f genannt, so bezeichnen wir dann das Element, das $x \in X$ durch f zugeordnet wird mit $f(x)$ und schreiben

$$f : X \longrightarrow Y \text{ oder } X \longrightarrow Y, x \mapsto f(x).$$

Es heißt dann X der *Definitionsbereich* von f, Y der *Wertebereich* von f und $Bild(f) := \{f(x) : x \in X\} \subset Y$ das *Bild* von f. Ist $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion und $A \subset Y$, so heißt

$$f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$$

[3]Hier sind X und Y beliebige Mengen. Insbesondere wird **nicht** voraussgesetzt, dass X oder Y Mengen von 'Zahlen' sind.

das *Urbild* von A unter f[4].

Beispiel - Adresse. Sie X die Menge der Einwohner von Jena und Y die Menge der Strassen in Jena. Dann koennen wir $f : X \longrightarrow Y$ als die Funktion definieren, die jedem Einwohner die Strasse zuordnet, in der der Einwohner wohnt.
Gehoert eine Strasse $y \in Y$ zu einem Industriegebiet, so wohnt dort niemand und es gibt keinen Einwohner $x \in X$ mit $f(x) = y$. Wohnt in einer Strasse $y \in Y$ mehr als eine Person, so gibt es also x und x^* in X mit $x \neq x^*$ und $f(x) = y = f(x^*)$.

Eine besonders wichtige und schoene Funktion lernen wir in folgendem Beispiel kennen.

Beispiel - die Identitaet. Sei X eine beliebige Menge. Dann ist $id_X : X \longrightarrow X$ die Abbildung, die $x \in X$ auf $x \in X$ abbildet. Ist etwa X die Menge der Symbole im Kartenspiel, also $X = \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$, so gilt also

$$\begin{array}{rcl} id_X(\clubsuit) & = & \clubsuit \\ id_X(\spadesuit) & = & \spadesuit \\ id_X(\heartsuit) & = & \heartsuit \\ id_X(\diamondsuit) & = & \diamondsuit. \end{array}$$

Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt *surjektiv*, wenn zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $y = f(x)$ (d.h. $Bild(f) = Y$).
Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt *injektiv*, wenn aus $x \neq z$ folgt $f(x) \neq f(z)$.
Ist $f : X \longrightarrow Y$ injektiv und surjektiv, so heißt es *bijektiv*.

Beispiel - Adresse (Fortsetzung) Gibt es ein Industriegebiet, so ist die Funktion f nicht surjektiv. Wohnt in einer Strasse mehr als eine Person, so ist die Funktion nicht injektiv.

Beispiel - Identitaet (Fortsetzung) Offenbar ist die Identitaet auf einer Menge eine bijektive Funktion. Tatsaechlich sind (s.u.) bijektive Funktionen ganz aehnlich zur Identitaet.

Die *Komposition* $g \circ f$ der Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ ist gegeben durch

$$g \circ f : X \longrightarrow Z, x \mapsto g(f(x)).$$

Komposition ist assoziativ d.h. es gilt

$$g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h.$$

(Denn $g \circ (f \circ h)(x) = g((f \circ h)(x)) = g(((f(h(x)))) = (g \circ f)(h(x)) = (g \circ f) \circ h(x)$.) Damit können wir also die Klammern weglassen.

[4]Naturlich koennte die Abbildung auch anders als f genannt werden, etwa g, h, ϕ, Ψ, A, α, $*$, z, Q,....

Nach diesen Vorbereitungen koennen wir jetzt eine Aussage treffen, die zeigt, inwiefern bijektive Funktionen aehnlich zur Identitaet sind.

Ende der Vorlesung

Behauptung. Sei $f : X \longrightarrow Y$ gegeben. Dann sind äquivalent:

(i) f bijektiv.

(ii) Es gibt ein $g : Y \longrightarrow X$ mit $f \circ g = id_Y$ und $g \circ f = id_X$.

In diesem Fall, ist die Funktion g aus (ii) eindeutig bestimmt. Beweis. (Übung)

Die Funktion g wird *Umkehrfunktion* von f genannt und (oft) mit f^{-1} bezeichnet.
Schließlich brauchen wir manchmal noch Einschränkungen von Funktionen: Sei $f : X \longrightarrow Y$ gegeben und A eine Teilmenge von X. Dann bezeichnen wir mit f_A oder $f|_A$ die *Einschränkung* von f auf A gegeben durch

$$f|_A : A \longrightarrow Y, x \mapsto f(x).$$

3. Relationen

Eine *Relation* auf eine Menge X ist eine Teilmenge R von $X \times X$. Statt $(x, y) \in R$ schreibt man oft auch $x \overset{R}{\sim} y$ oder $x \sim y$.
Eine Relation auf X heißt

- *reflexiv*, wenn gilt: $x \sim x$ für alle $x \in X$, (Zeichnung)
- *symmetrisch*, wenn gilt: $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$, (Zeichnung)
- *transitiv*, wenn gilt: $x \sim y$ und $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$. (Zeichnung in Übung)

Eine *Äquivalenzrelation* ist eine reflexive, symmetrische, transitive Relation.

Beispiel. Sei X die Menge aller wahlberechtigten Buerger der Bundesrepublik und

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x, y) : \text{x und y haben am selben Tag Geburtstag}\} \\ R_2 &= \{(x, y) : \text{x und y kennen sich}\} \\ R_3 &= \{(x, y) : \text{x hat schon von y gehoert}\}. \end{aligned}$$

Dann ist R_1 eine Aequivalenzrelation. Es ist R_2 reflexiv und symmetrisch aber nicht transitiv. Es ist R_3 reflexiv.

Eine *Ordnungsrelation* oder *Ordnung* auf einer Menge X ist eine Relation $\leq$, die reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. Dabei heißt antisymmetrisch, daß

$$x \leq y \text{ und } y \leq x \Longrightarrow x = y.$$

Ist $\leq$ eine Ordnungsrelation auf X, so heißt das Paar $(X, \leq)$ eine *geordnete Menge*. Eine geordnete Menge heißt *total geordnet*, wenn für alle $x, y \in X$ immer $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt.

'Beispiele'. $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$

4. Verknüpfungen

Eine Abbildung $* : X \times X \longrightarrow X$ heißt *Verknüpfung* auf X. Man schreibt oft $x * y$ statt $*(x, y)$. Die Verknüpfung $* : X \times X \longrightarrow X$ heißt

- kommutativ, wenn gilt $x * y = y * x$ für alle $x, y \in X$
- assoziativ, wenn gilt $x * (x * z) = (x * y) * z$ für alle $x, y, z \in X$.

Ist die Verknüpfung assoziativ, so kann man die Klammern auch weglassen.

KAPITEL 1

Die natürlichen Zahlen

In diesem Kapitel beginnt der eigentliche Stoff der Vorlesung. Dabei geben wir eine axiomatischen Zugang zu den natuerlichen Zahlen. Hier bezeichnet *Axiom* eine Grundvoraussetzung oder eine Grundannahme. Ein axiomatischer Zugang entwickelt dann eine Theorie ausgehend von den Axiomen. **Dabei werden dann ausschliesslich die in den Axiomen bereitgestellten Eigenschaften verwendet werden.** Um das deutlich zu machen, werden wir in jedem Schritt angeben, welches Axiom angewendet wird.
Wir führen das in diesem Kapitel anhand der (wahrscheinlich schon aus der Schule bekannten) natürlichen Zahlen durch. Im Ergebnis werden wir die Theorie der natürlichen Zahlen aus den Peano Axiomen hergleitet haben. Insbesondere werden wir Abbildungen wie Addition und Multiplikation und die Relation $\leq$ einführen und ihre grundlegenden Eigenschaften beweisen[1].
Der gewaehlte Zugang liefert noch das Prinzip der vollständigen Induktion und die Möglichkeit der rekursiven Definition. Das werden wir genauer studieren.

1. Die Peano Axiome

Die charakteristische Struktur der natürlichen Zahlen ist folgende:

Zeichnung. $1 -\overset{+1}{-}- > 2 -\overset{+1}{-}- > 3 -\overset{+1}{-}- > 4 -\overset{+1}{-}- > \ldots$.

Das Problem sind die Punkte $'\ldots'$! An der Zeichnung lesen wir ab:

- Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger und verschiedene Zahlen haben verschiedene Nachfolger.
- Beginnt man bei 1 und bildet sukzessive die Nachfolger, so erhält man alle natürlichen Zahlen.
- Die Zahl 1 ist keine Nachfolger.

Eine präzise Fassung dieser Eigenschaften liefern die **Peano Axiome**.

Definition (Peano Axiome). *Ein Tripel (N, e, ν) bestehend aus einer Menge N zusammen mit einem ausgezeichneten Element e und einer Abbildung $\nu : N \longrightarrow N \setminus \{e\}$ genügt den Peanoaximonen, wenn gilt:*

[1]Es ist eine gute Uebung, sich bei den weiteren Ueberlegungen in jedem Schritt klar zu machen, wie die 'offensichtlichen' oder 'klaren' Eigenschaften der natuerlichen Zahlen axiomatisch gefasst und hergeleitet werden.

(P1) $\nu : N \longrightarrow N \setminus \{e\}$ *ist injektiv.*
(P2) *(Induktionsaxiom) Enthält eine Teilmenge M von N das Element e und enthält sie mit jedem Element n immer auch $\nu(n)$, so gilt $M = N$.*

Es heißt ν die Nachfolgeabbildung und $\nu(n)$ der Nachfolger von n.

Notation. Eine Teilmenge M von N mit $e \in M$ und $\nu(n) \in M$ für alle $n \in M$ wird auch *induktiv* genannt. (Damit besagt dann also (P2), dass jede induktive Menge mit N uebereinstimmt.)

Bemerkung. (a) Hinter $(P1)$ verbergen sich mehrere Forderungen, insbesondere folgende:

- ν bildet von N nach $N \setminus \{e\}$ ab.
- ν ist injektiv.
- Es ist e kein Nachfolger.

Diese Forderungen zusammen mit $(P2)$ werden liefern, daß

- $\nu : N \longrightarrow N \setminus \{e\}$ sogar bijektiv ist (s.u.).

Die vorangegangen vier Spiegelstriche werden manchmal als eigene Axiome aufgelistet.
(b) Das Induktionsaxiom liefert eine Art mit $' \ldots '$ umzugehen.
(c) In den Peano Axiomen ist die Forderung, daß e kein Nachfolger ist, wesentlich. Sie garantiert, daß die Menge (in einem noch zu praezisierendne Sinne) unendlich viele Elemente hat. Man kann eine endliche Menge N angeben mit ausgezeichnetem Element e und einer injektiven Abbildung $\nu : N \longrightarrow N$, so daß $(P2)$ gilt (Übung).

Wir gehen nun wie folgt vor: Die Peano Axiome charakterisieren die natürlichen Zahlen in folgendem Sinne: Man kann beweisen, daß es ein System gibt, daß diesen Axiomen genügt (wenn man Existenz einer unendlichen Menge voraussetzt), und daß ein solches System eindeutig bestimmt ist (bis auf Umbennenung). Dieses System werden wir später mit $\mathbb{N}$ bezeichnen. Wir werden die Eindeutigkeit eines solchen Systemes bald beweisen und auf diesem System eine Adddition einfuehren. Dann wird die Nachfolgeabbildung gerade die Addition von 1 sein. Damit ist dann N gerade das System $\mathbb{N}$ und e ist die 1 und ν entspricht der Addition von 1.

Folgerung. *Es genüge (N, e, ν) den Peano Axiomen. Dann ist die Abbildung $\nu : N \longrightarrow N \setminus \{e\}$ bijektiv (d.h. e ist kein Nachfolger und jedes andere Element von $\mathbb{N}$ ist ein Nachfolger) und es gilt $\nu(n) \neq n$ für alle $n \in N$.*

Beweis. Bijektivität. Es reicht zu zeigen, daß ν surjektiv ist.
Sei

$$M := \{e\} \cup \{n \in N : n \text{ ist ein Nachfolger d.h. es existiert } m \in N \text{ mit } \nu(m) = n\}.$$

Dann gilt also:

$e \in M$.
$n \in M$ impliziert $\nu(n) \in M$ (da jeder Nachfolger in M ist).

Aus (P2) folgt also $M = N$.

Ende der Vorlesung

Es gilt $\nu(n) \neq n$ für alle $n \in N$: Sei T die Menge der $n \in N$ mit $\nu(n) \neq n$. Dann gilt $e \in T$ (klar) und aufgrund der Injektivität von ν gilt auch, dass $n \in T$ impliziert $\nu(n) \in T$. Damit ist T induktiv. $\square$

Wir kommen nun zu einer wesentliche Konsequenzen aus den Peanoaxiomen. Diese ist das Prinzip der vollständigen Induktion.

Prinzip der vollständigen Induktion. Sei (N, e, ν) induktiv. Sei für jedes $n \in N$ eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ gegeben, sodaß gilt:

- $\mathcal{A}(e)$ ist wahr. (Induktionsanfang)
- Aus $\mathcal{A}(n)$ folgt $\mathcal{A}(\nu(n))$. (Induktionsschluss)

Dann ist $\mathcal{A}(n)$ wahr für alle $n \in N$.

Beweis. Sei T die Menge der $n \in N$, so daß $\mathcal{A}(n)$ wahr ist. Dann folgt aus der Voraussetzung, daß T induktiv ist. Damit folgt aus dem zweiten Peanoaxiom dann $T = N$. Das ist gerade die Aussage. $\square$

Notation. Statt '$A(e)$ wahr' und 'Aus $A(n)$ folgt $A(\nu(n))$' schreibt man meist '$n = 1$' und '$n \Longrightarrow n + 1$'.

'Beispiel.' Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen $S_n := \sum_{k=1}^{n} k$ ist gerade $n(n + 1)/2$.
Bew. $n = 1$: klar
$n \Longrightarrow n+1$: $S_{n+1} = (n+1)+S_n = (n+1)+(n+1)n\frac{1}{2} = (n+1)(1+n\frac{1}{2}) = (n + 1)(2 + n)\frac{1}{2}$.

2. Die Zahlen von Eins bis n

Eine weitere wesentliche Konsequenz der Peano Axiome ist die Möglichkeit der rekursiven Definition. (Beispiel $n!$). Um das auszuführen, bedarf es einiger Vorbereitungen. Dabei werden wir einige Folgerungen aus den Peano Axiomen ziehen, die auch schon für sich von Interesse sind. Insbesondere werden wir eine Ordnungsstruktur erhalten. Als ersten Schritt dieser Ordnungstruktur untersuchen wir die Teilmengen, die wir spaeter als die Menge der Zahlen groesser als eine gegebene interpretieren koennen.

FOLGERUNG (Menge der Zahlen, die größer als n sind). *Es genüge (N, e, ν) den Peanoaxiomen. Dann gibt es zu jedem $n \in N$ eine eindeutige Menge $M_n \subset N$ mit*

(α) $n \notin M_n$
(β) $\nu(n) \in M_n$
(γ) *Gehoert k zu M_n so auch $\nu(k)$.*

Die Mengen M_n *erfüllen* $M_e = N \setminus \{e\}$ *und* $M_{\nu(n)} = M_n \setminus \{\nu(n)\}$ *für alle* $n \in N$.

Beweis. Wir zeigen zunächst Existenz und Eindeutigkeit von Mengen M_n mit den angegebenen Eigenschaften $(\alpha), (\beta), (\gamma)$. Sei T die Menge der Elemente $n \in N$ für die eine eindeutige Menge M_n mit den genannten drei Eigenschaften existiert. Wir zeigen, daß T induktiv ist.

Es gilt $e \in T$**:**

Existenz: Die Menge $M_e := N \setminus \{e\}$ hat die gewünschten Eigenschaften:

- $e \notin N \setminus \{e\}$: klar.
- $\nu(e) \in N \setminus \{e\}$: klar (da $\nu : N \longrightarrow N \setminus \{e\}$).
- $n \in N \setminus \{e\} \Longrightarrow \nu(n) \in M_e$: klar (da $\nu : N \longrightarrow N \setminus \{e\}$)

Eindeutigkeit: Ist $M_e^{'}$ eine Menge mit den gewünschten Eigenschaften, so betrachten wir $M := \{e\} \cup M_e^{'}$. Dann gilt $e \in M$ und $n \in M$ impliziert $\nu(n) \in M$ (für $n = e$ wegen (β) und für $n \neq e$ wegen (γ)). Damit folgt also nach dem Induktionsaxiom $M = N$ und damit

$$M_e^{'} = M \setminus \{e\} = N \setminus \{e\}.$$

(Hier nutzen wir $e \notin M_e^{'}$ nach (α).) Das zeigt die Eindeutgkeit.

$n \in T$ **impliziert** $\nu(n) \in T$**:**

Setze $m := \nu(n)$. Wir werden im folgenden aus der Gueltigkeit der Eigenschaften $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ fuer n die Gueltigkeit fuer $\nu(n) = m$ herleiten. Um besser zwischen Voraussetzung und Schluss zu unterscheiden, schreiben wir dann an entsprechenden Stellen $(\alpha)_n$ bzw. $(\alpha)_m$ und entsprechend fuer (β) und (γ).

Existenz: Wir betrachten die Menge $M_n \setminus \{m\}$. Diese Menge hat die gewünschten Eigenschaften:

- $m \notin M_n \setminus \{m\}$: klar .
- $\nu(m) \in M_n \setminus \{m\}$: $m = \nu(n) \in M_n$ wegen $(\beta)_n$, also $\nu(m) \in M_n$ wegen (γ) angewendet auf M_n. Weiterhin $\nu(m) \neq m$ (s.o.).
- $l \in M_n \setminus \{m\} \Longrightarrow \nu(l) \in M_n \setminus \{m\}$: $l \in M_n$ impliziert $\nu(l) \in M_n$. Weiterhin $\nu(l) \neq m = \nu(n)$, sonst $n = l$ Widerspruch zu $n \notin M_n$.)

Eindeutigkeit: Ist $M_m^{'}$ eine Menge mit den gewünschten Eigenschaften, so erfüllt $\{m\} \cup M_m^{'}$ die charakteristischen Eigenschaften der Menge M_n:

- $n \notin \{m\} \cup M_m^{'}$: $n \neq m = \nu(n)$ (s.o.) und $n \notin M_m^{'}$ (da sonst $m = \nu(n) \in M_m^{'}$. Widerspruch zu $(\beta)_m$.
- $\nu(n) \in \{m\} \cup M_m^{'}$: klar (da $m = \nu(n)$).
- $l \in \{m\} \cup M_m^{'}$ impliziert $\nu(l) \in \{m\} \cup M_m^{'}$: Für $l = m$ wegen $(\beta)_m$ und für $l \in M_m^{'}$ wegen $(\gamma)_m$.

Aufgrund der schon bewiesenen Eindeutigkeit gilt dann $\{m\} \cup M_m^{'} = M_n$ und damit also $M_m^{'} = M_n \setminus \{m\}$. Das zeigt die Eindeutigkeit.

Die letzte Aussage wurde mitbewiesen. □

Ende der Vorlesung

Wie die vorangehende Aussage zeigt, haben die Mengen M_n die Eigenschaft, dass sie mit jedem Element k auch immer den Nachfolger $\nu(k)$ enthalten. Insbesondere gilt also auch, dass l nicht in M_n ist, wenn $\nu(l)$ nicht in M_n ist. Daher ist es besonders interessant, diejenigen Elemete k rauszufinden, so dass $k \notin M_n$ aber $\nu(k) \in M_n$ gilt. Aufgrung von (α) und $(\beta$ ist offenbar n ein solches Element. Es stellt sich heraus, dass es sogar das einzige solche Element ist.

Proposition (Rolle von n in M_n). *Es genuege (N, e, ν) den Peanoaximonen und es seien M_n wie in in der vorangehenden Folgerung gegeben. Ist $n \in N$ gegeben und gilt fuer $k \in N$ sowohl $k \notin M_n$ als auch $\nu(k) \in M_n$, so folgt $k = n$.*

Beweis. Seit T die Menge der $n \in N$ fuer die die Aussage gilt (d.h. die Menge der $n \in N$ fuer die aus $k \notin M_n$ und $\nu(k) \in M_n$ folgt $k = n$). Wir zeigen, dass T induktiv ist.

Es gilt $e \in T$: Es gilt $M_e = N \setminus \{e\}$. Damit folgt die gewuenschte Aussage sofort.

Aus $n \in T$ folgt $\nu(n) \in T$: Sei $k \in N$ mit $k \notin M_{\nu(n)}$ und $\nu(k) \in M_{\nu(n)}$ gegeben. (Zu zeigen $k = \nu(n)$.)

Aufgrund von $\nu(k) \in M_{\nu(n)} = M_n \setminus \{\nu(n)\}$ folgt $\nu(k) \in M_n$ und $\nu(k) \neq \nu(n)$. Aus letzterer Eigenschaft und der Injektivitaet von ν folgt $k \neq n$. Damit koennen wir insgesamt schliessen

$$k \in M_n.$$

(Anderfalls wuerde gelten $k \notin M_n$ und $\nu(k) \in M_n$ und das wuerde wegen $n \in T$ implizieren $k = n$. Widerspruch zu $k \neq n$.) Weiterhin gilt nach Voraussetzung

$$k \notin M_{\nu(n)} = M_n \setminus \{\nu(n)\}.$$

Vergleich der letzten beiden abgesetzten Aussagen fuer$k$ liefert dann $k = \nu(n)$. □

Als naechstes koennen wir nun gewisse Inklusionen (Enthaltensein) zwischen den verschiedenen M_k zeigen.

Proposition (Inklusionen der M_n). *Es genuege (N, e, ν) den Peanoaximonen und es seien die M_n wie oben definiert. Dann gilt fuer $k, n \in N$*

- *$M_n \subset M_k$ falls $n \in M_k$;*
- *$M_k \subset M_n$ falls $n \notin M_k$.*

Beweis. Bevor wir zum eigentlich Beweis kommen, machen wir uns rasch klar, dass keines der M_n das Element e enthaelt. In der Tat sieht man leicht, dass die Menge der $n \in N$ fuer die M_n nicht e enthaelt induktiv ist.

Zur ersten Aussage: Sei T die Menge der $n \in N$ fuer die die erste Aussage gilt. Dann ist T induktiv:

Es gilt $e \in T$: Es enthaelt keines des M_n das Element e. Damit die Implikation $M_e \subset M_k$ falls $e \in M_k$ auf jeden Fall richtig.

Es gilt $\nu(n) \in T$ falls $n \in T$: Sei $\nu(n) \in M_k$. Wir unterscheiden zwei Faelle:
Fall 1 - $n \in M_k$: Dann gilt wegen $n \in T$ also $M_n \subset M_k$ und damit folgt dann

$$M_{\nu(n)} = M_n \setminus \{\nu(n)\} \subset M_k.$$

Fall 2 - $n \notin M_k$. Dann gilt also $\nu(n) \in M_k$ und $n \notin M_k$. Damit folgt nach der vorigen Proposition dann $n = k$. Das liefert

$$M_{\nu(n)} = M_{\nu(k)} \subset M_k.$$

In beiden Faellen gilt die gewuenschte Inklusion.

Zur zweiten Aussage: Sei T die Menge der $n \in N$ fuer die die zweite Aussage gilt. Dann ist T induktiv (und damit folgt dann $T = N$ und das ist gerade die zweite Aussage):

Es gilt $e \in T$: Es enthaelt keines des M_n das Element e. Damit ist die Implikation '$M_k \subset M_e = N \setminus \{e\}$, falls $e \notin M_k$' auf jeden Fall richtig.

Es gilt $\nu(n) \in T$ falls $n \in T$: Sei $\nu(n) \notin M_k$. Dann gilt also $n \notin M_k$ (nach (γ)). Damit folgt aus $n \in T$ dann $M_k \subset M_n$. Daraus folgt - aufgrund von $\nu(n) \notin M_k$ dann sofort

$$M_k \subset M_n \setminus \{\nu(n)\} = M_{\nu(n)}.$$

Das ist die gewuenschte Aussage. □

Folgerung (Menge der Zahlen, die kleiner gleich n sind). *Es genüge (N, e, ν) den Peanoaxiomen. Dann gibt es eine eindeutige Familie von Mengen $A_n \subset N$, $n \in N$, mit*

$$A_e = \{e\} \ \textit{und} \ A_{\nu(n)} = A_n \cup \{\nu(n)\}.$$

Es gilt $n \in A_n$ sowie $\nu(n) \notin A_n$ für alle $n \in N$. Weiterhin gilt für beliebige $k, n \in N$ noch $A_k \subset A_n$ falls $k \in A_n$ und $A_n \subset A_k$ falls $k \notin A_n$.

Beweis. Wir zeigen zunächst Existenz und Eindeutigkeit solcher A_n:

Existenz. Seien M_n, $n \in N$, die Mengen aus der vorangehenden Folgerung. Nach der vorangegangenen Folgerung gilt $M_e = N \setminus \{e\}$ und $M_{\nu(n)} = M_n \setminus \{\nu(n)\}$. Dann erfüllen die Mengen $A_n := N \setminus M_n$

$$A_e = \{e\}, \ \text{sowie} \ A_{\nu(n)} = A_n \cup \{\nu(n)\}$$

für alle $n \in N$.

Eindeutigkeit. Sei (A_n'), $n \in N$, eine Familie von Teilmengen von N mit $A_e' = \{e\}$ und $A_{\nu(n)}' = A_n' \cup \{\nu(n)\}$. Sei $L := \{n \in N : A_n = A_n'\}$. Dann sieht man sofort, daß L induktiv ist, und es folgt die Eindeutigkeit.

Die Aussagen $n \in A_n$ und $\nu(n) \notin A_n$ folgen durch Komplementbildung für alle $n \in N$ aus entsprechenden Aussagen fuer die M_n. Ebenso folgen die Aussagen zu den Inklusionen der A_n durch Komplementbildung aus den entsprechendne Aussagen fuer die M_n. Damit ist die Folgerung bewiesen. $\square$

Aus den voran

$$x \leq y :\Longleftrightarrow A_x \subset A_y$$

eine Ordnungrelation auf N definiert und sogar eine Totalordnung. Bezüglich dieser Ordnungsrelation gilt dann

$$A_n = \{x \in \mathbb{N} : x \leq n\} \text{ und } M_n = \{x \in \mathbb{N} : x > n\}.$$

Bezüglich dieser Ordnungsrelation ist N wohlgeordnet, d.h. es gilt, daß jede nichtleere Teilmenge von N ein kleinstes Element besitzt. (Hinweis zur Wohlgeordnetheit: Angenommen: M ist eine nichtleere Teilmenge von N, die kein kleinstes Element besitzt. Zeige dann durch Induktion, daß jedes A_n im Komplement von M liegt. Damit stimmt dieses Komplement mit N überein und M ist die leere Menge.)

3. Rekursive Definition

Wir kommen nun zur rekursiven Definition. Dabei geht es - anschaulich gesprochen - darum eine Funktion

$$F : N \longrightarrow X$$

zu definieren, indem man $F(e)$ definiert und noch ein Verfahren angibt, wie man $F(\nu(n))$ aus der Einschraenkung $F|_{A_n}$ gewinnt. Bevor wir das abstrakt zeigen, betrachten wir zunaechst ein Beispiel (das wahrscheinlich schon bekannt ist).

'Beispiel. Man definiert die Fakultaet $n!$ rekursiv via

$$1! := 1, \ \ (n+1)! := (n+1)n!.$$

Mathematisch muss man hier die Aussage beweisen, dass es eine eindeutige Funktion F gibt, die den angegegben Wert an der Stelle e annimmt und fuer die sich $F(\nu(n))$ aus $F|_{A_n}$ nach dem angegebenen Verfahren ergibt. Hierbei folgt die Eindeutigkeit leicht durch Induktion. Die Existenzaussage verlangt besondere Aufmerksamkeit, da die angestrebte Aussage Existenz eine Funktion auf ganz N behandelt, waehrend die Peanoaxiome erst einmal nur den Umgang mit Funktionen auf Teilmengen lieferen. Indem wir Existenz eindeutiger Funktionen auf den A_n zeigen, werden wir dieses Problem loesen. Die Details diskutieren wir als naechstes.

Rekursive Definition von Funktionen. Es genuege (N, e, ν) den Peano Axiomen. Sei X eine Menge und für $n \in N$ sei X^n die Menge der Abbildungen von A_n nach X. Seien $a \in X$ sowie zu $n \in N \setminus \{e\}$ Abbildungen $V_n : X^n \longrightarrow X$ gegeben. Dann existiert eine eindeutige Funktion $f : N \longrightarrow X$ mit

- $f(e) = a$
- $f(\nu(n)) = V_n(f|_{A_n})$. Hier bezeichnet $f|_{A_n}$ die Einschränkung von f auf A_n gegeben durch $f|_{A_n} : A_n \longrightarrow X$, $x \mapsto f(x)$.

Bemerkung. Das ist eine präzise Fassung von

$$X^n = \text{Menge der Tupel } (f(1), \ldots, f(n))$$

und

$$f(1) = a, \ \ f(n+1) = V_n(f(1), \ldots, f(n))$$

für alle $n \in N$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die *Eindeutigkeit* eines solchen f: Seien f und g zwei Funktionen mit den gewünschten Eigenschaften. Sei $L := \{n \in N : f|_{A_n} = g|_{A_n}\}$. Dann ist L induktiv (einfach) und muss also mit N übereinstimmen. Das liefert die Eindeutigkeit.

Wir kommen nun zur *Existenzaussage.* Sei $\mathcal{A}(n)$ die Aussage:

$\mathcal{A}(n)$ Es existiert eine eindeutige Funktion $f_n : A_n \longrightarrow X$ mit $f_n(e) = a$ und $f_n(\nu(k)) = V_k(f_n|_{A_k})$ für $k \in A_n$ mit $\nu(k) \in A_n$.

Wir zeigen zunächst durch Induktion, daß $\mathcal{A}(n)$ für jedes $n \in N$ wahr ist:
$n = e$: klar. ($f_e(e) = a$.)

Ende der Vorlesung

$n \Longrightarrow \nu(n)$:
Existenz: Definiere $f_{\nu(n)}$ auf A_n durch f_n und setze es auf $\nu(n)$ als $V_n(f_n)$. Dann hat $f_{\nu(n)}$ die gewünschten Eigenschaften.
Eindeutigkeit: Das ist einfach. (Auf A_n haben wir keine Wahl, da $\mathcal{A}(n)$ wahr ist, und auf $\nu(n)$ ist der Funktionswert nach der Vorschrift festgelegt.)

Nun zeigen wir, daß die f_n, $n \in N$, miteinander verträglich sind:
Seien $k, n \in N$ gegeben. Dann gilt (s.o.) $A_n \subset A_k$ oder $A_k \subset A_n$. Ohne Einschränkung $A_n \subset A_k$. Aufgrund der Eindeutigkeit müssen dann f_n und f_k auf A_n übereinstimmen. Damit kann man dann die f_n zu einem f auf N 'zusammensetzen', indem man definiert

$$f : N \longrightarrow X, \ f(n) := f_n(n).$$

Dieses f stimmt auf jedem A_n mit f_n überein und hat also die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Bemerkung. Ähnlich wie man Funktionen rekursiv definieren kann, kann man auch Mengen rekursiv definieren (siehe Übung).

4. Die Eindeutigkeit der natuerlichen Zahlen

Damit können wir nun die schon angekündigte Eindeutigkeit der 'natürlichen Zahlen' beweisen.

THEOREM (Eindeutigkeit der natürlichen Zahlen). *Es genügen* (N_1, e_1, ν_1) *und* (N_2, e_2, ν_2) *den Peano Axiomen. Dann gibt es eindeutige Abbildungen* $\alpha : N_1 \longrightarrow N_2$ *und* $\beta : N_2 \longrightarrow N_1$ *mit*

$$\alpha(e_1) = e_2 \text{ und } \alpha(\nu_1(n)) = \nu_2(\alpha(n)) \text{ für alle } n \in N_1$$

bzw.

$$\beta(e_2) = e_1 \text{ und } \beta(\nu_2(n)) = \nu_1(\beta(n)) \text{ für alle } n \in N_2.$$

Es gilt $\beta \circ \alpha = id_{N_1}$ *und* $\alpha \circ \beta = id_{N_2}$. *Damit sind also* α *und* β *bijektiv.*

Zeichnung. Kommutatives Diagramm.

Beweis. Wir widmen uns zunächst der Abbildung α:

Existenz und Eindeutigkeit von α*:* Das folgt durch direkt aus dem Theorem zur rekursiven Definition.

Analog können wir Existenz und Eindeutigkeit von β beweisen.

Wir zeigen nun $\beta \circ \alpha = id_{N_1}$: Sei $S := \{n \in N_1 : \beta \circ \alpha(n) = n\}$. Dann ist aufgrund der Voraussetzungen and α und β dann S induktiv:

$e_1 \in S$: $\beta \circ \alpha(e_1) = \beta(\alpha(e_1)) = \beta(e_2) = e_1$.

$n \in S$ impliziert $\nu_1(n) \in S$: Das folgt da

$$\beta \circ \alpha(\nu_1(n)) = (\beta(\nu_2(\alpha(n))) = \nu_1(\beta((\alpha(n))) \overset{(n \in S}{=} \nu_1(n).$$

Damit folgt $S = N_1$ aus dem zweiten Peanoaxiom.

Die Aussage $\alpha \circ \beta = id_{N_2}$ lässt sich analog beweisen. □

!!! Die gute Nachricht!!! Das vorangehende Theorem zeigt, daß es (bis auf Umbenennung) nur ein Triple (N, e, ν) gibt, das den Peano Axiomen genügt. Wir bezeichnen dieses eindeutige Tripel ab jetzt als die *natürlichen Zahlen* und verwenden das Symbol $\mathbb{N}$. Weiterhin schreiben wir dann (meist) 1 statt e und fuer den Nachfolger von 1 schreiben wir 2.

Bemerkung. In gewissen Fällen wird es praktisch sein, noch ein weiteres Element 0 zur Verfügung zu haben und mit $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ zu arbeiten. Auf $\mathbb{N}_0$ zeichnen wir das Element 0 aus und definieren die Nachfolge Abbildung ν_0 auf N wie bisher und $\nu_0(0) = 1$. Dann erfüllt $(\mathbb{N}_0, 0, \nu_0)$ die Peanoaxiome. (Klar!)

Wir werden nun eine ganze Reihe von Eigenschaften im Kontext von natuerlichen Zahlen untersuchen.

Da die Peano Axiome das Tripel eindeutig bestimmen, legen sie auch die Mengen A_n und M_n (bis auf Umbenennung) eindeutig fest. Damit ist folgende Definition moeglich.

Definition (Endliche Menge). *Eine Menge X heißt endlich, wenn sie leer ist oder ein $n \in \mathbb{N}$ existiert und eine bijektive Abbildung $j : A_n \longrightarrow X$. Dann heißt* 0 *bzw. n die Mächtigkeit oder Kardinalität oder Anzahl der Elemente von X und man nennt X auch n-elementig. Eine Menge heißt unendlich, wenn sie nicht endlich ist.*

Bemerkungen.

- (Uebung) Die Definition von 'n-elementig' ist sinnvoll, da fuer $n \neq m$ die Mengen A_n und A_m keine Bijektion erlauben. (Hinweis: Betrachte die Menge T der $n \in N$ mit der Eigenschaft, dass fuer alle $m \neq n$ die Mengen A_n und A_m keine Bijektion erlauben. Zeige, dass T induktiv ist.)
- Wir werden spaeter sehen, daß es verschieden 'große' unendliche Mengen geben kann.

5. Addition, Multiplikation und Subtraktion auf $\mathbb{N}$

Wir können nun $\mathbb{N}$ mit einer Addition und einer Multiplikation versehen gemäß:

Addition $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, (n, m) \mapsto n + m$**:** Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Abbildung $S_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ rekursive gemäß

$$S_n(1) = \nu(n) \text{ und } S_n(\nu(m)) := \nu(S_n(m)).$$

Dann liefert $S_n(m)$ eine präzise Fassung des bisher nicht definierten $n + m$ d.h. wir *definieren*

$$n + m := S_n(m).$$

Damit folgt dann

$$\nu(n) = S_n(1) = n + 1.$$

Multiplikation $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, (n, m) \mapsto nm$**:** Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Abbildung $M_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ rekursiv gemäß

$$M_n(1) = n \text{ und } M_n(\nu(m)) := M_n(m) + n.$$

Wir *definieren* dann $kn := M_n(k)$. Damit folgt dann

$$1n = M_n(1) = n.$$

Weiterhin setzen wir $0 + n = n = n + 0$ sowie $0n = n0 = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Es ist dann möglich zu zeigen, daß Addition und Multiplikation den üblichen Regeln genügen, d.h. das folgendes gilt:

- Die Addition ist kommutativ, d.h. es gilt $m + n = n + m$ fuer alle $n, m \in \mathbb{N}$.
- Die Addition ist assoziativ, d.h. es gilt $m+(n+k) = (m+n)+k$ fuer all $n, m, k \in \mathbb{N}$.

- Die Multiplikation ist kommutativ, d.h. es gilt $mn = nm$ fuer alle $n, m \in \mathbb{N}$.
- Die Multiplikation ist assoziativ, d.h. es gilt $m(nk) = (mn)k$ fuer all $n, m, k \in \mathbb{N}$.
- Es gilt ein Distributivgesetz, in der Form dass gilt
$$(n + m)k = (nk) + (mk)$$
fuer all $n, m, k \in \mathbb{N}$.

Es eine gute Uebung alle diese Aussagen mithilfe der Peanoaxiome zu beweisen. Wir werden da hier nur zum Teil behandeln[2] Dazu dient folgendes Lemma.

LEMMA. *Fuer alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $n + \nu(m) = \nu(n) + m$.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass fuer jedes feste n die Menge der m mit $n + \nu(m) = \nu(n) + m$ induktiv ist: In der Tat gehoert e zu dieser Menge wegen
$$n + \nu(e) = \nu(n + e) = \nu(\nu(e)) = \nu(n) + e$$
und mit m gehoert auch $\nu(m)$ zu dieser Menge wegen
$$n + \nu(\nu(m))) = \nu(n + \nu(m)) = \nu((\nu(n) + m) = \nu(n) + \nu(m).$$
Hier: Erste und dritte Gleichung: Definition + i.e. $\nu(k + l) = k + \nu(l)$; Zweite Gleichung aus $n + \nu(m) = \nu(n) + m$. $\square$

Damit koennen wir nun die Kommutativitaet der Addition wie folgt zeigen: Sei
$$L := \{n \in \mathbb{N} : n + m = m + n \text{fuer alle } m \in \mathbb{N}\}.$$
Dann ist L induktiv:
Es gilt $e \in L$. Betrachte die Menge der $m \in \mathbb{N}$ mit $e + m = m + e$. Dann ist diese Menge induktiv. Denn es gehoert offenbar e zu dieser Menge (wegen $e+e = e+e$) und mit m gehoert auch $\nu(m)$ dazu wegen
$$e + \nu(m) = \nu(e + m) = \nu(m + e) = m + \nu(e) = \nu(m) + e.$$
Dabei haben wir im zweiten Schritt die Voraussetzung an m genutzt und im letzten Schritt das vorangehende Lemma.
Aus $n \in L$ folgt $\nu(n) \in L$: Es gilt
$$\nu(n) + m = n + \nu(m) = \nu(n + m) = \nu(m + n) = m + \nu(n).$$
Dabei haben wir im ersten Schritt das vorige Lemma genutzt, im zweiten Schritt die Definition von + und im dritten Schritt die Voraussetzung $n \in L$.
Die Assoziativitaet und die Distributivitaet koennen mit einigem Aufwand auf aehnliche Art bewiesen werden. Wir geben keine Details. Aber wir diskutieren hier schon kurz eine **Subtraktion:** Zu jedem

[2]Im kommenden Abschnitt werden wir dann alles Aussagen (auf eine etwas andere Art) beweisen.

$k \in A_n \cup \{0\}$ existiert ein eindeutiges $m \in N_0$ mit $k + m = n$. Wir schreiben dann auch $n - k$ für m.
Bew. Sei L die Menge der $n \in N_0$ für die A_n die behauptete Eigenschaft hat. Dann gehört 0 zu L. (Denn $0 + 0 = 0$ und $0 + n = n \neq 0$ für alle $n \in N$). Weiterhin gehört mit n auch $\nu(n)$ zu L: (Übung. Sei $k \in A_{\nu(n)}$. Zu zeigen Existenz und Eindeutigkeit eines m mit $k + m = \nu(n)$).
Existenz: Falls $k \in A_n$, gibt es m' mit $k + m' = n$ und wir wählen $m := \nu(m')$. Falls $k = \nu(n)$ setzen wir $m := 0$.
Eindeutigkeit: Es gelte $k + m = \nu(n)$. Ist $m = 0$ so folgt $k = \nu(n)$. Damit ist dann $m = 0$ die einzige Lösung (denn $k + n \in M_k$ wie eine einfache Induktion zeigt und M_k enthält k nicht.) Andernfalls ist m ein Nachfolger, also $m = \nu(l)$. Dann gilt $k+\nu(l) = \nu(n)$, also $\nu(k+l) = \nu(n)$ also $k + l = n$. Wegen $n \in L$ ist dann l eindeutig bestimmt und damit auch $m = \nu(l)$.

Bemerkung. Man kann das bisher diskutierte so zusammenfassen, das $(\mathbb{N}_0, +)$ eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element 0 und Kuerzungsregel ist.

Hier geben wir noch einige **Beispiele** fuer rekursive Definitionen und Funktionen auf den natuerlichen Zahlen.

- Die Funktion $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n!$ (n-Fakultät) wird definiert durch
$$1! = 1 \text{ und } (n + 1)! = (n + 1)n!.$$
Damit ist sinngemäß $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$. Zweckmässig: $0! = 1$.
- Für $a \in \mathbb{N}$ wird die Funktion $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto a^n$ definiert durch
$$a^1 := a, \quad a^{n+1} := a \cdot a^n.$$
Zweckmässig: $a^0 := 1$.

6. Summen und Produkte

Mittels Rekursiver Definition können wir auch $\sum$ und $\prod$ definieren. Das wird später oft nützlich sein. Daher gehen wir nun darauf ein.

Definition von $\sum$:
Ziel: Präzise Version von $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \cdots + a_n$.
Sei K eine Menge mit einer Verknüpfung + (Beispiel: $K = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$). Seien $a_n \in K$, $n \in N$ gegeben.
Wir definieren dazu den Ausdruck $\sum_{k=1}^n a_k$ rekursiv durch
$$\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1 \text{ und } \sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}.$$
(Die Funktion $f : N \longrightarrow K$, $f(n) = \sum_{k=1}^n a_k$ wird also durch die Bedingungen $f(1) = a_1$ und $f(n+1) = f(n)+a_{n+1} =: V_n(f_{A_n})$ festgelegt.)

Spezialfall: Sind alle $a_k = q \in K$ so setzt man

$$nq := \sum_{k=1}^{n} q.$$

Dann gilt also

$$1q = q, (n+1)q = q + nq.$$

Ende der Vorlesung

Definition von $\prod$:

Ziel: Präzise Version von $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \dots a_n$.
Sei K eine Menge mit einer Verknüpfung $\cdot$ (Beispiel: $K = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$). Seien $a_n \in K$, $n \in N$, gegeben. Wir definieren dazu den Ausdruck $\prod_{k=1}^{n} a_k$ rekursiv durch

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1 \text{ und } \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) a_{n+1}.$$

(Die Funktion $f : N \longrightarrow K$, $f(n) := \prod_{k=1}^{n} a_k$, wird also durch die Bedingungen $f(1) = a_1$ und $f(n{+}1) = f(n)a_{n+1} =: V_n(f_{A_n})$ festgelegt.)

Beispiel. Sind alle $a_k = q \in K$, so erhaelt man

$$q^n = \prod_{k=1}^{n} q.$$

(Hierbei ist die linke Seite die schon oben definierte Potenz. Die Gleichheit folgt aus dem Eindeutigkeitsteil des Satzes zur rekursiven Definition, da beide Seiten die gleiche Rekursion erfuellen.)

Beispiel. Gilt $a_k = k \in \mathbb{N}$, so erhaelt man

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = n!.$$

(Hierbei ist die linke Seite die schon oben definierte Fakultaet. Die Gleichheit folgt aus dem Eindeutigkeitsteil des Satzes zur rekursiven Definition, da beide Seiten die gleiche Rekursion erfuellen.)

KAPITEL 2

Die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen sind charakterisiert durch das Zusammenspiel von drei Strukturen:

- Körperaxiome ('Arithmetik')
- Anordnungsaxiome ('$\leq$')
- Vollständigkeitsaxiom ('Existenz von Suprema und Infima') (Liefert Existenz von Grenzwerten)

Die natürlichen Zahlen lassen sich als Teilmengen der reellen Zahlen auffassen und erben entsprechend Arithmetik und Anordnung. Damit folgen dann leicht die im vorigen Kapitel nicht komplett bewiesenen Aussagen zur Arithmetik der natuerlichen Zahlen.
Um all das (und mehr) geht es in diesem Kapitel. Insbesondere werden wir dabei folgende Zeichnung rechtfertigen:

Zeichnung. Linie mit
- 0 und Spiegelung (für Inversion im Körper),
- Positiv- und Negativteil (für Ordnung)
- ohne Lücken (für Vollständigkeit).
sowie
- natürlichen Zahlen.

1. Die Körperstruktur

Die reelen Zahlen mit Multiplikation und Addition sind ein Körper:

Definition. *(Körper) Eine Menge K zusammen mit den Verknüpfungen*

$$K \times K \longrightarrow K, (x, y) \mapsto x + y \ \ (Addition)$$

und

$$K \times K \longrightarrow K, (x, y) \mapsto x \cdot y \ \ (Multiplikation)$$

heißt Körper, wenn folgende Axiome gelten:
Axiome der Addition:

(A1) *Assoziativgesetz: $x + (y + z) = (x + y) + z$ für alle $x, y, z \in K$.*
(A2) *Kommutativgesetz: $x + y = y + x$ für alle $x, y \in K$.*
(A3) *Existenz der 0: Es gibt ein $0 \in K$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in K$.*
(A4) *Existenz des Inversen (bzgl. der Addition): Zu jedem $x \in K$ existiert ein $-x \in K$ mit $x + (-x) = 0$.*

Axiome der Multiplikation:

(M1) *Assoziativgesetz:* $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *für alle* $x, y, z \in K$.
(M2) *Kommutativgesetz:* $x \cdot y = y \cdot x$ *für alle* $x, y \in K$.
(M3) *Existenz der* 1*: Es gibt ein* $1 \in K$ *mit* $1 \neq 0$ *und* $x \cdot 1 = x$ *fuer alle* $x \in K$.
(M4) *Existenz des Inversen (bzgl. der Multiplikation): Zu jedem* $x \in K$ *mit* $x \neq 0$ *existiert ein* $x^{-1} \in K$ *mit* $xx^{-1} = 1$.

Distributivgesetz:

(D1) *Distributivgesetz:* $x(y + z) = xy + xz$ *für alle* $x, y, z \in K$.

Wir nennen 0 *neutrales Element der Addition und* 1 *neutrales Element der Multiplikation.*

Bemerkung.

- Setzt man das Konzept der Gruppe voraus, so kann man diese Definition auch so fassen: $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1. Es gilt das Distributivgesetz $x(y + z) = xy + xz$ für alle $x, y, z \in K$.
- Wir werden gleich Eindeutigkeit von neutralen Elemente (der Addition und Multipliation) und von inversen Elementen zeigen. Damit koennen wir dann von **dem** neutralen Element und **dem** Inversen sprechen.

Notation. Wir schreiben $x - y$ statt $x + (-y)$ und $\frac{x}{y}$ statt $x \cdot y^{-1}$ (fuer $y \neq 0$) und xy statt $x \cdot y$.

Beispiel - (Kleinster Körper) $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit Addition $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0$ und Multiplikation $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$ und $00 = 0$ ist ein Körper. Tatsaechlich hat - wie man sich leicht klarmachen kann - man auf der Menge $\{0, 1\}$ keine andere Wahl als die obigen Definitionen fuer $+$ und $\cdot$, wenn man ueberhaupt eine Koerperstruktur schaffen will. Es sind also die oben angegebenen Abbildungen die einzige Moeglichkeit $\{0, 1\}$ zu einem Koerper zu machen. Damit ist diese offenbar der kleinste moegliche Koerper (da jeder Koerper ja mindesten 0 und 1 enthalten muss.
Dieser Koerper mag auf den ersten Blick etwas 'exotisch' aussehen. Es handelt sich aber bei naeherem Hinsehen gerade um das 'Rechnen modulo zwei'. Dabei steht 1 für alle ganzen Zahlen, deren Rest bei Division durch gerade 1 ist (ungerade Zahlen) und 0 für alle ganzen Zahlen, deren Rest bei Division durch 2 gerade 0 ist (gerade Zahlen). Die Rechenregeln lassen sich dann verstehen als $gerade + gerade = gerade$, $gerade + ungerad = ungerade$..... Allgemeiner liefert Rechnen modulo N einen Körper, falls N eine Primzahl ist (siehe Algebra).

'Beispiele.' $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

PROPOSITION (Charakteristische Eigenschaften des Inversen). *Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Dann gilt:*
(a) Fuer beliebige $x, y \in K$ ist $y-x$ die eindeutige Lösung z von $x+z = y$. Insbesondere sind das Inverse bzgl. der Addition zu einem x und das neutrale Element der Addition eindeutig bestimmt. Gilt $x + y = 0$ für $x, y \in K$ so ist $x = -y$ und $y = -x$. Insbesondere ist also $x = -(-x)$.
(b) Fuer beliebige $x, y \in K$ mit $y \neq 0$ ist $\frac{x}{y}$ die eindeutige Lösung z von $zy = x$. Insbesondere ist das Inverse bzgl- der Multiplikation zu einem $y \neq 0$ und das neutrale Element der Multiplikation eindeutig bestimmt. Gilt $xy = 1$ für $x, y \in K$, so gilt $x = y^{-1}$ und $y = x^{-1}$. Insbesondere ist dann also $x = (x^{-1})^{-1}$.

Beweis. (a) *Lösung:* $x+(y-x) = (y-x)+x = y+(-x+x) = y+0 = y$.
Eindeutig: $x = y + z \Longrightarrow x - y = (y + z) - y = -y + (y + z) = (-y + y) + z = 0 + z = z$.
Eindeutigkeit des Inversen der Addition: $-x$ loest $x + (-x) = 0$.
Eindeutigkeit des neutralen Elementes der Addition 0*:* Es löst 0 die Gleichung $x + 0 = x$.
Zu $x + y = 0$*:* Nach Konstruktion gilt $x + (-x) = 0$ und $(-y) + y = 0$. Aus der Eindeutigkeit der Loesung folgt dann also $y = -x$ und $-y = x$. Damit folgt dann $x = -y = -(-x)$.

(b) ähnlich wie (a).

□

PROPOSITION (Rechnen mit 0 und 1). *Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.*
(a) Es gilt $0 = -0$ und $1 = 1^{-1}$.
(b) $0x = 0$ für alle $x \in K$.
(c) $(-1)x = -x$ für alle $x \in K$.
(d) $(-x)(-y) = xy$ für alle $x, y \in K$.

Beweis.
(a) Es gilt $0 = 0 + 0$ und $1 = 1 \cdot 1$. Damit folgt die Aussage aus dem in der vorigen Proposition diskutieren Fall $0 = x + y$ bzw. $1 = xy$.
(b) $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$. Damit folgt die Aussage aus der vorigen Proposition (da $z = 0x$ und $z = 0$ die Gleichung $0x = 0x + z$ loesen.)
(c) Es ist zu zeigen, daß $z := (-1)x$ das Inverse von x (bzgl. Addition) ist:
$z + x = (-1)x + x = (-1)x + 1x = (-1 + 1)x = 0x = 0$ (nach (c)).
(d) Übung. □

Bemerkung - Unmoeglichkeit der Division durch 0**.** Wegen $0 \neq 1$ und $0x = 0$ fuer alle $x \in K$ gibt es also in einem Koerper kein Inverses von 0 bzgl. der Multiplikation. Da nach der oben gegebenen Notation die Division durch ein Element gerade die Multiplikation mit dem (bzgl. der Multiplikation) inversen Element ist, kann man also in einem Koerper nicht durch 0 dividieren.

Ende der Vorlesung

FOLGERUNG (Vertauschen der Inversionen). *Sei* $(K, +, \cdot)$ *ein Körper. Dann ist für jedes* $x \neq 0$ *auch* $-x \neq 0$ *und es gilt* $(-x)^{-1} = -x^{-1}$.

Beweis. Für $x \neq 0$ gilt auch $-x \neq 0$ (sonst $x = x + 0 = x + (-x) = 0$ Widerspruch). Weiterhin gilt

$$(-x)(-x^{-1}) = (-x)(-1)(x^{-1}) = (-1)(-x)x^{-1} = xx^{-1} = 1.$$

Damit folgt (s.o.) $(-x)^{-1} = -x^{-1}$. □

Bemerkung - Bruchrechnug: (Uebung) Man kann nun folgende wohlbekannte Aussagen (Bruchrechnung) zeigen:
(a) Fuer $x, y \neq 0$ gilt $(xy)y^{-1}x^{-1} = 1$ und insbesondere $xy \neq 0$.
(b) Fuer $y, w, v \neq 0$ gilt

$$\frac{x}{y}\frac{v}{w} = \frac{xv}{yw}, \quad \frac{x}{y} + \frac{v}{w} = \frac{xw + yv}{yw}, \quad \frac{x}{y}/\frac{u}{v} = \frac{xv}{yu}.$$

Anwendung - die Multiplikation $\mathbb{N} \times K \longrightarrow K$. Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $x \in K$, so liefert rekursive Definition eine eindeutige Abbildung

$J = J_{K,x} : \mathbb{N} \longrightarrow K$ mit $J(1_{\mathbb{N}}) = x$ und $J(n + 1_{\mathbb{N}}) = J(n) + x$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir definieren dann:

$$n \cdot x := J(n).$$

Diese Abbildung wird uns von Zeit zu Zeit begegenen.

Beispiel. Sei $K = \mathbb{F}_2$ und $x = 1$. Dann gilt für $J : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{F}_2$, $n \mapsto n1_{\mathbb{F}_2}$

$$J(n) = 0 \text{ falls } n \text{ gerade d.h. } n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}$$

und

$$J(n) = 1 \text{ falls } n \text{ ungerade d.h. } n = 2k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}.$$

Die folgenden beiden wichtigen Formeln gelten in jedem Körper.

PROPOSITION (Geometrische Summenformel). *Sei* K *ein Körper und* $x, y \in K$ *mit* $x \neq y$. *Dann gilt für jedes* $n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{x^n - y^n}_{=} (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{(n-1)-k} = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} y^k x^{(n-1)-k}.$$

Inbesondere gilt für $q \neq 1$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$ *die Formel*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Bemerkung. In der Formel kommt der zunaechst nicht definierte Ausdruck $n-k$ fuer $k \in A_n$ vor. Eine Induktion (Uebung) zeigt aber, dass zu jedem $k \in A_n$ ein eindeutiges $l \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $k+l=n$. Wir definieren dann $n-k := l$.

Beweis. Wir rechnen

$$\begin{aligned} (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{(n-1)-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} y^{(n-1)-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} \\ (Teleskopsumme) &= \sum_{k=1}^{n} x^k y^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} \\ &= x^n - y^n. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit folgt durch Vertauschen von x und y. Das 'Inbesondere' folgt mit $x=1$ und $y=q\neq 1$. □

Bemerkung. Man kann die geometrische Summenformel auch durch Induktion beweisen. (Übung).

Proposition (Binomischer Satz). *Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in K$. Dann gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

mit

$$\binom{n}{k} := \textit{Anzahl der } k\textit{-elementigen Teilmengen einer } n \textit{ elementigen Menge.}$$

Diese Zahlen $\binom{n}{k}$ erfüllen die Rekusionsformel

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Beweis. Die Rekursionsformel folgt direkt: Sei eine $n+1$ elementige Menge gegeben. Sei ein Element p aus dieser Menge fixiert. Dann gibt es $\binom{n}{k-1}$ k-elementige Teilmgenen die p enthalten und $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen, die p nicht enthalten. (Zeichnung: n weisse Kugeln und eine schwarze Kugel....)

Nun folgt die Aussage über $(x+y)^n$ durch Induktion:
$n=1$: Klar.

$n \Longrightarrow (n+1)$: Direkte Rechnung liefert

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\ A(n) &= (x+y)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \end{aligned}$$

(Dabei folgt die letzte Gleichung aus der Induktionsannahme für n.) Damit können wir weiter rechnen

$$\begin{aligned} \ldots &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\ (k \to k-1) \quad &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} \\ (\textit{Rekursion}) \quad &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Bemerkung. (a) Alternative Deutung: 'Ausmultiplizieren' von

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

und bestimmen, wie oft $x^k y^{n-k}$ vorkommt.
(b) Es gilt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. (Bew. Induktion und Rekursionsformel. Beachte dabei, daß man zunächst dem Quotienten a/b für natürliche Zahlen einen Sinn geben muss, etwa durch $a/b = c$ genau dann wenn $c \in \mathbb{N}$ die Gleichung $bc = a$ erfüllt.)

Ende der Vorlesung

2. Die Ordnungsstruktur

Wir kommen nun zu einer weiteren Struktur auf $\mathbb{R}$, der Anordnungsstruktur.

Definition (Anordnung). *Ein Körper K zusammen mit einer ausgezeichneten Menge K^+, den sogenannten positiven Elementen, heißt angeordnet, wenn die folgenden Eigenschaften (Ordnungsaxiome) gelten:*

(O1) $K = K^+ \cup \{0\} \cup \{-x : x \in K^+\}$, *wobei die Vereinigung disjunkt ist.*
(O2) *Fuer $x, y \in K^+$ gilt $x + y \in K^+$.*
(O3) *Fuer $x, y \in K^+$ gilt $xy \in K^+$.*

Die Elemente $x \in K$ mit $-x \in K^+$ heissen dann negativ. Die Elemente aus $K^+ \cup \{0\}$ heissen auch nicht negativ.

Bemerkungen. (a) '$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$' sind angeordnet (s.u.)
(b) $\mathbb{F}_2$ lässt sich nicht anordnen. (Denn $1 = -1$.) $\mathbb{C}$ lässt sich nicht anordnen (Uebung).

Wir ziehen schon einmal eine einfache Folgerung aus (O1):

Folgerung. *In einem angeordneten Koerper gilt fuer $x \neq 0$ entweder $x \in K^+$ oder $-x \in K^+$.*

Beweis. Es muß nach (O1) entweder gelten $x \in K^+$ oder $x \in \{-h : h \in K^+\}$. Es ist $x = -h$ fuer $h \in K^+$ aequivalent zu $-x = h \in K^+$. $\square$

Die Ordnungsrelationen $\leq$ und $<$: Sei K ein angeordneter Körper. Dann ergeben sich die Relationen $\leq, \geq, >, <$ wie folgt:
$x > y$ (lies 'x groeßer als y') oder $y < x$ (lies: 'y kleiner als x') falls $x - y \in K^+$.
$x \geq y$ (lies 'x groesser gleich y') oder $y \leq x$ (lies: 'y kleiner gleich x') falls $x - y \in K^+ \cup \{0\}$.

Folgerung ($\leq$ liefert eine totale Ordnung). *Sei K ein angeordneter Körper.*
(a) Sind $x, y, z \in K$ mit $x \leq y$ und $y \leq z$ so gilt $x \leq z$.
(b) Gilt für $x, y \in K$ sowohl $x \leq y$ als auch $y \leq x$ so folgt $x = y$.
(c) Für $x, y \in K$ gilt dann genau eine der drei folgenden Aussagen:

- $x < y$.
- $y < x$.
- $x = y$.

Beweis. (a) Zu zeigen $z - x \in K^+ \cup \{0\}$. Das folgt aus (O2) (und der Tatsache, dass Addition von 0 an der Zugehoerigkeit zu K^+ nichts aendert) in folgender Weise:

$$z - x = z + (-y + y) - x = (z - y) + (y - x) \in K^+ \cup \{0\}.$$

(b) Für x, y mit $x \leq y$ nd $y \leq x$ gilt $x - y \in K^+ \cup \{0\}$ und $y - x \in K^+ \cup \{0\}$. Damit folgt

$$x - y \in (K^+ \cup \{0\}) \cap (\{-z : z \in K^+\}) \cup \{0\} = \{0\}.$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit aus (O1).
(c) Das ist lediglich eine Umformulierung von (O1). $\square$

Bemerkung. Die vorige Proposition besagt, daß jede Anordnung auch eine Ordnung liefert. Tatsaechlich ist eine Anordnung 'mehr' als eine Ordnung (s.u.).

Wir untersuchen nun wie die Anordnung mit Bilden des Inversen verträglich ist.

Proposition (Inversion und Quadrate). *Sei K ein angeordneter Körper. Dann gilt:*
(a) $x < y \Longleftrightarrow -x > -y$. Insbesondere $x < 0 \Longleftrightarrow -x > 0$.
(b) $x \in K^+ \Longleftrightarrow x^{-1} \in K^+$.
(c) $x^2 \in K^+$ für alle $x \neq 0$. Insbesondere $1 = 1 \cdot 1 > 0$.

Beweis.
(a) Es bedeutet $x < y$ gerade $y - x \in K^+$; $-x > -y$ bedeutet gerade $-x + y \in K^+$. Das 'Insbesondere' folgt mit $x = x$ und $y = 0$ unter Beachten von $0 = -0$.

(b) Sei $x \in K^+$ (zu zeigen $x^{-1} \in K^+$). Aus $x \in K^+$ folgt insbesondere $x \neq 0$. Angenommen $x^{-1} \notin K^+$. Dann $-x^{-1} \in K^+$. Damit $-1 = x(-x^{-1}) \in K^+$. Damit $1 = (-1)(-1) \in K^+$. Also $1 \in K^+$ und $(-1) \in K^+$. Widerspruch zu (O1).
Sei $x^{-1} \in K^+$. Dann ist nach dem schon gezeigten $x = (x^{-1})^{-1}$ ebenfalls in K^+.

(c) Das folgt aus $x^2 = xx = (-x)(-x)$, da für $x \neq 0$ $x \in K^+$ oder $-x \in K^+$ gilt.

□

Wir kommen nun zu einigen nützlichen Rechenregeln. Diese werden inbesondere zeigen, daß wir Ungleichungen addieren und (unter geeigneten Voraussetzungen) auch multiplizieren duerfen.

Proposition (Rechenregeln). *Sei K ein angeordneter Körper. Dann gilt:*
(a) $x < y,\ x' \leq y' \Longrightarrow x + x' < y + y'$.

(b) $a < b$ *und* $x > 0 \Longrightarrow ax < bx$

(c) $a < b$ *und* $x < 0 \Longrightarrow ax > bx$.

(d) $0 < a < b$ *und* $0 < x < y \Longrightarrow ax < by$.

(e) $0 < x < y \Longleftrightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$.

Beweis. (a) ähnlich wie der Beweis der Transitiviaet oben: Es gilt nach (O2):
$$(y + y') - (x + x') = (y - x) + (y' - x') \in K^+.$$

(b) $bx - ax = (b - a)x \in K^+$.

(c) $a < b$ bedeutet $b - a \in K^+$. $x < 0$ liefert $-x \in K^+$ nach voriger Proposition. Damit gilt also
$$ax - bx = (a - b)x = (-1)(a - b)(-1)x = (b - a)(-x) \in K^+.$$

(d) $by - ax = by - bx + bx - ax = b(y - x) + x(b - a) \in K^+$.

(e) $\Longrightarrow$: Nach vorangegangener Proposition gilt $x^{-1}, y^{-1} \in K^+$. Damit können wir $0 < x < y$ mit $x^{-1}y^{-1}$ 'Durchmultiplizieren' und erhalten die Behauptung.

Die umgekehrte Richtung folgt dann durch Ersetzen von x durch x^{-1} und y durch y^{-1}. □

Folgerung. $0 \leq x < y,\ k \in \mathbb{N} \Longrightarrow 0 \leq x^k < y^k$.

In allen angeordneten Körper gilt die folgende Bernoulli Ungleichung. Um sie zu formulieren, erinnern wir noch einmal an folgendes: In einem Körper K können wir nx mit $n \in \mathbb{N}$ und $x \in K$ rekursiv definieren durch $1_{\mathbb{N}}x = x$ und $(n + 1_{\mathbb{N}})x := nx + x$.

Proposition (Bernoulli Ungleichung). *Sei K ein angeordneter Körper. Dann gilt für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Induktion nach n.
$n = 1$: $1 + x = 1 + x$.

Ende der Vorlesung

$n \Longrightarrow n + 1$:

$$\begin{array}{rcl} (1+x)^{n+1} & = & (1+x)(1+x)^n \\ (A(n),\ 1+x \geq 0) & \geq & (1+x)(1+nx) \\ & = & 1+(n+1)x+x(nx) \\ \text{(Kleine Induktion zwischendurch ;-)} & = & 1+(n+1)x+nx^2 \\ \text{(Kleine Induktion zwischendurch ;-)} & \geq & 1+(n+1)x. \end{array}$$

Zu den kleinen Induktionen zwischendurch: Fuer jedes x gilt

$$x(nx) = nx^2 \geq 0.$$

Bew. Induktion: $n = 1$: $x(1_{\mathbb{N}}x) = xx = x^2 \geq 0$. Dabei folgt die letzte Ungleichung aus dem oben gezeigten.
$n \Longrightarrow n + 1$: $x((n + 1)x) = x(nx + x) = x(nx) + xx = nx^2 + x^2 = (n + 1)x^2$. (Dabei: erste Gleichung: Rekursive Definition von $(n + 1)x$; zweite Gleichung: Distributivgesetz; dritte Gleichung: Gueltigkeit der Aussage fuer n; vierte Gleichung: Rekursive Definition von $(n + 1)x^2$.) Es gilt $x((n + 1)x = nx^2 + x^2 \geq 0$ aufgrund der Ordnungsaxiome, da es sich um eine Summe von zwei nichtnegativen Termen handelt. (Der erste Term ist nichtnegativ aufgrund der Gueltigkeit der Aussage fuer n; der zweite Term ist nichtnegativ wie oben gezeigt wurde). $\square$

Bemerkungen. (a) Für $x \geq 0$ folgt das natürlich aus dem binomischen Satz. Denn $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ hat nur nichtnegative Summanden.
(b) Wie ist die Lage für $-2 \leq x \leq -1$? (Übung)

In einem angeordneten Körper können wir den Betrag definieren durch

$$|\cdot| : K \longrightarrow K^+ \cup \{0\}, |x| := \begin{cases} x & : \ x > 0 \\ 0 & : \ x = 0 \\ -x & : \ x < 0. \end{cases}$$

Der Betrag beschreibt so etwas wie eine Länge. Das Bilden des Betrages ist in gewisser Weise mit Addition und Multipliktion verträglich:

PROPOSITION. *(Betrag und Multiplikation) Ist K ein angeordneter Körper, so gilt für alle $x, y, z \in K$*

- $|z| = |-z|$
- $|1/x| = 1/|x|$ *(falls $x \neq 0$).*
- $|xy| = |x||y|$

Beweis. *Es gilt* $|z| = |-z|$. Das folgt leicht durch Fallunterscheidung $z \geq 0$ und $z < 0$.

Es gilt $|1/x| = 1/|x|$. Das ist klar für $x > 0$. Für $x < 0$ gilt $-x > 0$ und $x^{-1} < 0$ und damit

$$1/|x| = |x|^{-1} = |-x|^{-1} = (-x)^{-1} \stackrel{s.o.}{=} -x^{-1} = |x^{-1}| = |1/x|.$$

Es gilt $|xy| = |x||y|$. Gilt $x = 0$ oder $y = 0$, so folgt die Aussage sofort. Die übrigen Fälle folgen einfach durch Fallunterscheidung (4 Fälle). Etwa:

$x > 0, y > 0$: Dann gilt $xy > 0$ und damit $|xy| = xy = |x||y|$.

$x < 0, y > 0$: Dann gilt $-y > 0$. Damit folgt unter Anwendung des schon gezeigten:

$$|xy| = |(-1)xy| = |x(-y)| = |x||-y| = |x||y|.$$

etc. □

PROPOSITION (Dreiecksungleichung). *Ist K ein angeordneter Körper, so gilt für alle $x, y, z \in K$*

$$-|z| \leq z \leq |z|$$

und

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (\textit{Dreiecksungleichung})$$

also insbesondere

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \quad (2.\ \textit{Dreieckungleichung}).$$

Beweis. $-|z| \leq z \leq |z|$: Für $z = 0$ ist die Aussage klar. Für $z > 0$ folgt die Aussage leicht. Für $z < 0$ können wir $-z$ betrachten und erhalten die Aussage nach Multiplikation mit -1.

Es gilt $|x + y| \leq |x| + |y|$*:* Reicht z.z. $x + y \leq |x| + |y|$ und $-(x + y) \leq |x| + |y|$.

Nun gilt aber aufgrund des schon gezeigten: $x, -x \leq |x|$ und $y, -y \leq |y|$. Addieren unter Verwendung der Rechenregeln liefert die Aussage.

Zum 'Insbesondere': Aus $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ folgt $|x| - |y| \leq |x - y|$ ähnlich folgt auch $|y| - |x| \leq |y - x|$. □

Die Ordnungstruktur erlaubt es auch von Minima und Maxima einer Menge zu sprechen: Sei M eine Menge in K. Ein $x \in K$ heißt Maximum / Minimum von M, wenn gilt:

- $x \in M$.
- Fuer jedes $y \in M$ gilt $y \leq x$ / $y \geq x$.

Man kann sich leicht (wie?) klarmachen, dass ein solches Maximun / Minimum eindeutig ist (wenn es ueberhaupt existiert). Man schreibt dann $\max M$ bzw. $\min M$ fuer das Maximum bzw. Minimum von M.

Wir beenden diesen Abschnitt, in dem wir die Existenz von Maxima und Minima ueber endliche Mengen zeigen: Ist M eine Menge in K mit einem Element, m, so definieren wir $\max M = m$ und $\min M = m$. Sei nun M eine Menge in K mit $n+1$ Elementen, also $M = M' \cup \{m\}$ mit einer n elementigen Menge M'. Dann definieren wir $\max M$ durch $\max M := m$ falls $m \geq \max M'$ und $\max M := \max M'$ falls $m < \max M'$ und $\min M$ durch $\min M = m$ falls $m \leq \min M'$ und $\min M = \min M'$ falls $m > \min M'$. Man kann dann leicht sehen, daß die so definierten Elemente gerade die charakteristische Eigenschaft von Maximum bzw. Minimum haben.

3. Ordnungsvollständigkeit

Wir kommen nun zur dritten Eigenschaft der reellen Zahlen, der Ordnungsvollständigkeit. Auf dieser Eigenschaft beruhen die Aussagen über Grenzwerte in der Analysis.

Definition (Beschränkte Mengen). *Sei K ein angeordneter Körper und $M \subset K$ nichtleer.*

(a) Es heißt $S \in K$ eine obere/untere Schranke von M, wenn $m \leq S$ / $m \geq S$ für alle $m \in M$.

(b) Hat M eine obere/untere Schranke, so heißt M nach oben / unten beschränkt. Hat M obere und untere Schranke, so heißt M beschränkt.

Wir fragen nun nach kleinsten oberen / größten unteren Schränken.

Definition. *Sei K ein angeordneter Körper und M eine nach oben /unten beschränkte Menge in K. Eine obere /untere Schranke S von M heißt dann Supremum /Infimum, wenn für jede weitere obere / untere Schranke S' gilt $S \leq S'$ / $S \geq S'$.*

Bemerkung. (a) Das Supremum/Infimum einer beschräkten Menge muss nicht existieren (so hat zum Beispiel in $\mathbb{Q}$ die Menge $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ keine Supremum. siehe Übung.).
(b) Wenn ein Supremum / Infimum existiert, ist es eindeutig:
(Bew. S, S' Suprema von M. Dann gilt $S \leq S'$ und $S' \leq S$ also $S = S'$.)
(c) Gehoert das Supremum / Infimum zu der Menge, so handelt es sich um das Maximum bzw. Minimum.

Notation. Wir schreiben $\sup M$ bzw. $\inf M$ für das Supremum bzw Infimum einer Menge (falls existent).

Proposition (Charakterisierung Supremum). *Sei K ein angeordneter Körper und Menge eine Menge in K. Das Supremum der Menge M ist dadurch charakterisiert, daß gilt*

- *$m \leq S$ für alle $m \in M$. (S ist obere Schranke)*
- *Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m \in M$ mit $S-\varepsilon < m$. (Jede kleinere Zahl ist NICHT Schranke d.h. jede Schranke ist mindestens S)*

Für das Infimum gilt entsprechendes (!).

Beweis. Das ist eigentlich nur eine einfache Umformulierung der Definitionen: Es ist S Supremum von M, wenn es eine obere Schrankte von M ist und jede weitere obere Schranke nicht kleiner als S ist. Das bedeutet, daß S Supremum ist, wenn es eine obere Schranke ist und jede kleinere Element nicht obere Schranke ist. □

Damit können wir nun zur dritten Eigenschaft der reellen Zahlen kommen.

DEFINITION. *Ein angeordneter Körper heißt ordnungsvollständig, wenn jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt und jede nach unten beschränkte Menge ein Infimum besitzt.*

Bemerkung. Besitzt in einem angeordneten Körper jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum, so besitzt auch jede nach unten beschränkte Menge ein Infimum. (Übung. Nutzt $\inf M = -\sup(-M)$). In diesem Sinne koennte man also einen Teil der Forderung der Definition auch weglassen.

Ende der Vorlesung

Wir werden (bald) zeigen, dass es - bis auf Umbennenung - hoechstens einen orgdnungsvollstaendigen Koeper gibt. Diesen eindeutigen Koerper nennen wir dann die reellen Zahlen. Damit sind die reellen Zahlen also durch die Koerperaxiome, die Anordnung und die Ordnungsvollstsaendigkeit eindeutig bestimmt (aehnlich, wie die natuerlichen Zahlen durch die Peano-Axiome eindeutig bestimmt sind).

Hier ziehen wir erst einmal eine Folgerung aus der Ordnungsvollstaendigkeit, naemlich die Existenz von Wurzeln. Fuer diese Existenz ist die Ordnungsvollstaendigkeit wesentlich. Sie gilt nicht in den rationalen Zahlhen.

THEOREM (Existenz k-ter Wurzeln). *Sei K ein ordnungsvollstaendiger Koerper. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert für jedes $x \geq 0$ ein eindeutiges $y \geq 0$ mit $y^k = x$. Man definiert $\sqrt[k]{x} := y$. Es gilt $\sqrt[k]{x_1} < \sqrt[k]{x_2}$ falls $x_1 < x_2$.*

Notation. Man schreibt auch $x^{1/k}$ fuer $\sqrt[k]{x}$.

Beweis. Der Fall $x = 0$ ist klar. Wir betrachten nur noch $x > 0$.

Eindeutigkeit: Sei $y^k = \widetilde{y}^k$. Ist $y \neq \widetilde{y}$, so können wir ohne Einschränktung annehmen $y < \widetilde{y}$. Das führt auf $y^k < \widetilde{y}^k$. Widerspruch.

Existenz: Sei $M := \{z \geq 0 : z^k \leq x\}$. Dann ist M beschränkt (Falls $x \leq 1$ ist 1 eine Schranke. Falls $x > 1$ ist x eine Schranke.) Außerdem ist M nichtleer ($0 \in M$). Damit hat M ein Supremum S. Wir zeigen $S^k = x$, indem wir $S^k < x$ und $S^k > x$ zum Widerspruch führen.

Angenommen $S^k < x$: Wir zeigen, daß dann auch $(S+\varepsilon)^k < x$ für genügend kleine $\varepsilon > 0$. Widerspruch zu S obere Schranke.

Hier sind die Details: $D := x - S^k > 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < 1$ und

$$\varepsilon < \frac{D}{\sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} S^l}$$

gegeben. Dann gilt also

$$0 < \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} S^l (\varepsilon)^{k-l} \leq \left(\sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} S^l \right) \varepsilon < x - S^k = D.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} (S+\varepsilon)^k &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} S^l \varepsilon^{k-l} \\ &= S^k + \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} S^l \varepsilon^{k-l} \\ &< S^k + D \\ &= x. \end{aligned}$$

Angenommen $S^k > x$: Aehnlich wie im ersten Fall kann man zeigen, daß dann auch $(S-\varepsilon)^k > x$ für alle genügend kleinen $\varepsilon > 0$. Dann ist aber, wie man leicht sieht, $S - \varepsilon$ eine obere Schranke von M. Offenbar ist aber $S - \varepsilon$ kleiner als S. Widerspruch: S kleinste obere Schranke.

Monotonie: Sei $x < y$. Nach der gezeigten Eindeutigkeit ist $\sqrt[k]{x} \neq \sqrt[k]{y}$. Wäre $\sqrt[k]{x} > \sqrt[k]{y}$, so folgte $x = (\sqrt[k]{x})^k > (\sqrt[k]{y})^k = y$. Widerspruch. $\square$

FOLGERUNG. *Fuer ein beliebiges a aus einem ordnungsvollstaendigen Koerper K gilt $|a| = \sqrt{a^2}$*

Beweis. Nach Definition des Betrages gilt $|a| \geq 0$ und, wie die Fallunterscheidung $a \geq 0$ bzw. $a < 0$ zeigt, $|a|^2 = a^2$. Damit folgt die gewuenschte Aussage aus der Eindeutigkeit der Wurzel. $\square$

4. Archimedisches Axiom und Intervallschachtelungsprinzip

Die Ordnungsvollständigkeit ist von entscheidender Bedeutung für alle weiteren Untersuchungen. Sie kann in zwei Aspekte 'zerlegt' werden, nämlich Gültigkeit des Archimedischen Axiom und Konvergenz gewisser Folgen. Das Archimedische Axiom liefert insbesondere Existenz von

Nullfolgen und Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Eine Möglichkeit, Konvergenz von Folgen zu fassen, liefert das Intervallschachtelungsprinzip.

Wir beginnnen mit einer Diskussion des **Archimedischen Axiom**.

Zunaechst eine Vorueberlegung. Wir können die natürlichen Zahlen in natürlicher Weise als eine Teilmenge eines angeordnenten Koerpers auffasssen

PROPOSITION (Natürliche Zahlen als Teilmenge eines angeordneten Koerper). *Sei K ein angeordneter Koerper und $J : \mathbb{N} \longrightarrow K$ die eindeutige Abbildung mit*

$$J(e) = 1 \text{ und } J(\nu(n)) = J(n) + 1_K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist J injektiv mit $J(\mathbb{N}) \subset K^+$. Weiterhin gilt

$$J(n+m) = J(n) + J(m) \text{ und } J(nm) = J(n)J(m)$$

fuer alle $n, m \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $J(\mathbb{N})$ abgeschlossen unter Bildung von Summen und Produkten (d.h. mit $a, b \in J(\mathbb{N})$ gehören auch $a+b$ und ab wieder zu $J(\mathbb{N})$).

Bemerkung. Um die Struktur klarer hervorzuheben und Verwechselungen zu vermeiden, bezeichnen wir hier das ausgezeichnete Element von $\mathbb{N}$ als e und die Nachfolgeabbildung als ν.
Beweis. Zunaechst: Es gilt $J(n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bew. Induktion ($J(e) = 1_{\mathbb{R}} > 0$, $J(\nu(n)) = J(n) + 1_{\mathbb{R}} > 0$.)
Injektivität: Sei

$$L := \{n \in \mathbb{N} : J(n) \neq J(m) \text{ für alle } m \neq n\}.$$

Wir zeigen, daß L induktiv ist:
Es gilt $e \in L$**.** Sei $m \neq e$. Dann gilt $m = \nu(k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$J(m) = J(\nu(k)) = J(k) + 1_{\mathbb{R}} = J(k) + J(e) > J(e).$$

Dabei verwenden wir im letzten Schritt die Vorüberlegung. Mit $J(m) > J(1)$ folgt $J(m) \neq J(1)$.

$n \in L$ **impliziert** $\nu(n) \in L$**.** Sei $m \neq \nu(n)$.
Gilt $m = e$, so gilt nach dem schon bewiesenen $J(m) \neq J(\nu(n))$ (da $\nu(n) \neq e$).
Gilt $m \neq e$, so gilt $m = \nu(k)$. Wegen $m \neq \nu(n)$ folgt $k \neq n$. Aufgrund von $n \in L$ folgt dann also $J(n) \neq J(k)$. Unter Nutzen dieser Beziehung koennen wir dann rechnen

$$J(m) = J(\nu(k)) = J(k) + 1_{\mathbb{R}} \neq J(n) + 1_{\mathbb{R}} = J(\nu(n)).$$

Das liefert die Behauptung.

Vertraeglichkeit mit Addition, d.h. $J(n+m) = J(n) + J(m)$. Sei

$$L := \{n \in \mathbb{N} : J(n) + J(m) = J(n+m) \text{ für alle } m \in N\}.$$

Dann gilt $e \in L$ da $J(e)+J(m) = 1_K+J(m) = J(m)+1_K = J(\nu(m)) = J(m+e)$. Weiterhin gilt $n \in L \Longrightarrow \nu(n) \in L$, nach folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} J(\nu(n)) + J(m) &= (J(n) + 1_K) + J(m) \\ &= J(n) + (J(m) + 1_K) \\ &= J(n) + J(\nu(m)) \\ &= J(n + \nu(m)) \\ &= J(\nu(n) + m) \end{aligned}$$

Hierbei nutzt der erste und dritte Schritt die Definition von $J(\nu(k))$. Der letzte Schritt nutzt die weiter oben im Zusammenhang mit der Addition diskutierte Eigenschaft $n + \nu(m) = \nu(n) + m$.

Abgeschlossenheit unter Multiplikation. Analog. □

Notation. Wir definieren dann die *ganzen Zahlen in K* als

$$\mathbb{Z}_K := \{J(n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{-J(n) : n \in \mathbb{N}\}$$

und die *rationalen Zahlen in K* als

$$\mathbb{Q}_K := \{\frac{k}{J(n)} : k \in \mathbb{Z}_K, n \in \mathbb{N}\}.$$

Dann gilt also

$$\mathbb{Q}_K = \{\frac{J(k)}{J(n)} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{-\frac{J(k)}{J(n)} : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Wir schreiben dann im folgenden (meist) n statt $J(n)$ und auch $\frac{n}{m}$ statt $\frac{J(n)}{J(m)}$.

Bemerkung. (Uebung)

- Es enthaelt $\mathbb{Z}_K$ die Menge $J(\mathbb{N})$ und die Null und ist abgeschlossen unter Addition und Multiplikation und Bildung des Inversen bzgl. der Addition (und ist die kleinste Teilmenge von K mit diesen Eigenschaften).
- Es enthaelt $\mathbb{Q}_K$ die Menge $J(\mathbb{N})$ ist ein Koerper (und ist die kleinste Teilmenge von K mit diesen Eigenschaften).

Lemma (Charakterisierung Archimedisches Axiom). *Sei K ein angeordneter Körper. Dann sind äquivalent:*

(i) *Für alle $x > 0$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x < m$.* ***Zeichnung***
(ii) *Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} < \epsilon$.* ***Zeichnung***
(iii) *Für alle $x, y > 0$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $y < mx$ oder, äquivalent, $y/m < x$.*

Beweis. (iii)$\Longrightarrow$ (ii): Das folgt sofort mit $x = \epsilon$ und $y = 1$.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): (Nach (ii) angewendet auf $\epsilon = 1/x$) existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $1/m < 1/x$. Damit folgt dann durch Bilden des Kehrwertes $x < m$.

(i)$\Longrightarrow$ (iii): Wähle nach (i) ein $m \in \mathbb{N}$ mit $1/x < m$ also $1/m < x$. Wähle außerdem - wieder nach $(i)-$ ein $l \in \mathbb{N}$ mit $y/l < 1$. Dann gilt für $k = lm \in \mathbb{N}$ also

$$\frac{y}{lm} = \frac{1}{m}\frac{y}{l} < \frac{1}{m}1 < x.$$

□

Definition (Archimedisches Axiom). *Ein angeordneter Körper K erfüllt das Archimedische Axiom, wenn eine der äquivalenten Eigenschaften des vorigen Lemma gilt.*

Bemerkung. Nach dem bisher gezeigten bedeutet das Archimedische Axiom gerade, dass die Zahlen der Form $n1 = J(n)$ fue $n \in \mathbb{N}$, beliebig gross werden in K oder equivalent, dass die Zahlen $1/n$ beliebig klein werden in K.

Lemma (Dichtheit von $\mathbb{Q}$). *Sei K ein angeordneter Körper, der das Archimedische Axiom erfüllt. Dann gibt es zu $x, y \in K$ mit $x < y$ ein $q \in \mathbb{Q}_K$ mit $x < q < y$.*

Beweis. Ohne Einschraenkung (sonst Multiplikation mit -1) sei $0 < x < y$. Sei $\delta := y - x > 0$. Dann existiert nach dem Archimedischen Axiom ein $m \in \mathbb{N}$ mit $1 < m\delta = my - mx$.

Beh. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $mx < n < my$.

Bew. Angenommen, die Behauptung gilt nicht. Dann gilt fuer die Menge $L := \{k \in \mathbb{N}_0 : k1 \le mx\}$ die Gleichheit

$$L = \mathbb{N}_0.$$

(Denn $0 \in L$: klar. $k \in L \Longrightarrow k+1 \in L$: Sonst $k \le mx$ und $(k+1)1 > mx$. Dann muss aber, wegen $1 \le my - mx$ gelten $mx < (k+1)1 < my$ Widerspruch). Das ist ein Widerspruch zum Archimedischen Axiom.

Sind n, m wie in der Behauptung, so folgt nach Division durch m also $x < n/m < y$. □

$\longleftrightarrow$ Ende der Vorlesung

Folgerung. *In einem angeordneten Körper K, der das Archimedische Axiom erfüllt, gibt es dann also für jedes $s \in K$ und $\varepsilon > 0$ ein $q_+ \in \mathbb{Q}_K$ mit $q_+ > s$ und $|q_+ - s| < \varepsilon$ und $q_- \in \mathbb{Q}_K$ mit $q_- < s$ und $|q_- - s| < \varepsilon$ und insbesondere gilt also*

$$s = \sup\{q \in \mathbb{Q}_K : q < s\} = \inf\{q \in \mathbb{Q}_K : q > s\}.$$

Beweis. Wende das vorige Lemma an mit $x = s - \varepsilon$ und $y = s$ bzw. $x = s$ und $y = s + \varepsilon$. □

Folgerung. *Sei K ein angeordneter Körper, der das Archimedische Axiom erfüllt.*
(a) Sei $a > 1$. Dann existiert zu jedem $C \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n > C$.

(b) Sei $0 < a < 1$*. Dann existiert zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $0 < a^n < \epsilon$*.*

Beweis. (a) Das folgt aus der Bernoulli Ungleichung: $a = 1 + \delta$ mit $\delta > 0$. Also

$$a^n = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta > C.$$

Hier wird im letzten Schritt das Archimedische Axiom verwendet.
(b) Das folgt aus (a) durch Bilden des Kehrwertes. □

Theorem (Archimedisches Axiom). *In einem ordnungsvollstaendigen Koerper gilt das archimedische Axiom.*

Beweis. Zu zeigen: Sind $x, y > 0$ so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $ny > x$. Wir nehmen an, daß die Aussage nicht gilt. Dann ist die Menge

$$M := \{ny : n \in \mathbb{N}\}$$

also nach oben beschränkt (durch x). Damit besitzt sie aufgrund der Ordnungsvollständigkeit ein Supremum S. Da S eine obere Schranke fuer M ist, gilt dann also

$$(n + 1)x \leq S \text{ fuer alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt dann sofort

$$nx \leq S - x \text{ fuer alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit ist dann $S - x$ ist obere Schranke von M und kleiner als S. Widerspruch. □

Bemerkungen.

- Auch in $\mathbb{Q}$ gilt das Archimedische Axiom (Warum? $n/m \leq n$).
- Nicht in jedem angeordneten Körper gilt das Archimedische Axiom ($---->$ Nichtstandard Analysis).

Wir lernen nun das **Intervallschachtelungsprinzip** kennen.

Zunächst einige Bezeichnungen. Sei K ein angeordneter Körper. Dann definiert man für $a \leq b$ die *Intervalle*:

$[a, b] := \{x \in K : a \leq x \leq b\}$ *abgeschlossenes Intervall.*
$(a, b) := \{x \in K : a < x < b)$ *offenes Intervall* (kann leer sein).
$(a, b] := \{x \in K : a < x \leq b\}$ *nach links halboffenes Intervall.*
$[a, b) := \{x \in K : a \leq x < x\}$ *nach rechts halboffenes Intervall.*

Es heissen dann a, b die *Randpunkte* des Intervalles und $|I| := b - a$ die *Länge* des Intervalles.

Idee zur Intervallschachtelung: Eine geschachtelte Folge von Intervallen, die sich zusammenziehen. **Zeichnung**.

Definition. *Sei* K *ein angeordneter Körper. Eine Familie* I_n*,* $n \in \mathbb{N}$*, von Intervallen in* K *heißt Intervallschachtelung, wenn gilt:*

- *Jedes I_n ist abgeschlossen.*
- *$I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ('Geschachtelt')*
- *$|I_n| \to 0$, $n \to \infty$ (d.h. für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \epsilon$ für alle $n \geq n_\epsilon$). ('Zusammenziehen')*

Bemerkung. In der dritten Eigenschaft begegnen wir zum ersten mal in dieser Vorlesung dem, was wir spaeter als *Grenzwert* fassen werden. Grenzwert ist das zentrale Konzept der Analysis.

DEFINITION (Intervallschachtelungsprinzip). *Sei K ein angeordneter Körper. Dann erfüllt K das Intervallschachtelungsprinzip, wenn es zu jeder Intervallschachtelung I_n, $n \in \mathbb{N}$, einen Punkt $x \in K$ gibt mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bemerkung. Ist I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung, so kann es höchstens einen Punkt geben, der zu allen I_n gehört. Ein solcher Punkt ist also eindeutig.
(Bew. Seien x und y zwei solcher Punkte, so gilt $|x - y| \leq |I_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (da $x, y \in I_n$). Wegen $|I_n| \to 0$ gilt dann $|x - y| \leq \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Damit folgt $|x - y| = 0$.)

THEOREM. *In einem ordnungsvollstaendigen Koerper gilt das Intervallschachtelungsprinzip.*

Beweis. Es bilden die Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung. Zu zeigen: Es gibt ein x aus dem Koerper mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Es gilt (Induktion) $I_m \subset I_n$ für alle $m \geq n$. Damit folgt

$$a_m \leq b_n \quad (*)$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. (Fallunterscheidung $n \leq m : a_m \leq b_m \leq b_n$ und $m < n$: $a_m \leq a_n \leq b_n$. Zeichnung).
Damit ist also die Menge

$$M := \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$$

beschränkt (zum Beispiel durch b_1). Aufgrund der Ordnungsvollständigkeit existiert dann also

$$x := \sup M.$$

Da x eine obere Schranke von M ist gilt

$$a_m \leq x \quad (**)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Weiterhin ist aufgrund von $(*)$ aber jedes b_n, $n \in \mathbb{N}$, eine obere Schranke von M und es gilt dann (aufgrund der Supremumseigenschaft) also

$$x \leq b_n \quad (***)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Mit $(**)$ und $(***)$ folgt $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Bemerkung. (Uebung) Der obige Schluss nutzt nicht, daß sich die Intervalle zusammenziehen. Er funktioniert für jede Folge von ineinenander enthaltenenen abgeschlossenen Intervallen. Genauer gilt: Ist I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ in $\mathbb{R}$ mit $I_{n+1} \subset I_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\sup a_n \leq \inf b_n$ und

$$S := \bigcap_n I_n = [\sup a_n, \inf b_n].$$

Insbesondere ist S also nichtleer und ein abgeschlossenes Intervall. Wenn sich die Intervalle zusammenziehen (also eine Intervallschachtelung bilden), so besteht S nur aus einem Punkt. Ein entsprechende Aussage gilt im Allgemeinen nicht, wenn die Intervalle nicht abgeschlossen sind.

Wir kommen nun zur Beziehung zwischen Ordnungsvollstaendigkeit und Intervallschachtelungsaxiom und Archimedischem Axiom.

Theorem. *Sei K ein angeordneter Körper. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es ist K ordnungsvollständig.*
(ii) *Für K gilt das Intervallschachtelungsprinzip und das Archimedische Axiom.*

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Die entsprechende Aussagen wurden in den beiden vorigen Abschnitten gezeigt.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Sei M eine nichtleere Menge nach oben beschränkte Menge in K. Zu zeigen: M hat ein Supremum.

Sei C eine obere Schranke von M. Sei $u \in K$ keine obere Schranke von M z.b. $u = y - 1$ für ein $y \in M$. Wir konstruieren induktiv Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ mit

- Alle b_n sind obere Schranken von M.
- Alle a_n sind keine oberen Schraken von M.
- $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $|I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_n|$.

Dann bilden die I_n, $n \in N$, eine Intervallschachtelung (die letzte Eigenschaft liefert nach dem Archimedischen Axiom, daß $|I_n| = \frac{1}{2^n} \to 0$). Für den gemeinsamen Punkt x aller I_n (der nach Voraussetzung existiert) gilt dann

Ende der Vorlesung

- x ist obere Schranke (sonst $z \in M$ mit $x < z$ Widerspruch zu b_n beliebig nahe an x für große n und b_n obere Schranke. Zeichnung)
- Es gibt keine kleinere obere Schranke als x (sonst $m \leq z < x$, für alle $m \in M$. Widerspruch zu a_n beliebig nahe an x für große n und a_n keine obere Schranke. Zeichnung)

Nun zur Konstruktion: Wir setzen $I_1 := [u, C]$. Seien $I_1, \ldots, I_n$ wie oben schon konstruiert und $I_n = [a_n, b_n]$. Sei

$$m := (a_n + b_n)/2$$

der Mittelpunkt von I_n. Wir unterscheiden zwei Fälle (Zeichnung):

Fall 1: m ist obere Schranke von M. Wir setzen $I_{n+1} := [a_n, m]$. Zeichnung.

Fall 2: m ist keine obere Schranke von M. Wir setzen $I_{n+1} := [m, b_n]$. Dann hat I_{n+1} die gewünschten Eigenschaften.
Zeichnung 'konvergierende Intervalle'. □

5. Die Charakterisierung

THEOREM (Charakterisierung von $\mathbb{R}$). *Es gibt (bis auf Umbenennung) genau einen angeordneten, ordnungsvollständigen Körper.*

Bemerkung. Hier bedeutet 'Eindeutigkeit bis auf Unbennenung' folgendes: Sind K_1 und K_2 ordnungsvollstaendige Koerper, so gibt es eine eindeutige bijektive Abbildung

$$\alpha : K_1 \longrightarrow K_2$$

mit

- $\alpha(1_{K_1}) = 1_{K_2}$. ('$\alpha$ bildet die Eins auf die Eins ab')
- $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$ fuer alle $x, y \in K_1$. ('α vertraeglich mit Addition')
- $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ fuer alle $x, y \in K_1$. ('α vertraeglich mit Multiplikation')
- $\alpha(x) < \alpha(y)$ fuer $x < y$. ('α vertraeglich mit Ordnung')

In diesem Fall muss auch gelten $\alpha(0_{K_1}) = 0_{K_2}$ (wegen

$$1_{K_2} = \alpha(1_{K_1}) = \alpha(1_{K_1} + 0_{K_1}) = \alpha(1_{K_1}) + \alpha(0_{K_1}) = 1_{K_2} + \alpha(0_{K_1}).$$

In diesem Fall hat die inverse Abbildung von α die entsprechenden Eigenschaften. (Bew. Sei β die eindeutige Abbildung mit diesen Eigenschaften von K_2 nach K_1. Dann sind $\alpha \circ \beta$ bzw. $\beta \circ \alpha$ Abbildungen mit diesen Eigenschaften von K_2 nach K_2 bzw. K_1 nach K_1. Da auch die Identitaet auf K_1 bzw. K_2 diese Eigenschaften hat, folgt aus der Eindeutigkeit dann $\alpha \circ \beta = id_{K_2}$ und $\beta \circ \alpha = id_{K_1}$. Damit gilt $\beta = \alpha^{-1}$ und α^{-1} hat die gewuenschten Eigenschaften.)
Beweis. Es ist Existenz und Eindeutigkeit zu zeigen.

Eindeutigkeit bis auf Umbennenung. Wir muessen Existenz und Eindeutigkeit einer Abbildung α mit den angegebenen Eigenschaften zeigen. Offenbar muss eine Abbildung $\alpha : K_1 \longrightarrow K_2$, die mit Multiplikation vertraeglich ist und $\alpha(1_{K_1}) = 1_{K_2}$) erfuellt, auch mit Bildung des Inversen bzgl. der Multiplikation vertraeglich sein. Damit muss fuer ein solche α jedenfalls gelten

$$\alpha(\frac{n1_{K_1}}{m1_{K_1}}) = \frac{n1_{K_2}}{m1_{K_2}}$$

fuer alle $n, m \in \mathbb{N}$. Ebenso muss eine Abbildung $\alpha : K_1 \longrightarrow K_2$, die mit Addition vertraeglich ist und $\alpha(0_{K_1}) = 0_{K_2}$ erfuellt, auch mit Bilden des Inversen bzgl. der Addition vertraeglich sein. Damit muss fuer ein solche α jedenfalls gelten

$$\alpha(-\frac{n1_{K_1}}{m1_{K_1}}) = -\frac{n1_{K_2}}{m1_{K_2}}.$$

Damit ist ein solches α also eindeutig auf $\mathbb{Q}_{K_1}$ bestimmt. Umgekehrt wird durch die angegebenen Formeln offenbar ein $\alpha : \mathbb{Q}_{K_1} \longrightarrow \mathbb{Q}_{K_2}$ definiert, das mit Addition und Multiplikation vertraeglich ist und die Eins auf die Eins abbildet. Die (eindeutige) Fortsetzung auf K_1 ergibt sich aufgrund der Vertaeglichkeit mit der Ordnung dann unter Nutzen der oben bewiesenen Formel

$$x = \sup\{t < x : t \in \mathbb{Q}_{K_1}\}$$

durch

$$\alpha(x) = \sup\{\alpha(t) : t < x\}.$$

Existenz. Natürliche Zahlen werden mit Addition und Multiplikation versehen; dann Grothendiek Konstruktion für $(\mathbb{N}, +)$. Das liefert $(\mathbb{Z}, +)$. Tatsächlich kann man auch die Multiplikation fortsetzen in der offensichtlichen Weise. Nun Grothendieck Konstruktion auf $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$. Das liefert $(\mathbb{Q}, \cdot)$. Tatsächlich kann man auch die Addition fortsetzen. Das liefert $(\mathbb{Q}, \cdot, +)$. Nun Vervollständigen.

□

Notation. Dieser Körper wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet und die reellen Zahlen genannt.
Zeichnung. Linie, 0, positive, negative Zahlen, Spiegelung. Keine Lücken!

Da $\mathbb{R}$ ein angeordneter Koerper ist, ist die oben definierte Abbildung $J : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ injektiv und es gilt $J(n + m) = J(n) + J(m)$ und $J(nm) = J(n)J(m)$ fuer alle $n, m \in \mathbb{N}$. Damit sind die auf den natuerlichen Zahlen eingefuehrten Addition, Multiplikation und Ordnung gerade diejenigen, die $J(\mathbb{N})$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ erbt. Damit koennen und **werden** wir die natuerlichen Zahlen ab jetzt als Teilmenge von $\mathbb{R}$ auffassen. Die auf

Neben den natürlichen Zahlen bilden noch die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

und die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$$

wichtige Teilmengen der reellen Zahlen. Natuerliche, ganze und rationale Zahlen sind jeweils abgeschlossen unter Addition und Multiplikation. Die wesentliche zusaetzliche Eigenschaft der ganzen Zahlen (im Vergleich zu den natuerlichen Zahlen) ist die Abgeschlossenheit unter der Bildung von Differenzen. Die wesentliche zusaetzliche Eigenschaft der rationalen Zahlen (im Vergleich zu den ganzen Zahlen) ist die Abgeschlossenheit unter Bildung von Quotienten.

Gute Nachricht. Ab jetzt 'dürfen' wir in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ rechnen, wie wir es gewohnt sind. Dann wir haben die entsprechenden Objekte und Rechenregeln eingeführt bzw. bewiesen.

Nach Hause nehmen: $\mathbb{R}$ charakterisiert durch Zusammenspiel von drei Strukuren: Körper, Anordnung, Ordnunsvollständigkeit. Die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen und die rationalen Zahlen bilden Teilmengen von $\mathbb{R}$ (die unter gewissen Operationen abgeschlossen sind).

Bemerkung. (Uebung) In unserem Zugang haben wir zunaechst $\mathbb{N}$ eingefuehrt und das dann als Teilmenge von $\mathbb{R}$ wiedergefunden via J. Man kann auch direkt eine Kopie von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ finden auf folgende Art: Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ heisst *induktiv*, wenn sie die $1 \in \mathbb{R}$ enthaelt und mit jedem $m \in M$ auch gilt $m + 1 \in M$. Wie man leicht sieht, ist dann der Schnitt S ueber alle induktiven Mengen wieder eine induktive Menge. Weiterhin gilt $S = J(\mathbb{N})$. (Hinweis: Betrachte $L := \{m \in \mathbb{N} : J(m) \in S\}$. Dann sieht man leicht (wie) $L = \mathbb{N}$ und $J(\mathbb{N}) \subset S$ folgt. Die umgekehrte Inklusion ist einfach.)

KAPITEL 3

Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$

In diesem Kapitel lernen wir das zentrale Konzept der Analysis kennen, nämlich das Konzept der Konvergenz bzw. des Grenzwertes. Es ist grundlegend für alle weiteren Untersuchungen und (in gewisser Weise) das schwierigste Konzept der Analysis[1] Wir lernen diese Konzept fuer reelle Zahlen kennen. Dabei begegnen wir auch einem weiteren Aspekt der Vollstaendigkeit von $\mathbb{R}$, naemlich der Konvergenz von Cauchy-Folgen.

1. Definitionen und Rechenregeln

Wir beginnnen mit dem Konzept einer Folge. Man beachte, dass dieses Konzept nichts mit reellen Zahlen zu tun hat.

Definition (Folge). *Sei X eine Menge. Eine Abbildung $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$ heißt Folge (in X).*

Notation. Ist x eine Folge und $n \in \mathbb{N}$, so schreibt man meist x_n statt $x(n)$. Tatsaechlich schreibt man meist (x_n) oder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(x_n)_n$ fuer die Folge x.

Beispiele fuer Folgen in $\mathbb{R}$.

- Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig und $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto c$, also $x_n = c$ für alle n. Dann heißt (x_n) die *konstante* Folge mit Wert c.
- $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto \frac{1}{n}$, also $x_n = \frac{1}{n}$.
- $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto (-1)^n$, also $x_n = (-1)^n$.

Wir kommen nun zum Konzept der **Konvergenz**.

Idee. Die Folge (x_n) konvergiert gegen den Wert x, wenn für alle genügend großen n die Zahl x_n der Zahl x beliebig nahe ist.

Es wird nun darum gehen, diese Idee und insbesondere 'genuegend gross' und 'beliebig nahe' praezise zu fassen. Das verlangt Arbeit, da es um das Verhalten der Folge im Unendlichen geht.

[1] Entsprechend verlangt es eine tatkraeftige Auseinandersetzung. Gleichzeitig bedeutet das Meistern dieses Konzeptes auch, dass man keinerlei Form von Analysis mehr zu fürchten hat.

Definition (Konvergenz). *Die Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ konvergiert gegen x, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodaß für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt $|x_n - x| < \varepsilon$. Dann heißt x Grenzwert der Folge (x_n). Eine Folge, die nicht gegen ein x konvergiert heißt divergent.*

Zwei Deutungen: Es ist $|x - x_n| < \varepsilon$ aequivalent zu

$$x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Damit kann man Konvergenz deuten mittels der ε- Falle und des ε-Schlauch.

Ende der Vorlesung

Eindeutigkeit des Grenzwertes. Eine Folge (x_n) kann nicht gegen zwei verschiedene Grenzwerte konvergieren (d.h. der Grenwert ist eindeutig, wenn er existiert).
Beweis: Es konvergiere (x_n) gegen x und gegen y. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es also $n_\varepsilon^{(x)}$ mit $|x - x_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon^{(x)}$, und es gibt $n_\varepsilon^{(y)}$ mit $|y - x_n| < \varepsilon$ für $n \geq n(y)_\varepsilon$. Mit $n \geq n_\varepsilon^{(x)}, n_\varepsilon^{(y)}$ gilt dann also

$$|x - y| = |x - x_n + x_n - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| < 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $|x - y| = 0$, also $x = y$.

Aufgrund der Eindeutigkeit kann man von *dem* Grenzwert einer Folge sprechen (falls existent).

Notation. Konvergiert (x_n) gegen x, so schreibt man auch

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n \text{ oder } x_n \longrightarrow x, n \longrightarrow \infty.$$

(lies: ' x gleich Grenzwert von x_n fuer n gegen unendlich, bzw. x_n gegen x fuer n gegen unendlich'.)

Bemerkung - Konvergenz entscheidet sich ganz weit draussen : $x_n \to x$. Sei $N > 0$ und (y_n) Folge mit $x_n = y_n$ für $n \geq N$. Dann gilt $y_n \to x$.
Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$. Für $n \geq n_\varepsilon, N$ gilt also

$$|y_n - x| = |x_n - x| < \varepsilon.$$

Bemerkung - Quantoren. Die Definition von Konvergenz und zugehoerige Betrachtungen lassen sich mit sogenannten Quantoren ausdrücken. Wir werden in dieser Vorlesung kaum Quantoren benutzen (aber die zugrundeliegenden Zusammenhaenge natürlich ständig verwenden). In Quantoren lautet die Definition von Konvergenz einer Folge:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_\varepsilon \, |x - x_n| < \varepsilon.$$

Hier: '$\forall \diamond$' steht für 'Für alle / jedes $\diamond$ gilt:'

'$\exists\clubsuit$' steht für 'Es existiert $\clubsuit$ mit der Eigenschaft, daß / sodaß...'. Damit ergibt sich auch, daß Quantoren immer an den Anfang der Aussage gestellt werden müssen.

Drei Beispiele.

- Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist die konstante Folge $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_n = c$, konvergent gegen c.

  Bew...
- Sei $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_n = \frac{1}{n}$. Dann konvergiert x_n gegen 0.

  Bew. Das folgt aus dem Archimedischen Axiom.

  In gewisser Weise ist dies die einzige explizite konvergente Folge, die wir kennen.
- Sei $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_n = (-1)^n$ d.h. $x_n = -1$ für ungerade n und $x_n = 1$ für gerade n. Dann ist (x_n) nicht konvergent.

  Bew. Wir beweisen ein allgemeines Kriterium.

  Beh. Ist (x_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$, so konvergiert die Folge $y_n := x_{n+1} - x_n$ gegen 0.

  Bew. ...

  Mit diesem allgemeinen Kriterium sieht man sofort, daß $x_n = (-1)^n$ nicht konvergiert, da y_n immer den Betrag 2 hat.

Definition (Nullfolge). *Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to 0$ heisst Nullfolge.*

Bemerkung (Uebung). (a) Es gilt $x_n \to 0$ genau dann wenn gilt $|x_n| \to 0$.

(b) Es sind aequivalent fuer eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$:

(i) Es konvergiert (x_n) gegen x.

(ii) Es ist $(x_n - x)$ eine Nullfolge.

(iii) Es ist $(|x_n - x|)$ eine Nullfolge.

Proposition. *Ist (x_n) eine Nullfolge in $\mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig, so sind auch (x_n^k) und $(\sqrt[k]{|x_n|})$ Nullfolgen.*

Beweis. Wir betrachten zunaechst den Fall (x_n^k): Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da (x_n) eine Nullfolge ist, existiert ein $n' \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| = |x_n - 0| < \sqrt[k]{\varepsilon}$ fuer alle $n \geq n'$. Damit gilt dann fuer alle $n \geq n'$ auch

$$|x_n^k - 0| = |x_n^k| = |x_n|^k < \left(\sqrt[k]{\varepsilon}\right)^k = \varepsilon.$$

Wir betrachten nun den Fall $(\sqrt[k]{|x_n|}$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da (x_n) eine Nullfolge ist, existiert ein $n' \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| = |x_n - 0| < \varepsilon^k$ fuer alle $n \geq n'$. Damit gilt dann fuer alle $n \geq n'$ auch

$$|\sqrt[k]{|x_n|} - 0| = \sqrt[k]{|x_n|} < \sqrt[k]{\varepsilon^k} = \varepsilon.$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Wir geben jetzt noch eine leichte Umformulierung der Definition von Konvergenz. Zu $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ sei die ε-Umgebung (oder ε-Kugel um x) $U_\varepsilon(x)$ von x definiert durch

$$U_\varepsilon(x) := \{z \in \mathbb{R} : |z - x| < \varepsilon\}.$$

Bemerkung. Allgemein nennt man eine Menge U Umgebung von $x \in \mathbb{R}$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x) \subset U$.

PROPOSITION (Charakterisierung Konvergenz). *Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *(x_n) konvergiert gegen x*

(ii) *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so daß für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt $x_n \in U_\varepsilon(x)$.*

(iii) *Für alle $\varepsilon > 0$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N} : x_n \notin U_\varepsilon(x)\}$ endlich (d.h. für jedes feste $\varepsilon > 0$ liegen bis auf endlich viele Ausnahmen alle x_n in der ε-Umgebung von x).*

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist klar (wegen $z \in U_\varepsilon(x) \Longleftrightarrow |z - x| < \varepsilon$.)
$(ii) \Longleftrightarrow (iii)$: Das folgt, da eine Teilmenge A von $\mathbb{N}$ genau dann endlich ist, wenn es ein $m \in N$ gibt mit $A \subset A_m$. $\square$

Es gilt

$$U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Eine solche Umgebung ist also nichts anderes als ein offenes Intervall um x. In diesem Sinne hätten wir das Konzept der Umgebung also nicht neu einführen müssen. Für spätere Verallgemeinerungen erweist sich aber das Denken mit Umgebungen als sehr nütztlich.

Bevor wir uns der Existenz konvergenter Folgen widmen, sammeln wir hier schon einmal ein paar nützliche Eigenschaften.

FOLGERUNG. *Ist die Folge (x_n) in $\mathbb{R}$, so ist die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt.*

Beweis. Sei $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Für $n \geq n_1$ gilt $|x - x_n| < 1$, also

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| \leq 1 + |x|.$$

Damit folgt

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_1 - 1}|, 1 + |x|\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Bemerkung. Beschränktheit einer Folge hängt nicht von den ersten endlich vielen Gliedern ab.

Wir werden nun beweisen, daß Konvergenz mit einer ganzen Reihe von Operationen vertraeglich ist. Die folgenden Betrachtungen zeigen insbesondere, daß Konvergenz mit den Operationen $+$, $\cdot$, $:$ und $|\cdot|$ verträglich ist.

PROPOSITION (Rechenregeln). *Seien* (x_n) *und* (y_n) *Folgen in* $\mathbb{R}$ *mit* $x_n \to x$ *und* $y_n \to y$. *Dann gilt.*
(a) $x_n + y_n \to x + y$.

(b) $x_n - y_n \to x - y$.

(c) $x_n \to x$, $y_n \to y \Longrightarrow x_n y_n \to xy$. *Insbesondere* $\alpha x_n \to \alpha x$ *für* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Gilt zusaetzlich noch $y \neq 0$, *so folgt* $y_n \neq 0$ *für* $n \geq n_0$ *und es gilt* $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{1}{y}$ *(wobei nur* $n \geq n_0$ *betrachtet werden.*

Bemerkung. Später werden wir obige Proposition so ausdruecken: Die Abbildungen $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \to x+y$, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \to xy$ und $:: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x/y$ sind stetig.

Beweis. (a) Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $x_n \to x$ gibt es ein n_x mit $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_x$. Wegen $y_n \to y$ gibt es ein n_y mit $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_y$. Für $n \geq n_\varepsilon := \max\{n_x, n_y\}$ gilt dann also nach Dreiecksungleichung

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b) Wegen (a) reicht es $-y_n \to -y$ zu beweisen. Das folgt aber sofort aus

$$|-y_n - y| = |-(y_n - y)| = |y_n - y.$$

Ende der Vorlesung

(c) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Wähle $C > 0$ mit $|x_n| \leq C$ für alle n. Wegen $x_n \to x$ existiert $n_x \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2|y|+1}$.Wegen $y_n \to y$ existiert $n_y \in \mathbb{N}$ mit $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2C}$. Damit gilt für $n \geq \max\{n_x, n_y\}$ also

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \leq |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x| ...$$

(d) Wegen (b) reicht es $x_n = 1$ betrachten. Wegen $y_n \to y$ existiert ein n_0 mit $|y_n - y| < \frac{|y|}{2}$ für $n \geq n_0$. Damit gilt also für $n \geq n_0$

$$|y_n| \geq |y| - |y_n - y| > |y|/2 > 0.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $y_n \to y$ existiert ein n_y mit

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon |y|^2}{2}.$$

Für $n \geq \max\{n_x, n_y, n_1\}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y}\right| &= \left|\frac{y-y_n}{yy_n}\right|\\ &\leq \frac{2}{|y|^2}|y-y_n|\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Proposition (Vertraeglichkeit mit Betrag). *Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to x$, $n \to \infty$. Dann folgt $|x_n| \to |x|$, $n \to \infty$.*

Beweis. Das folgt sofort aus der zweiten Dreiecksungleichung

$$||x| - |x_n|| \leq |x - x_n| :$$

Ist naemlich $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so existiert aufgrund von $x_n \to x$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x - x_n| < \varepsilon$ fuer alle $n \geq N$ und aufgrund der genannten Dreiecksungleichung gilt dann fuer solche n ebenfalls $||x| - |x_n|| < \varepsilon$. □

Proposition (Verträglichkeit mit Bildung von Maximum und Minimum). *Seien (x_n) und (y_n) Folgen in $\mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Dann gilt* $\max\{x_n, y_n\} \to \max\{x, y\}$ *und* $\min\{x_n, y_n\} \to \min\{x, y\}$.

Beweis. Es gilt (siehe Uebung)

$$\min\{a, b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}, \ \max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$$

Nun folgt die Behauptung aus den schon gezeigten Aussagen zur Vertraeglichkeit der Konvergenz mit Betragsbildung und mit Addition und Subtraktion. □

Proposition (Verträglichkeit von Konvergenz mit $\leq$). *Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \leq c$ / $x_n \geq c$ und $x_n \to x$. Dann gilt $x \leq c$ / $x \geq c$.*

Beweis. Wir betrachten $x_n \leq c$. Angenommen $x > c$. Dann ist $\varepsilon := x - c > 0$. Wegen $x_n \to x$ müsste gelten $x_n \in U_\varepsilon(x)$ für große n, also $x_n > c$. Widerspruch. □

Bemerkung. Gilt $x_n < c$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $x_n \to x$ so folgt im allgemeinen NICHT $x < c$. Beispiel: $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Dann $x_n < 1$, aber $x = \lim x_n = 1$

Theorem (Sandwichtheorem). *Seien $L \in \mathbb{R}$ und konvergente Folgen (x_n) und (y_n) in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = L = \lim_{n\to\infty} y_n$ gegeben. Ist (z_n) eine weitere Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \leq z_n \leq y_n$ für alle n ab einem gewissen $n_0 \in \mathbb{N}$, so konvergiert (z_n) ebenfalls gegen L.*

Beweis. **Zeichnung.**
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Wegen $L = \lim x_n$ gibt es ein $n_x \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq L - \varepsilon$ für alle $n \geq n_x$.
Wegen $L = \lim y_n$ gibt es ein $n_y \in \mathbb{N}$ mit $y_n \leq L + \varepsilon$ für alle $n \geq n_y$.
Für $n \geq n_x, n_y, n_0$ gilt dann also

$$L - \varepsilon \leq x_n \leq z_n \leq y_n \leq L + \varepsilon$$

und damit

$$|z_n - L| < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Es ist sinnvoll in gewissen Fällen auch $\pm\infty$ als Wert zuzulassen: Tatsechlich gibt es unter den divergenten Folgen in $\mathbb{R}$ zwei Klassen von Folgen mit besonders guten Eigenschaften:

- Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ heißt *bestimmt divergent* oder *uneigentlich konvergent* gegen ∞, $x_n \to \infty$, wenn für jedes $C \in \mathbb{R}$ ein $n_C \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \geq C$ für alle $n \geq n_C$.
- Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ heißt *bestimmt divergent* oder *uneigentlich konvergent* gegen $-\infty$, $x_n \to -\infty$, wenn für jedes $C \in \mathbb{R}$ ein $n_C \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \leq C$ für alle $n \geq n_C$.

Bei vorsichtigem Umgang mit ∞ bleiben einige Rechenregeln für konvergente Folgen auch für bestimmt divergente Folgen noch gültig. Eine **wichtige Ausnahme** stellt der Umgang mit Termen der Form $0 \cdot \infty$ und $\infty - \infty$ dar (siehe Übung).

Bemerkung. Es gilt folgende Aequivalenz: $x_n \to \infty \iff x_n > 0$ für alle genuegend großen n und $1/x_n \to 0$. Entsprechendes gilt fuer $x_n \to -\infty$. Damit ist die bestimmte Divergenz in gewisser Weise eine Konvergenz in Verkleidung und das erklaert auch, warum manche Rechenregeln dann gueltig bleiben.

Beispiele.

- Sei $x_n = n$. Dann gilt $x_n \to \infty$.
- Sei $x_n = \sqrt[k]{n}$. Dann gilt $x_n \to \infty$. (Bew. Sei $C > 0$ beliebig. Waehle $n_c \in \mathbb{N}$ mit $n_c \geq C^k$. Ein solche n_c existiert nach dem Archimedischen Axiom. Dann gilt fuer $n \geq n_c$ aber

  $$x_n = \sqrt[k]{n} \geq \sqrt[k]{n_c} \geq \sqrt[k]{C^k} = C.$$

  Das beendet den Beweis.)
- $\sqrt[n]{n!} \to \infty$, $n \to \infty$.
  Bew. $n! = n(n-1)\cdots 1 \geq n/2 \cdots n/2 = (n/2)^{n/2}$. ($n/2$-Faktoren). Damit $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{(n/2)^{n/2}} = (n/2)^{1/2} \to \infty$.

Ähnlich kann man für Supremum und Infimum von unbeschränkten Mengen verfahren:

- Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ist M nicht nach oben / unten beschränkt, so setzten wir $\sup M = \infty$ / $\inf M = -\infty$ und nennen $+\infty$ bzw. $-\infty$ das *uneigentliche* Supremum bzw. Infimum.

Bemerkung.

- Gilt $\sup M = \infty$, so existiert Folge (x_n) in M mit $x_n \to \infty$. Entsprechendes gilt für Infimum.
- Mit obiger Definition hat also jede Menge M in $\mathbb{R}$ ein Supremum bzw. ein Infimum.

Mit den bisherigen Betrachtungen können wir Konvergenz einiger Folgen untersuchen.

Beispiele. (a) Sei $a \neq 0$ und $x_n = \frac{a}{n}$. Dann konvergiert (x_n) gegen 0. (Nullfolge).
Bew. Archimedes oder Rechenregeln $a/n = a \cdot \frac{1}{n}$.

(b) Sei $0 < q < 1$ und $x_n = q^n$. Dann konvergiert (x_n) gegen 0. (Exponentielles Fallen).

Bew. Das ist eine Folgerung aus dem Archimedischen Axiom und wurde oben schon behandelt.

Ende der Vorlesung

(c) Sei $0 < q < 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Sei $x_n = q^n n^k$. Dann gilt $x_n \to 0$, $n \to \infty$. (Exponentielles Fallen schlägt polynomielles Wachsen. Tatsaechlich ist es eine allgemeine Philosopie das exponentielles Verhalten immer gegen Polynomielles Verhalten gewinnt.)

Beachte. $q^n \to 0$, aber $n^k \to \infty$ für $k > 1$. Die Frage ist also, welcher Effekt sich durchsetzt.

Bew. Plan: Schreibe q^n also $p^{2kn} = p^{kn} p^{kn}$ mit geeignetem p mit $0 < p < 1$. Dann gilt also

$$q^n n^k = p^{kn} p^{kn} n^k = p^{kn}(p^{kn} n^k).$$

Erster Term gegen Null; zweiter Term beschränkt. Hier sind die Details:
$p := \sqrt[2k]{q} < 1$.
Also $1/p = 1 + a$ mit $a > 0$. Die Bernoulli - Ungleichung impliziert $(1/p)^n \geq 1 + na$ und damit $0 < p^n < \frac{1}{na}$. Mit $0 \leq q^n = p^{2kn}$ folgt also

$$0 \leq q^n n^k \leq p^{kn} p^{kn} n^k \leq p^{kn} \left(\frac{1}{na}\right)^k n^k = p^{kn} \left(\frac{1}{a}\right)^k.$$

Damit folgt die Aussage aus (b) und dem Sandwichtheorem.

(d) Sei $a > 0$ und $x_n = \sqrt[n]{a}$. Dann gilt $x_n \to 1$, $n \to \infty$.

Bew. Wir unterschieden drei Fälle:

$a = 1$. Das ist einfach.

$a > 1$: Wegen $a > 1$ und $a = x_n^n$ gilt $x_n > 1$. Weiterhin gilt

$$a = x_n^n = (1 + (x_n - 1))^n \geq 1 + n(x_n - 1).$$

Damit folgt $(a-1)/n \geq x_n - 1 \geq 0$ und dann $(a-1)/n + 1 \geq x_n \geq 1$. Damit folgt nach (a) und dem Sandwichtheorem $x_n \to 1$.

$0 < a < 1$: Das folgt nach Bilden des Kehrwertes aus dem schon bewiesenen.

(e) Sei $x_n = \sqrt[n]{n}$. Dann gilt $x_n \to 1$, $n \to \infty$.

Beachte. Wettstreit zwischen $\sqrt[n]{a} \to 1$ und $n \to \infty$ für $n \to \infty$. Die Frage ist also, welcher Effekt sich durchsetzt.

Bew. Es gilt $x_n^n = n$, also insbesondere $x_n > 1$. Mit binomischem Satz folgt

$$n = (1+(x_n-1))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(x_n-1)^k \geq \binom{n}{2}(x_n-1)^2 = \frac{n(n-1)}{2}(x_n-1)^2,$$

also

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq x_n - 1 \geq 0,$$

also

$$1 \leq x_n \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Mit $\frac{2}{n-1} \to 0$, $n \to \infty$, folgt auch $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0$, $n \to \infty$. Damit folgt Behauptung aus dem Sandwichtheorem.

2. Aspekte der Vollständigkeit bzgl. Folgen

Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ liefert die Konvergenz ganzer Klassen von Folgen, sogenannter Cauchy-Folgen. Tatsächlich ist diese Konvergenz zusammen mit dem Archimedischen Axiom ein Charakteristikum der reellen Zahlen. Das wird in diesem Abschnitt studiert.

Definition. *Sei K ein angeordneter Koerper. Eine Folge (x_n) in heißt monoton wachsend / fallend wenn $x_{n+1} \geq x_n$ / $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Zeichungen einer nach oben beschränkten monotonen Folge: auf der Achse, oder als Graph...

Bemerkung. Ist (x_n) monoton wachsend, so gilt $x_n \leq x_m$ fuer alle $n \leq m$ (nach einer einfachen Induktion). Entsprechendes gilt fuer monoton fallende Folgen.

Definition. *Sei K ein angeordneter Koerper. Eine Folge (x_n) in K heißt nach oben / unten beschränkt, wenn die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben / unten beschränkt ist.*

THEOREM (Konvergenz monotoner beschränkter Folgen). *Jede monoton wachsende / fallende nach oben / unten beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.*

Beweis. **Zeichnung.** Sei (x_n) eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge. Dann existiert also aufgrund der Ordngungsvollständigkeit

$$S := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Da S eine obere Schranke von ist, gilt

$$x_n \leq S$$

fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert, da $S - \varepsilon$ keine obere Schranke ist, also ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$S - \varepsilon \leq x_{n_\varepsilon}.$$

Damit folgt also für alle $n \geq n_\varepsilon$ aufgrund der Monotonie

$$S - \varepsilon \leq x_{n_\varepsilon} \leq x_n \leq S$$

also $|S - x_n| < \varepsilon$.

Der Fall monoton fallender nach unten beschränkter Folgen kann analog behandelt werden. $\square$

Bemerkung.

- Neben der Konvergenz von $(\frac{1}{n})$ gegen 0 haben wir also in unseren Zugang zu $\mathbb{R}$ eine Methode zur Erzeugung konvergenter Folgen eingebaut.
- Mit dem Theorem sieht man leicht folgendes: Ist die Folge (x_n) wachsend / fallend, so gilt $x_n \to C$, wobei $C \in \mathbb{R}$ (falls die Folge (x_n) beschraenkt ist) und $C = \infty$ / $C = -\infty$ (falls die Folge (x_n) unbeschraenkt ist).

Beispiel - die Exponentialfunktion:
Sei $a \in \mathbb{R}$. Sei $x_n := (1 + a/n)^n$. Dann konvergiert (x_n). Wir nennen den Grenzwert $e(a)$.

Bemerkungen. (a) Der angegebene Ausdruck spielt bei Wachstumsvorgaengen eine Rolle. So erhaelt man etwa bei Verzinsung mit Zinssatz $a > 0$ und Kapital A bei

- 0 mal (äquidistant) Abheben und Einzahlen : $A(1 + a)$
- 1 mal (äquidistant) Abheben und Einzahlen: $A(1 + \frac{a}{2})(1 + \frac{a}{2})$
- 2 mal (äquidistant) Abheben und Einzahlen: $A(1 + \frac{a}{3})(1 + \frac{a}{3})(1 + \frac{a}{3})$.
- etc.

Der Grenzwert $e(a)$ gibt dann an, was aus dem Kapital nach einem Jahr bei sogenannter stetiger Verzinsung geworden ist.

(b) Fuer $a = 1$ erhaelt man die Eulersche Zahl

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/n}.$$

(c) Spaeter werden wir zeigen $e(a)e^a$. (Im Moment konnen wir nicht einmal e^a definieren.)

Bew. Wir betrachten zunaechst den Fall $a > 0$ und zeigen Monotonie und Beschränktheit.

Monotonie:

$$\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \\
\text{(kleine Rechnung)} \quad &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n\cdot n\cdots n}\frac{a^k}{k!} \\
\text{(Fuer } 0 \leq l < r \text{ gilt } l/r \leq (l+1)/(r+1)\text{))} \quad &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)n\cdots(n+1-k+1)}{(n+1)\cdot(n+1)\cdots(n+1)}\frac{a^k}{k!} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)n\cdots(n+1-k+1)}{(n+1)\cdot(n+1)\cdots(n+1)}\frac{a^k}{k!} \\
&= x_{n+1}.
\end{aligned}$$

(Alternativer direkter Beweis der Monotonie: Sei $a > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)\left(\frac{1+\frac{a}{n+1}}{1+\frac{a}{n}}\right)^n \\
&= \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)\left(\frac{(n+1+a)n}{(n+a)(n+1)}\right)^n \\
&= \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)\left(\frac{(n+1)n+na}{(n+1)(n+a)}\right)^n \\
&\geq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)\left(1 - \frac{a}{(n+1)(n+a)}\right)^n \\
\textit{(Bernoulli)} \quad &\geq \left(1 + \frac{a}{n+1}\right)\left(1 - \frac{na}{(n+1)(n+a)}\right) \\
&= \left(\frac{n+1+a}{n+1}\right)\left(\frac{(n+1)(n+a)-an}{(n+1)(n+a)}\right) \\
\textit{(Sortieren n. Potenzen)} \quad &= \frac{n^3+n^2(a+2)+n(1+2a)+a(1+a)}{n^3+n^2(a+2)+n(1+2a)+a} \\
(a>0) \quad &\geq 1)
\end{aligned}$$

Beschränkteit:

Aus den Abschaetzungen im Beweis der Monotonie erhalten wir sofort
$$x_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}.$$
Wähle nun $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2a$. Dann gilt
$$x_n = \sum_{k=0}^{N} \frac{a^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{a^k}{k!} = C + \frac{a^{N+1}}{N!} \sum_{k=N+1}^{n} \frac{a^{k-N-1}}{(N+1)\cdots k} \leq C + \frac{a^{N+1}}{N!} 3.$$
(Grundidee $a^k/k!$ ist schließlich a/l mit l groß....)

Bemerkung. Der Beweis zeigt auch, dass die Folge $y_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$ konvergiert. (Denn es ist offenbar (y_n) monoton und - wie im Beweis gezeigt - beschraenkt.) Spaeter werden wir zeigen, dass auch (y_n) gegen $e(a)$ konvergiert. Es gilt also
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}.$$

Die bisherigen Betrachtungen wurden fuer $a > 0$ gemacht. Offenbar haben wir auch Konvergenz (gegen 1) fuer $a = 0$. Tatsaechlich hat man auch Konvergenz fuer $a < 0$. Um das zu sehen, kann man so vorgehen: Sei $a < 0$ und $b := -a > 0$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \frac{1}{e(b)}$.
Bew. (Übung).= Idee $\left(1 + \frac{b}{n}\right)^n \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = (1 - b^2/n^2)^n$ konvergiert gegen 1...

Beispiel - k-te Wurzel. (Übung) Sei $a > 0$ beliebig. Definiere induktiv die Folge (x_n) durch $x_0 := c > 0$ beliebig und
$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) = x_n + \frac{x_n}{k}\left(\frac{a}{x_n^k} - 1\right).$$
Dann konvergiert die Folge (x_n) gegen $\sqrt[k]{a}$.
Beweisskizze: Offenbar (?Induktion!) gilt $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bernoulli Ungleichung liefert (Wie?):
$$x_{n+1}^k \geq a$$
für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt nach Definition
$$x_n - x_{n+1} = \frac{x_n}{k}\left(1 - \frac{a}{x_n^k}\right).$$
Damit ist also (Warum?) $(x_n)_{n\geq 2}$ monoton fallend und durch 0 nach unten beschränkt. Also konvergiert die Folge (x_n) nach dem Satz gegen einen Grenzwert b. Dieser Grenzwert erfüllt (Wieso?)
$$b = \frac{1}{k}\left((k-1)b + \frac{a}{b^{k-1}}\right)$$
und damit gilt dann (Wieso?) auch $b^k = a$.

Bemerkung.(Fuer spaeter ;-) Diese Betrachtungen sind ein Fall des sogenannten Newton Verfahren. Damit kann man (oft) eine Nullstelle einer Funktion f (hier $x^k - a$) auf folgende Art berechnen:

$n = 0$: Wähle einen (geeigneten) Wert p.

$n \Longrightarrow n + 1$: Ist x_n schon bestimmt, so berechnet man x_{n+1} wie folgt: Bilde die Tangente an $(x, f(x))$ und berechne ihren Schnitt mit der x-Achse. Dieser Schnittpunkt ist dann x_{n+1}. (Zeichnung). Rechnung liefert die Rekursion

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Im konkreten Fall geht es um die Funktion $f(x) = x^k - a$.

Ende der Vorlesung

Der Satz zur Konvergenz monotoner Folgen mag erst einmal speziell erscheinen, da keineswegs jede Folge monoton ist. Aber er hat weitreichende Konsequenzen. Um das näher zu erläutern, brauchen wir noch einen neuen Begriff:

Definition (Teilfolge). *Sei $(x_n)_n$ eine Folge und $(n_k)_k$ eine strikt wachsende Folge in $\mathbb{N}$ (d.h. $n_{k+1} > n_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$). Dann heißt (x_{n_k}) eine Teilfolge von (x_n).*

Bemerkungen.

- Ist $n_\bullet : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, k \mapsto n_k$ und $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$, so ist (x_{n_k}) gerade die Abbildung $x \circ n_.$.
- Für den Begriff der Teilfolge ist nicht wichtig, daß die Werte der Folge in $\mathbb{R}$ liegen.

Zeichnung. $x_1, x_2 \ldots$ vs $x_{n_1}, x_{n_2} \ldots$

Beispiel. $x_n = (-1)^n$. Dann ist (x_{2n}) die konstante Folge 1 und (x_{2n+1}) die konstante Folge -1. Diese Teilfolgen sind konvergent also 'schöner' als die Ursprungsfolge. Das ist ein allgemeines Phänomen (s.u.).

Das folgende Lemma zeigt, daß der Unterschied zwischen beliebigen Folgen und monotonen Folgen doch nicht so groß ist.

Lemma. *Jede Folge in $\mathbb{R}$ enthält eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Ein $N \in \mathbb{N}$ heißt Gipfelpunkt von (x_n), wenn gilt $x_N \geq x_n$ für alle $n \geq N$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: Es gibt unendlich viele Gipfelpunkte. Sei $n_k := k$-ter Gipfelpunkt. Dann ist $n_1 < n_2 < \ldots n_k < n_{k+1}$ die Folge von Gipfelpunkten. Daher gilt also

$$x_{n_k} \geq x_{n_{k+1}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und (x_{n_k}) ist eine monoton fallende Teilfolge.

Fall 2: Es gibt nur endlich viele Gipfelpunkte. Wir konstruieren induktiv streng monoton wachsende (n_k), so daß x_{n_k} monoton wachsend ist.

$k = 1$: Wähle n_1 größer als jeden Gipfelpunkt (möglich, da nur endlich viele Gipfelpunkte).

$k \Longrightarrow k+1$: Seien $n_1 < n_2 \ldots < n_k$ schon konstruiert. Da n_k kein Gipfelpunkt ist ($n_k > n_1 > jeder\, Gipfelpunkt$), gibt es ein $n_{k+1} > n_k$ mit $x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$. □

Theorem (Satz von Bolzano - Weierstraß). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ enthält eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Nach dem vorigen Lemma enthält die Folge eine monotone Teilfolge. Diese ist beschränkt (da die Ursprungsfolge beschränkt ist). Damit konvergiert die Teilfolge nach dem Satz über Konvergenz monotoner beschränkter Folgen. □

Wir werden nun Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$ charakterisieren. Dazu benötigen wir den folgenden Begriff.

Definition (Cauchy Folge). *Eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ heißt Cauchy-Folge wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $n, m \geq n_\varepsilon$ gilt*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Idee. Folgeglieder sind beliebig nahe aneinander für genügend große n und m.

Bemerkung. In Quantorisch:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n, m \geq n_\varepsilon\, |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Lemma. *Jede konvergente Folge in $\mathbb{R}$ ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. (Eigentlich klar: Wenn Folgeglieder nahe am Grenzwert sind, sind sie auch nahe aneinander. **Zeichnung**.)
Details: Sei $x_n \to x$, $n \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_\varepsilon$. Also

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für $n, m \geq n_\varepsilon$. □

Lemma. *Eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ mit einer konvergenten Teilfolge ist konvergent (gegen den Grenzwert der Teilfolge).*

Beweis. Sei (x_n) eine Cauchy-Folge und sei (x_{n_k}) eine gegen x konvergente Teilfolge. Wir zeigen $\lim x_n = x$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Es existiert $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m, n \geq n_\varepsilon$ (da Cauchy Folge).

Es existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k \geq k_0$ (da Teilfolge konvergent).

Sei nun $k \geq k_0$ mit $n_k \geq n_\varepsilon$ gewählt.
Es gilt für alle $n \geq n_\varepsilon$

$$|x_n - x| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Das beendet den Beweis. □

Wir kommen nun zur angekündigten Charakterisierung von Konvergenz.

THEOREM (Cauchy-Kriterium). *Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *(x_n) ist konvergent.*
(ii) *(x_n) ist eine Cauchy Folge.*

Beweis. Die Implikation $(i) \Longrightarrow (ii)$ haben wir in einem vorausgehenden Lemma gezeigt.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Sei (x_n) eine Cauchy Folge. Dann ist (x_n) beschränkt (Wähle n_1 mit $|x_n - x_{n_1}| < 1$ für $n \geq n_1$. Dann gilt für $n \geq n_1$ also $|x_n| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < 1 + |x_{n_1}|$...) Damit hat (x_n) also nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge. Damit ist (x_n) nach dem vorigen Lemma konvergent.

□

Bemerkung. Es handelt sich um eine wesentliche Eigenschaft der reellen Zahlen (siehe folgendes Theorem). Die entscheidende Implikation ist $(ii) \Longrightarrow (i)$.

In gewisser Weise charakterisieren (fast) alle in diesem Abschnitt gegebenen Sätze die reellen Zahlen. Genauer gilt folgendes.

THEOREM (Die große Charakterisierung). *Sei K ein angeordneter Körper. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es ist K ordnungsvollständig (d.h. $K = \mathbb{R}$).*
(ii) *Es erfüllt K das Intervallschachtelungsprinzip und das Archimedische Axiom.*
(iii) *Jede monotone beschränkte Folge konvergiert, und es gilt das Archimedische Axiom.*
(iv) *Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge, und es gilt das Archimedische Axiom.*
(v) *Jede Cauchy-Folge konvergiert, und es gilt das Archimedische Axiom.*

Beweis. (i)$\Longleftrightarrow$ (ii): Das wurde schon in Kapitel 3 durchgeführt.

(i)$\Longrightarrow$ (iii): Siehe oben. (Definiere $S := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$....)

(iii)$\Longrightarrow$ (iv): Jede beschränkte Folge hat eine monotone Teilfolge (nach dem oben gegebenen Beweis). Damit folgt die gewuenschte Implikation.

(iv)$\Longrightarrow$ (v): Jede Cauchy Folge ist beschränkt und jede Cauchy Folge mit konvergenter Teilfolge konvergiert (nach den oben gegebenen Beweisen). Damit folgt die gewuenschte Implikation.

(v)$\Longrightarrow$ (ii): Ist I_n eine Intervallschachtelung, so bilden die Mittelpunkte (rechte Randpunkte, linke Randpunkte,...) eine Cauchy Folge. Der Grenzwert x hat die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Ende der Vorlesung

Wichtig. Die Tatsache, dass in $\mathbb{R}$ jede Cauchy-Folge konvergiert, wird als *Vollstaendigkeit* von $\mathbb{R}$ bezeichnet.

3. Teilfolgen und Häufungspunkte

Wir kommen nun zu einem wichtigen Konzept, das das Konzept der Teilfolge komplementiert.

LEMMA (Charakterisierung Häufungspunkt). *Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gibt eine Teilfolge von (x_n), die gegen x konvergiert.*
(ii) *Für alle $\varepsilon > 0$ ist $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \varepsilon\}$ eine unendliche. Menge*

Beweis. $(i) \Longrightarrow (ii)$: Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund von (i) gibt es eine Teilfolge x_{n_k} mit $x_{n_k} \to x$, $k \to \infty$. Damit folgt also für $k \geq k_\varepsilon$

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon.$$

Damit gilt

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \varepsilon\} \supset \{n_k : k \geq k_\varepsilon\}$$

und es folgt die Behauptung.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Wir konstruieren induktiv eine Teilfolge mit

$$|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}.$$

Diese Teilfolge konvergiert dann also gegen x.

$k = 1$: Wähle n_1 mit $|x_{n_1} - x| < 1$.

$k \Longrightarrow k + 1$: Aufgrund von (ii) ist die Menge

$$A := \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \frac{1}{k+1}\} \cap \{n \in \mathbb{N} : n > n_k\}$$

nichtleer. Wir können also n_{k+1} aus A wählen z.B. als kleinstes Element von A. Dann gilt

$$|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}.$$

Damit folgt $(x_{n_k}) \to x$ (nach Archimedischen Axiom). $\square$

Bemerkung. Beweis nutzt, daß $x_n \to x$ genau dann gilt, wenn fuer alle $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ existiert mit $|x_n - x| < 1/k$ für $n \geq n_k$.4, Definition (Häufungspunkt). *Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Ein $x \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (x_n), wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen des vorigen Lemma gilt.*

Bemerkung - Bezeichnung. Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Existiert fuer eine Menge $A \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in A$ fuer alle $n \geq N$, so sagt man, dass x_n *schliesslich in A liegt*. Ist fuer eine Menge A die Anzahl $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in A\}$ unendlich, so sagt man, dass (x_n) *haeufig* in A liegt. Damit konvergiert also x_n gegen x, wenn fuer jedes $\varepsilon > 0$ die Folge (x_n) schliesslich in $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ liegt und es ist x eine Hauefungspunkt von (x_n), wenn fuer jedes $\varepsilon > 0$ die Folge (x_n) haeufig in $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ liegt.

Bemerkung. Gibt es eine Teilfolge von (x_n) die gegen ∞ / $-\infty$ konvergiert, so spricht man manchmal vom uneigentlichen Häufungspunkt ∞ bzw. $-\infty$.

Erkläre im Spaziergängermodell, das Häufen.

Beispiele. (a) $(-1)^n$ hat die beiden Häufungspunkte -1 und 1.

(b) Die Folge x_n mit $x_n = \pi$ für n hat Rest 0 bei Division durch 3, $x_n = 7$ für n mit Rest 1 bei Division durch 3, $x_n = 42$ für n mit Rest 2 bei Division durch 3 hat die drei Häufungspunkte $\pi, 7$ und 42.

(c) $y_n = x_n + \frac{1}{n}$ (mit (x_n) aus (a)) hat ebenfalls die Häufungspunkte 1 und -1 (obwohl diese Werte nicht angenommen werden; vgl. Konvergenz!)

Bemerkung. Der Satz von Bolzano/Weierstraß lässt sich nun so formulieren: Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Häufungspunkt.

Für beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$ gibt es zwei besondere Häufungspunkte, nämlich den größten und den kleinsten Häufungspunkt. Das werden wir jetzt genauer untersuchen:

Sei (x_n) eine nach oben beschraenkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist die Folge (X_N) mit

$$X_N := \sup\{x_n : n \geq N\}$$

fallend in N. Damit existiert

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{N\to\infty} X_N = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geq n\}.$$

und wird als 'Limsup' oder 'Limes superior' von (x_n) bezeichnet. Ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nicht nach oben beschränkt, so gilt $\sup\{x_n : n \geq N\} = \infty$ für alle N. Entsprechend liegt dann folgende Definition nahe $\limsup x_n := \infty$.
Ist die Folge (x_n) nicht nach oben beschraenkt, so setzt man $\limsup x_n =: \infty$ (und das 'passt' zu der oben gegeben Definition).

Analog sieht man, daß die Folge (X_M) mit

$$X_M := \inf\{x_n : n \geq M\}$$

wachsend in M ist. Damit existiert

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{M\to\infty} X_M = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k : k \geq n\}$$

und wird als 'Liminf' oder 'Limes inferior' von (x_n) bezeichnet. Ist die Folge (x_n) nicht nach unten beschraenkt, so setzt man $\liminf x_n =: -\infty$.

Lemma (Charakterisierung von $\limsup/\liminf$). *Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

(i) $x = \limsup_{n\to\infty} x_n$.
(ii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:*
  - *Es gibt ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $x_k \leq x + \varepsilon$ für alle $k \geq n_\varepsilon$*
  - *Die Menge $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geq x - \varepsilon\}$ ist unendlich.*

(iii) *Es ist (x_n) nach oben beschränkt und es ist x der größte Häufungspunkt von (x_n) (d.h. x ist Häufungspunkt von (x_n) und es gibt keinen größeren Häufungspunkt).*

Analoge Aussagen gelten für $\liminf$.

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Sei $\varepsilon > 0$. Sei $X_N := \sup\{x_n : n \geq N\}$. Wegen $X_N \to x$ fallend, existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$x_k \leq \sup\{x_n : n \geq N_0\} < x + \varepsilon$$

für alle $k \geq N_0$ und es ist $\{n \in \mathbb{N} : x_n \geq x - \varepsilon\}$ unendlich.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): *(x_n) nach oben beschränkt.* Das folgt aus der ersten Eigenschaft.

x ist Häufungspunkt. Das folgt aus den beiden Eigenschaften und der Charakterisierung von Häufungspunkten.

Es gibt keinen größeren Häufungspunkt. Das ist klar nach der ersten Eigenschaft.

(iii)$\Longrightarrow$ (i): Sei $X_N := \sup\{x_n : n \geq N\}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein n_ε mit $x_n \leq x+\varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ (andernfalls gäbe es nach Bolzano/Weiersterass eine Teilfolge, die gegen eine größere Zahl als x konvergiert. Widerspruch *größter* HP.). Damit folgt

$$X_N \leq x + \varepsilon$$

für alle $N \geq n_\varepsilon$. Damit folgt

$$\limsup x_n = \lim X_N < x + \varepsilon.$$

Umgekehrt gibt es, da x ein Häufungspunkt ist, zu jedem $\varepsilon > 0$ beliebig große n mit $x_n \geq x - \varepsilon$. Damit folgt $X_N \geq x - \varepsilon$ für alle N. Damit folgt $X \geq x - \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Folgerung. *Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) Sei $(x_{n_k})_k$ eine konvergente Teilfolge. Dann gilt

$$\liminf_n x_n \leq \lim_k x_{n_k} \leq \limsup_n x_n.$$

(b) Es konvergiert(x_n) *genau dann, wenn* $\liminf_n x_n = \limsup_n x_n \in \mathbb{R}$ *und in diesem Fall gilt* $\lim_n x_n = \limsup_n x_n = \liminf_n x_n$.

Beweis. (a) Der Grenzwert $\lim_k x_{n_k}$ ist ein Haeufungspunkt von (x_n). Damit folgt die Aussage (a) sofort aus dem vorigen Lemma.
(b) Wenn die Folge konvergiert, so konvergiert auch jede Teilfolge (mit demselben Grenzwert) und der groeßte und der kleinste Haeufungspunkt stimmen ueberein. Nach dem vorigen Lemma ($(iii) \Longrightarrow (i)$) folgt dann die gewuenschte Gleichheit von lim sup und lim inf.
Umgekehrt folgt aus $\liminf_n x_n = \limsup_n x_n \in \mathbb{R}$ und dem vorigen Lemma ($(i) \Longrightarrow (ii)$) auch die Konvergenz. $\square$

Folgerung. *Es gilt* $\limsup x_n < C$ *genau dann wenn ein* $C' < C$ *und* $N_0 \in \mathbb{N}$ *existiert mit* $x_n \leq C'$ *für alle* $n \geq N$. *Enstprechendes gilt für* lim inf.

Beweis. $\Longrightarrow$: Das folgt leicht aus (ii).
$\Longleftarrow$: Das folgt sofort aus der Definition. $\square$

Wir notieren noch einige (leicht zu beweisende) Rechenregeln (Uebung):

Proposition (Rechenregeln). *Seien* (x_n) *und* (y_n) *Folgen in* $\mathbb{R}$. *Dann gilt:*
(a) $\limsup_n x_n = -\liminf(-x_n)$.
(b) $\limsup_n (ax_n) = a \limsup_n x_n$ *fuer* $a \geq 0$.
(c) $\limsup_n (x_n + y_n) \leq \limsup_n x_n + \limsup_n y_n$.
(d) $\limsup_n x_n + \liminf_n y_n \leq \limsup(x_n + y_n)$.
(e) $\limsup_n (x_n + y_n) = \limsup_n x_n + \lim_n y_n$ *(falls* (y_n) *konvergiert).*

Beweis. Hier folgen (a) und (b) direkt aus den Definitionen. Es folgt (c) aus der Definition unter Nutzen von $\sup\{x_n + y_n : n \geq N\} \leq \sup\{x_n : n \geq N\} + \sup\{y_n : n \geq N\}$. Es folgt (d) leicht aus den Definitionen und einem Widerspruchsbeweis oder auch direkt aus (a) und (c). Es folgt (e) einfach. $\square$

Ende der Vorlesung

Bemerkung. Ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nicht nach oben beschränkt, so gilt $\limsup x_n = \infty$ und es gibt es eine Teilfolge, die gegen ∞ konvergiert. Man kann dann also in diesem Sinne ∞ als den größten Häufungspunkt auffassen. Entsprechendes gilt für $-\infty$ und $\liminf x_n$.

KAPITEL 4

Mächtigkeit

In diesem (kurzen) Kapitel untersuchen wir die 'Größe' von Mengen mittels der Anzahl ihrer Elemente. Wir werden drei Abstufungen kennenlernen: endliche Mengen, abzählbar unendliche Mengen und überabzählbare Mengen.

DEFINITION (Mächtigkeit).

- *Eine Menge X heißt endlich, wenn sie leer ist oder ein $n \in \mathbb{N}$ existiert und eine bijektive Abbildung $j : A_n = \{1, \ldots, n\} \longrightarrow X$. Dann heißt 0 bzw. n die Mächtigkeit oder Kardinalität von X.*
- *Eine Menge heißt unendlich, wenn sie nicht endlich ist.*
- *Eine Menge heißt abzählbar unendlich, wenn es eine bijektive Abbildung $J : \mathbb{N} \longrightarrow X$ gibt. In diesem Fall heißt J eine Abzählung und wir schreiben die Menge auch als $X = \{J(1), J(2), \ldots, \}$.*
- *Eine Menge, die weder endlich noch abzählbar unendlich ist, heißt überabzählbar.*

Bemerkung. Die ersten beiden Definitionen haben wir schon kennengelernt. Es handelt sich also lediglich um eine Erinnerung. In der Definition einer endlichen Menge nutzen wir, daß es keine Bijektion zwischen A_n und A_m gibt fuer $n \neq m$.

Notation. In dieser Vorlesung nennen wir eine Menge abzählbar, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist. Diese Verwendung des Begriffes 'abzählbar' ist nicht einheitlich.

Beispiele.

- $\mathbb{N}$ ist abzählbar mit $J : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, J(n) = n$.
- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ abzählbar mit $J : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, J(n) = n - 1$.
- $\mathbb{Z}$ ist abzählbar mit $J : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, 2n \mapsto n, 2n - 1 \mapsto -n$.
- Die Menge der geraden natuerlichen Zahlen ist abzaehlbar. Ebenso ist die Menge der ungeraden natuerlichen Zahlen abzaehlbar. (Uebung)

LEMMA. *Es sind $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \{1, \ldots, n\}$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ abzählbar. Insbesondere ist $X \times Y$ abzählbar für alle abzählbaren X und Y.*

Beweis. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *abzählbar:* Zeichnung. (Uebung).

$\mathbb{N} \times \{1, \ldots, n\}$ *abzählbar:* Zeichnung. (Uebung)

Das 'Insbesondere' kann nun auf folgende Art gezeigt werden: Sei $J_X : \mathbb{N} \longrightarrow X$ bijektiv und $J_Y : \mathbb{N} \longrightarrow Y$ bijektiv. Weiterhin existiert nach dem schon gezeigten ein bijektives

$$H : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}, n \mapsto H(n) = (H_1(n), H_2(n)).$$

Dann ist die Abbildung

$$J : \mathbb{N} \longrightarrow X \times Y, J(n) = (J_X(H_1(n)), J_Y(H_2(n)))$$

bijektiv als Komposition der bijektiven Abbildungen H und $J_X \times J_Y : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X \times Y, (n, m) \mapsto (J_X(n), J_Y(m))$. $\square$

Bemerkung. Das Lemma liefert leicht, daß auch $X_1 \times \ldots \times X_n$ abzählbar ist für abzählbare $X_1, \ldots, X_n$. (Übung: Wie ist es mit abzählbaren Produkten bestellt?)

Wir werden nun das Prinzip der Wohlordnung benutzen: Jede nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element.

Anschaulich klar: Laufe $\mathbb{N}$ beginnend bei 1 ab, bis man auf die Menge trifft. Details hier: Sei M eine solche Teilmenge. Angenommen: M hat kein kleinstes Element. Dann ist $B := \{n \in \mathbb{N} : \{1, \ldots, n\} \in \mathbb{N} \setminus M\}$ induktiv ($1 \in B$: klar. $n \in B \Longrightarrow (n+1) \in B$: klar. Damit ist M leer.)

Lemma. *Sei X eine Menge und $H : \mathbb{N} \longrightarrow X$ surjektiv. Dann ist entweder X endlich oder abzählbar unendlich.*

Beweis. Sei X nicht endlich. Zu zeigen: Es existiert ein $J : \mathbb{N} \longrightarrow X$ bijektiv.

Wir konstruieren induktiv ein $J : \mathbb{N} \longrightarrow X$ mit

- $\{J(1), J(2), \ldots, J(n)\} \supset \{H(1), \ldots, H(n)\}$.
- Die Elemente $J(1), \ldots, J(n)$ sind paarweise verschieden.

Aufgrund des ersten Punktes ist J surjektiv. Aufgrund des zweiten Punktes ist J injektiv.

Zur Konstruktion:
$n = 1$: $J(1) = H(1)$.
$n \Longrightarrow n+1$: Betrachte $M := \{k \in \mathbb{N} : H(k) \notin \{J(1), \ldots, J(n)\}\}$. Dann ist M nichtleer, da X unendlich ist. Damit hat M ein kleinstes Element m. Aufgrund von $\{J(1), J(2), \ldots, J(n)\} \supset \{H(1), \ldots, H(n)\}$ gilt noch $m > n$. Dann setzt man $J(n+1) := H(m)$. Dann gelten die gewünschten Eigenschaften: Nach Konstruktion ist $J(n+1)$ von $J(1), \ldots, J(n)$ verschieden. Weiterhin zeigt die Fallunterscheidung $m = n+1$ und $m \neq n+1$, daß $H(n+1)$ in $\{J(1), \ldots, J(n+1)\}$ enthalten ist. $\square$

Theorem. *Es ist $\mathbb{Q}$ abzählbar.*

Beweis. Nach einem vorigen Lemma ist $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ abzaehlbar. Damit gibt es also eine bijektive Abbildung $J : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$. Betrachte

$$H : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \times \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad H(n, m, q) = q\frac{n}{m}.$$

Dann ist H surjektiv. Damit ist dann auch $H \circ J : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ surjektiv und nach dem vorangehenden Lemma folgt die Abzaehlbarkeit von $\mathbb{Q}$. □

THEOREM. *Es ist $\mathbb{R}$ überabzählbar. Tatsächlich ist jedes Interval positiver Länge in $\mathbb{R}$ überabzählbar.*

Beweis. Angenommen: $\mathbb{R}$ ist abzählbar.

Dann gibt es eine Abbildung $J : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R} = \{J(1), J(2), \ldots, \}$. Wir konstruieren nun rekursiv eine Intervallschachtelung (I_n), $n \in \mathbb{N}$ mit

- $J(n) \notin I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $|I_{n+1}| = \frac{1}{3}|I_n|$.

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es einen Punkt x der zu allen I_n gehört. Damit stimmt x dann mit keinem der $J(n)$ überein (da $J(n) \notin I_n$). Das ist ein Widerspruch.

Es bleibt die I_n zu konstruieren:

$n = 1$: Setze $I_1 := [J(1) + 1, J(1) + 2]$.

$n \Longrightarrow (n+1)$: Teile I_n in drei gleichlange abgeschlossene Teilintervalle. Es kann $J(n + 1)$ nicht in allen drei Teilintervallen liegen. Wähle für I_{n+1} ein Teilinterval, das $J(n + 1)$ nicht enthält. □

FOLGERUNG (Dichtheit von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). *In jedem Interval positiver Länge in $\mathbb{R}$, gibt es Punkte von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Beweis. Nach dem vorigen Satz ist jedes Interval positiver Länge überabzählbar. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, kann auch der Schnitt von $\mathbb{Q}$ mit einem solchen Interval nur abzählbar sein. Damit folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Auch wenn ein Intervall positiver Länge 'fast nur' aus Punkten aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ besteht, kann es schwierig sein, einen solchen Punkt explizit anzugeben.

Wir diskutieren nun, dass die Potenzmenge einer Menge immer 'echt größer' als die Menge ist.

PROPOSITION. *Sei X eine beliebige Menge und $P(X)$ die Potenzmenge von X. Dann gibt es keine surjektive Abbildung J von X nach $P(X)$.*

Beweis. Übung. □

Bemerkung. Die Proposition liefert insbesondere, daß es unterschiedlich 'große' unendliche Mengen gibt. Tatsaechlich ist die Anzahl der Teilmengen einer unendlichen Menge nach der Proposition immer echt großer als die Anzahl der Element der Menge. Inbesondere hat also $\mathbb{N}$ ueberabzaehlbar viele Teilmengen (vgl. Weihnachtszettel fuer einen direkten Beweis).

KAPITEL 5

Die komplexen Zahlen

Es geht um einen Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$, in dem $x^2 + 1 = 0$ eine Lösung hat. Nimmt man die Existenz eines solchen Koerper an und nennt diese Lösung i, so gehoert mit $a, b \in \mathbb{R}$ dann auch $a + ib$ zu diesem Körper, und es gilt nach Distributivgesetz

$$(a + ib)(a' + ib') = aa' + iba' + iab' + iibb' = aa' - bb' + i(ba' + ab').$$

Damit ist also die Menge $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, unter obiger Multiplikation abgeschlossen. Das motiviert folgenden Satz.

Theorem. *Die Menge* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *versehen mit der Addition*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

ist ein Körper mit neutralem Element $(0, 0)$ *der Addition und neutralem Element* $\underline{1} = (1, 0)$ *der Multiplikation.*
Das Inverse bzgl. Addition von (a, b) *ist gegeben durch* $(-a, -b)$.
Das Inverse bzgl. der Multiplikation von $(a, b) \neq (0, 0)$ *ist gegeben durch*

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Beweis. Direkte Rechnungen (vgl. Algebravorlesung). □

Zeichnung / Notation. Gaußsche Zahlenebene, imaginäre Achse, reelle Achse. Obere Halbebene, untere Halbebene.

Definition. *Der Körper aus dem vorangehenden Satz wird mit* $\mathbb{C}$ *bezeichnet.*

Notation. Wir schreiben i für $(0, 1)$. Außerdem identifizieren wir ein $c \in \mathbb{R}$ mit dem Element der Form $(c, 0) \in \mathbb{C}$. Damit kann dann $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ aufgefaßt werden. Dann gilt

$$c(a, b) = (c, 0)(a, b) = (ca - 0b, cb + 0a) = (ca, cb).$$

Insbesondere gilt also mit $\underline{1} = (1, 0)$

$$ci = (c, 0)i = (c, 0)(0, 1) = (0, c) \text{ und } c\underline{1} = (c, 0)(1, 0) = (c, 0).$$

Damit lässt sich dann das Element $(a, b) \in \mathbb{C}$ schreiben als

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0)\underline{1} + (b, 0)i = a + ib.$$

Das ist gerade die zu Anfang des Kapitels gegebene Darstellung.

Bemerkung - Komplexe Zahlen als reeller Vektorraum. Es ist $\mathbb{C}$ ein Vektorraum ueber $\mathbb{R}$ (der Dimension 2) mit skalarer Multiplikation $\lambda \cdot (a,b) := (\lambda a, \lambda b)(= (\lambda, 0)(a,b))$. Es ist $\{\underline{1}, i\}$ ist eine Basis.

PROPOSITION. *Es gilt* $i^2 = -1$.

Beweis. Das folgt direkt durch Nachrechnen:

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cot 0) = (-1, 0) = -1.$$

Hier nutzen wir im letzten Schritt die schon besprochene Identifikation von $\mathbb{R}$ mit einer Teilmenge von $\mathbb{C}$. $\square$

DEFINITION. *Für* $z = a+ib \in \mathbb{C}$ *definieren wir den Imaginärteil* $\Im z := b$ *und den Realteil* $\Re z := a$, *sowie die zu* z *konjugiert komplexe Zahl* $\overline{z} := a - ib$ *und* $|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Beachte. (a) Komplex Konjugieren bedeutet gerade Spiegeln an der reellen Achse.
(b) Es ist $|z|$ die *Laenge* von z. Es gilt $|z|^2 = z\overline{z}$.

Folgende Regeln sind einfach zu beweisen.

PROPOSITION. *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt:*
(a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(b) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ *und* $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$ *für* $z \neq 0$.
(c) $\Re z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\Im z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.
(d) $z \neq 0 \Longrightarrow z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
(e) $|zw| = |z||w|$ *und für* $z \neq 0$ $|1/z| = 1/|z|$.

Beweis. Hausaufgabe. $\square$

Bemerkung. Aus (d) ergibt sich ein allgemeines Verfahren zum Umgang mit Bruechen der Form A/B mit komplexen Zahlen A, B: Durch Erweitern mit $\overline{B}$ ergibt sich der Ausdruck $A\overline{B}/|B|^2$, der keine komplexen Zahlen mehr im Nenner enthaelt.

PROPOSITION (Dreiecksungleichung). *Für* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Beweis. Sei $z = a + ib$ und $w = c + id$.
Zwischenbehauptung. Es gilt $|ac + bd| \leq |z||w|$.
Bew. Ohne Einschraenkung $|z|, |w| \neq 0$. Reicht nun zu zeigen

$$\left|\frac{a}{|z|}\frac{c}{|w|} + \frac{b}{|z|}\frac{d}{|w|}\right| \leq 1.$$

Das folgt leicht unter Anwenden von $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$ auf das erste und zweite Produkt im Betrag.

Mit der Zwischenbehauptung und einer kleinen Rechnung ergibt sich nun folgendes:

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (a+c)^2 + (b+d)^2 \\
&= a^2 + b^2 + 2(ac+bd) + c^2 + d^2 \\
&\leq a^2 + b^2 + 2|ac+bd| + c^2 + d^2) \\
&\leq a^2 + b^2 + 2|z||w| + c^2 + d^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\
&= (|z| + |w|)^2.
\end{aligned}$$

Nach Ziehen der Wurzel folgt die gewuenschte Beziehung. □

Zeichnung / Bemerkung. In $\mathbb{C}$ kann man Dreiecksungleichung gut deuten.

Der Betrag erlaubt es uns ähnlich wie in $\mathbb{R}$ das Konzept der Konvergenz und der Cauchy Folge zu definieren. Diesem Thema widmen wir uns als nächstes.

Definition. *Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ heißt konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodaß für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt $|z_n - z| < \varepsilon$. Es heißt dann z Grenzwert der Folge (z_n).*

Wie schon in $\mathbb{R}$ kann auch in $\mathbb{C}$ eine Folge höchstens gegen einen Wert konvergieren und dieser Wert heißt dann DER Grenzwert und wir schreiben $z = \lim z_n$ oder $z_n \to z$, $n \to \infty$.

Bemerkung. Definiert man für $\varepsilon > 0$ die *ε-Umgebung von w* oder *offene ε-Kugel* um w durch

$$U_\varepsilon(w) := \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < \varepsilon\},$$

so gilt offenbar, dass (z_n) gegen z konvergiert genau dann, wenn fuer alle $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon > 0$ existiert mit $z_n \in U_\varepsilon(z)$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.

Ganz aehnlich wie im Falle von $\mathbb{R}$ beweist man auch folgendes Lema.

Lemma. *Für eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(i) *Es konvergiert (z_n) gegen z.*

(ii) $|z - z_n| \to 0$, $n \to \infty$ *(d.h. die Folge $(|z_n - z|)$ ist eine Nullfolge in $\mathbb{R}$).*

Beweis. Es bedeutet $|z_n - z| \to 0$ gerade, daß fuer alle $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$||z_n - z| - 0| < \varepsilon$$

fuer alle $n \geq n_\varepsilon$. Mit

$$||z_n - z| - 0| = |z_n - z|$$

folgt dann die Aequivalenz von (i) und (ii). □

Bemerkung. Durch das Lemma wird Konvergenz in $\mathbb{C}$ in Beziehung gesetzt zu einer Konvergenz in $\mathbb{R}$.
Konvergenz in $\mathbb{C}$ und Konvergenz in $\mathbb{R}$ haben viel miteinander zu tun. Tatsächlich lassen sich wesentliche Betrachtungen zu Konvergenz in $\mathbb{C}$ auf die entsprechenden Betrachtungen in $\mathbb{R}$ zurückführen. Dazu dient folgende Proposition.

Proposition (Abschaetzung Real- Imaginaerteil via Betrag). *Für* $z = a + ib \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$|z| \leq |a| + |b| \ \textit{ sowie } |a|, |b| \leq |z|.$$

Beweis. Nach Definition gilt $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Erste Ungleichung: Es gilt

$$a^2 + b^2 = |a|^2 + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2.$$

Damit folgt also

$$|z|^2 \leq (|a| + |b|)^2.$$

Da die Wurzelfunktion monoton ist ($x < y \Longrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$) folgt damit die Behauptung durch Wurzelziehen.
Zweite Ungleichung: Mit $a^2, b^2 \leq a^2 + b^2$ folgt wieder aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion

$$|a|, |b| \leq |z|.$$

Das beendet den Beweis. □

Als erste Folgerung zeigen wir:

Proposition. *Sei* (z_n) *eine Folge in* $\mathbb{C}$ *und* $z_n = a_n + ib_n$ *mit* $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ *d.h.* $a_n = \Re z_n$ *und* $b_n = \Im z_n$. *Dann sind äquivalent:*

(i) *Die Folge* (z_n) *konvergiert in* $\mathbb{C}$.
(ii) *Die Folgen* (a_n) *und* (b_n) *konvergieren in* $\mathbb{R}$.

In diesem Fall gilt $\lim z_n = \lim a_n + i(\lim b_n)$ *d.h.*

$$\Re(\lim_n z_n) = \lim_n \Re(z_n) \ \textit{ und } \ \Im(\lim_n z_n) = \lim_n(\Im z_n).$$

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Es gelte $z_n \to z = a + ib$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert also ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z| < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$. Dann gilt für $n \geq n_\varepsilon$ also nach voriger Proposition

$$|a_n - a|, |b_n - b| \leq |z_n - z| < \varepsilon.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i). $a_n \to a$, $b_n \to b$. Sei $z := a + ib$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert also ein $n_a \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_a$ und ein $n_b \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq n_b$. Für $n \geq \max\{n_a, n_b\}$ gilt also nach voriger Proposition

$$|z - z_n| = |a + ib - (a_n + ib_n)| \leq |a - a_n| + |b - b_n| < \varepsilon.$$

Zur letzten Aussage: Das wurde beim Beweis von (i)$\Longrightarrow$ (ii) schon mitgezeigt. □

Damit kann man aus den Rechenregeln für Konvergenz in $\mathbb{R}$ leicht die folgenden Rechenregeln für Konvergenz in $\mathbb{C}$ ableiten.

Proposition (Rechenregeln). *(a)* $z_n \to z$, $w_n \to w \Longrightarrow z_n + w_n \to z + w$.
(b) $z_n \to z$, $w_n \to w \Longrightarrow z_n w_n \to zw$.
(c) $z_n \to z$, $z \neq 0$, $z_n \neq 0$ *alle* $n \Longrightarrow 1/z_n \to 1/z$.

Aehnlich wie in $\mathbb{R}$ beweist man auch folgende Aussage.

Proposition. *Sei* (z_n) *ein Folge in* $\mathbb{C}$ *und* $z \in \mathbb{C}$. *Gilt* $z_n \to z$, *so folgt* $|z_n| \to |z|$.

Ähnlich wie in $\mathbb{R}$ definiert man folgende Konzepte.

Definition (Cauchy Folge). *Eine Folge* (z_n) *in* $\mathbb{C}$ *heißt Cauchy Folge, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *existiert, so daß für alle* $n, m \geq n_\varepsilon$ *gilt* $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Theorem. *Für eine Folge* (x_n) *in* $\mathbb{C}$ *sind äquivalent:*

(i) (z_n) *ist eine Cauchy Folge.*
(ii) (z_n) *ist konvergent.*

Beweis. Sei $z_n = a_n + ib_n$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt: (z_n) Cauchy Folge $\Longleftrightarrow (a_n), (b_n)$ Cauchy Folgen in $\mathbb{R} \Longleftrightarrow (a_n), (b_n)$ konvergent in $\mathbb{R} \Longleftrightarrow z_n$ konvergent. (Dabei verwenden wir im ersten Schritt die obige Proposition zur Abschaetzung von Real- und Imaginaerteil via Betrag, im zweiten Schritt die Vollstaendigkeit von $\mathbb{R}$ und im dritten Schritt die vorangegangene Proposition.) $\square$

Folgerung. *Es ist* $\mathbb{C}$ *vollständig d.h. jede Cauchy-Folge in* $\mathbb{C}$ *konvergiert.*

Bemerkung. Die Vollständigkeit ist eine fundamentale analytische Eigenschaft der komplexen Zahlen.
Da es in $\mathbb{C}$ keine Anordnung gibt (Warum? $x^2 + 1 = 0$ hat Lösung!), gibt es auch keine monotonen Folgen und also auch keine Konvergenz monotoner Folgen. Aber es gibt eine komplexe Version des Satzes von Bolzano-Weierstraß. Dazu führen wir noch folgenden Begriff ein: Eine Folge $(z_n)_n$ in $\mathbb{C}$ heißt beschränkt, wenn ein $C > 0$ existiert mit $|z_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Theorem (Bolzano - Weierstraß - komplex). . *Sei* (z_n) *eine beschränkte Folge in* $\mathbb{C}$. *Dann hat* (z_n) *eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $z_n = a_n + ib_n$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Da (z_n) beschränkt ist, sind auch die Folgen (a_n) und (b_n) beschränkt (nach der Proposition zur Abschaetzung von Real- und Imaginaerteil via Betrag). Da (a_n) beschränkt ist, gibt es nach der reellen Version des Satz von Bolzano - Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_k$. Dann ist aber auch $(b_{n_k})_k$

beschränkt und hat also eine konvergente Teilfolge $(b_{n_{k_l}})_l$. Dann konvergiert sowohl $(a_{n_{k_l}})_l$ also auch $(b_{n_{k_l}})_l$. Damit konvergiert dann auch $(z_{n_{k_l}})_l$. $\square$

KAPITEL 6

Summen und Reihen

Reihen liefern zunaechst nur eine spezielle Art, Folgen darzustellen. Diese Art tritt in vielerlei Zusammenhängen auf und ist entsprechend von besonderem Interesse. Tatsaechlich ist in diesem Zusammenhang dann auch eine besondere Form von Konvergenz von Interesse und an dieser Stelle untescheiden sich dann die Theorie der Reihen und der Folgen.

Ausgangpunkt: Gegeben eine Folge (a_n) in $\mathbb{C}$. Wir wollen nun alle a_n summieren:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

as Problem sind wieder die '...' oder anders gesagt, die Tatsache, dass es unendlich viele Summanden gibt. Die Loesung besteht darin, dass man über endlich viele Summanden summiert und anschliessend (falls moeglich) den Grenzwert bildet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Zeichnung.
S_1: a_1
S_2: $a_1 + a_2$
S_3: $a_1 + a_2 + a_3$
S_4: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
....

Definition (Reihe gleich Folge der Partialsummen). *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Zu $n \in \mathbb{N}$ ist dann die n-te Partialsumme der (a_n) definiert durch*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Die Folge (S_n) dieser Partialsummen wird dann als Reihe mit den Gliedern a_n bezeichnet. Diese Reihe heißt konvergent (mit Grenzwert S), wenn die Folge (S_n) konvergiert (mit Grenzwert S).

Bemerkung. Voellig entsprechend definiert man Reihen ueber Folgen, deren Indexmenge nicht $\mathbb{N}$ sonderen $\mathbb{N} + N$ fuer ein $N \in \mathbb{Z}$ ist.

Notation. Wir schreiben

$$\sum_{k\geq 1} a_k \quad \text{für die Reihe, d.h. die Folge der Partialsummen}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{für den Grenzwert der Reihe, d.h. } \lim_{n\to\infty} S_n$$

(falls dieser existiert).

Bemerkung (Reihen entsprechen Folgen). Sei (x_n) eine beliebige Folge in $\mathbb{C}$. Dann gilt mit der Folge (a_n) definiert durch $a_1 = x_1$, $a_n := x_n - x_{n-1}$ $n \geq 2$ offenbar $x_n = \sum_{k=1}^n a_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In diesem Sinne lässt sich jede Folge (in $\mathbb{C}$) als Reihe darstellen.

Beispiel - geometrische Reihe. Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ beliebig und $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ so ist $\sum_{k\geq 0} \alpha q^k$ konvergent gegen $\frac{\alpha}{1-q}$.
(Bew. Es gilt $|q^n| = |q|^n \to 0$. Damit folgt die Aussage aus der Formel für die geometrische Summe.)

Beispiel. $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k(k-1)}$ konvergiert gegen 1.
Bew. $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = 1 - \frac{1}{n} \to 1$. Die in der zweiten Gleichung genutzte Technik ist unter dem Namen Partialbruchzerlegung bekannt (s. später).

Da es sich um Folgen handelt, gelten für konvergente Reihen natürlich weiterhin die Rechenregeln für konvergente Folgen. Insbesondere gilt folgendes.

Proposition. *Sind $\sum_{k\geq 1} a_k$ und $\sum_{k\geq 1} b_k$ konvergente Reihen, so ist fuer jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ auch die Reihe $\sum_{k\geq 1}(a_k + \lambda b_k)$ konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + \lambda b_k).$$

Die Grundfrage im Umgang mit Reihen betrifft natuerlich die Konvergenz der Reihe. Das werden wir nun untersuchen.

Theorem (Charakterisierung Konvergenz - Cauchy Kriterium). *Sei (a_k) in $\mathbb{C}$ gegeben. Dann sind äquivalent:*

(i) *Die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$ konvergiert.*
(ii) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|\sum_{k=m+1}^n a_k| < \varepsilon$ für alle $n_\varepsilon \leq m < n$. (**Zeichnung.** Endstück der Reihe.)*

Beweis. Sei die l-te Partialsumme gegeben durch $S_l := \sum_{k=1}^l a_k$. Dann gilt offenbar

$$|\sum_{k=m+1}^{n} a_k| = |S_n - S_m|. \quad (*)$$

Nach Definition bedeutet Konvergenz einer Reihe (d.h. (i)) gerade die Konvergenz der Folge der Partialsummen (S_l). Aufgrund der Vollstaendigkeit von $\mathbb{C}$ ist diese Konvergenz aequvalent dazu, daß die Partialsummen (S_l) eine Cauchy-Folge bilden. Wegen $(*)$ ist das aber gerade Bedingung *(ii)*. $\square$

Das Theorem liefert eine **notwendige** Bedingung für Konvergenz.

FOLGERUNG (Erster Test auf Konvergenz). *Ist $\sum_{k\geq 0} a_k$ konvergent, so ist $|a_k|$ eine Nullfolge (d.h. $|a_k| \to 0$, $k \to \infty$).*

Beweis. $|a_k| = |\sum_{l=k}^k a_l| = |S_k - S_{k-1}| \to 0, k \to \infty$. $\square$

Diese Bedingung ist nicht hinreichend:

Gegenbeispiel - harmonische Reihe ist divergent. $\sum_{k\geq 1} 1/k$ ist divergent (**obwohl** $\frac{1}{n} \to 0$).
Bew. $1+1/2+(1/3+1/4)+(1/5+\ldots+1/8)+\ldots+(\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}})\ldots.$

Ende der Vorlesung

Besonders wichtig sind Reihen mit nichtnegativen Gliedern. Denn darauf lassen sich viele Konvergenzbetrachtungen zurückführen. Für diese Reihen gilt folgendes Lemma.

LEMMA (Konvergenz von Reihen mit nichtnegativen Gliedern). *Sei Folge (a_k) mit $a_k \geq 0$ gegeben. Sei $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$ ist konvergent (d.h. (S_n) konvergent).*
(ii) *Die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$ ist beschränkt (d.h. $\sup S_n < \infty$).*
(iii) *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit*

$$a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m < \varepsilon$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon \leq n < m$.

Beweis. Wegen $a_k \geq 0$ ist (S_n) monoton wachsend. Damit sind Konvergenz (i) und Beschränktheit (ii) äquivalent. Weiterhin ist Konvergenz in $\mathbb{R}$ äquivalent dazu, daß (S_n) eine Cauchy Folge ist. Das bedeutet aber gerade (iii) (nach dem Cauchy-Kriterium). $\square$

Notation. Ist $a_k \geq 0$, so schreiben wir $\sum_{k=1}^\infty a_k < \infty$, wenn eine der Bedingungen des vorigen Lemma gilt. Andernfalls schreiben wir $\sum_{k=1}^\infty a_k = \infty$.

Für Reihen erweist sich eine Verschärfung des Begriff der Konvergenz als sinnvoll. Dies ist der Punkt, an dem sich die Theorie der Reihen von der Theorie der Folgen unterscheidet.

DEFINITION. *Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann heißt die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$ absolut konvergent, wenn $\sum_{k\geq 1} |a_k|$ konvergiert, d.h. wenn gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

Bemerkung.

- Für Reihen mit nichtnegativen Gliedern ist Konvergenz gleichbedeutend mit absoluter Konvergenz.
- Absolute Konvergenz / Konvergenz ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder der Reihe abändert. (Es geht immer nur um a_k mit großen k.)

Beispiel - geometrische Reihe. Ist $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ und $\alpha \in \mathbb{C}$, so ist $\sum_{k\geq 1} \alpha q^k$ absolut konvergent (gegen $\frac{\alpha}{1-q}$). Ist $|q| \geq 1$, so ist die Reihe nicht konvergent.
Bew. Es gilt $|\alpha q^n| = |\alpha||q|^n$. Damit folgt absolute Konvergenz der Reihe für $|q| < 1$ (s.o.). Ist $|q| \geq 1$, so ist q^n keine Nullfolge und es folgt Divergenz.

THEOREM (Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz). *Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{C}$. Ist $\sum_{k\geq 0} a_k$ absolut konvergent, so ist $\sum_{k\geq 0} a_k$ konvergent.*

Beweis. Das folgt eigentlich sofort aus dem Cauchy Kriterium. (Hier sind die Details: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Aufgrund der absoluten Konvergenz, konvergiert $\sum_{k\geq 1} |a_k|$. Damit existiert also nach dem Lemma ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq n_\varepsilon$. Damit gilt also für $n, m \geq n_\varepsilon$ mit $n < m$

$$|a_n + a_{n+1} + \ldots a_m| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon.$$

Damit konvergiert die Reihe nach dem Cauchy-Kriterium.) □

Bemerkung. Es ist absolute Konvergenz tatsaechlich strenger als Konvergenz. Denn es gibt Reihen, die konverigeren aber nicht absolut konvergieren. Ein Beispiel ist gegeben durch die Reihe ueber $a_k := (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$. Dann gilt:

- $\sum |a_k|$ nicht konvergent (harmonische Reihe).
- Es ist aber $\sum_{k\geq 1} a_k$ konvergent (nach Leibniz Kriterium, s.u.)

Bemerkung - absolute Konvergenz stabil bei Umordnungen. Absolute Konvergenz ist stabil unter Umordnungen (s.u.). Konvergente aber nicht absolut konvergente Reihen sind extrem instabil unter Umordnung (s.u.). Daher ist absolute Konvergenz oft wesentlich nützlicher als Konvergenz, wenn es um Reihen geht.

Proposition (Dreieckungleichung für Reihen). *Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{C}$. Existiert $\sum a_k$, so gilt $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, wobei die rechte Seite den Wert unendlich hat, wenn die Summe nicht absolut konvergiert.*

Beweis. Es reicht den Fall zu betrachten, daß $\sum a_k$ absolut konvergiert. Da Betrag mit Konvergenz von Folgen verträglich ist, gilt

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| = |\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k| = \lim_{n\to\infty} |\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Hier verwenden wir die Dreiecksungleichung fuer endliche Summen im vorletzten Schritt. $\square$

Theorem (Majorantenkriterium). *Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{C}$. Gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$ und $b_k \geq 0$ mit*

- *$|a_k| \leq b_k$ für $k \geq k_0$ und*
- *$\sum_{k \geq k_0} b_k < \infty$,*

so ist $\sum a_k$ absolut konvergent.

Beweis. Ohne Einschraenkung sei $|a_k| \leq b_k$ fuer alle $k \in \mathbb{N}$. (Andernfalls kann man die ersten k_0 Elemente der Folge (b_k) abaendern, ohne dass sich die absolute Konvergenz der Reihe $\sum b_k$ aendert.)
Nach dem Lemma zur Konvergenz von Reihen mit nichtnegativen Gliedern reicht es

$$\sup \sum_{k=1}^{n} |a_k| < \infty$$

zu zeigen. Nach der zweiten Voraussetzung gibt es $C \geq 0$ mit $\sum_{k=k_0}^{n} b_k \leq C$ für all $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt fuer $n \geq k_0$ dann

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq C$$

$\square$

Beispiel - Dezimalzahldarstellung Ist (a_n) eine Folge mit Werten in $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, so konvergiert

$$\sum_{k \geq 1} a_k 10^{-k}$$

absolut. In diesem Zusammenhanbg verwendet man die **Notation**

$$0.a_1 a_2 ... := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}.$$

Beweis: Sei $b_k := 9/10^k$. Dann gilt $|a_k 10^{-k}| \leq b_k$ und $\sum b_k$ existiert (da geometrische Reihe).

Weitere Beispiele.

- $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ konvergiert absolut.
  Bew. $0 \leq 1/k^2 \leq 1/k(k-1)$ und $\sum 1/k(k-1)$ konvergent. Nun folgt Beh. aus Majorantenkriterium.
- $\sum_{k\geq 1}\frac{n!}{n^n}$ konvergiert absolut.
  Bew. $\frac{n!}{n^n} = \frac{12...n}{nn...n} \leq 2/n^2$ und $\sum \frac{1}{n}^2$ konvergiert. Nun folgt Beh. aus Majorantenkriterium.

Man kann das Majorantenkriterium auch umdrehen.

Folgerung (Minorantenkriterium). *Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $b_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Gilt $b_k \geq |a_k|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ab einem k_0 und ist $\sum a_k$ divergent, so ist auch $\sum b_k$ divergent.*

Beweis. Angenommen $\sum b_k$ konvergent. Dann folgt aus dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz von $\sum |a_k|$ absolut konvergent. Damit folgt nach dem Theorem die Konvergenz von $\sum a_k$. Das ist ein Widerspruch. □

Beispiele.

- $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ist divergent.
  Bew. $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = \frac{1}{n+1}$ und $\sum \frac{1}{n+1}$ divergent (harmonische Reihe).
- Sei
  $$a_k := (\text{k-te ungerade natürliche Zahl})^{-1} = \frac{1}{2k-1}$$
  und
  $$b_k := (\text{k-te gerade natürliche Zahl})^{-1} = \frac{1}{2k}.$$
  Dann ist $\sum a_k$ und $\sum b_k$ divergent.
  Bew. Wäre eine der beiden Summen konvergent, so müsste auch die andere konvergieren nach dem Majorantenkriterium. Dann wäre aber auch die harmonische Reihe konvergent.

Theorem (Quotientenkriterium). *Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $a_k \neq 0$ für alle k ab einem k_0. Gilt $q := \limsup_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$, so konvergiert $\sum a_k$ absolut. Gilt $p := \liminf_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > 1$, so divergiert $\sum a_k$.*

Beweis. $q < 1$: Sei $\widetilde{q}$ eine Zahl mit $q < \widetilde{q} < 1$. (Zeichnung.) Wegen $q = \limsup_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq \widetilde{q}$$

für alle $k \geq N$. Das impliziert

$$|a_n| \leq \widetilde{q}|a_{n-1}| \leq \cdots \leq \widetilde{q}^{n-N}|a_N|$$

für alle $n \geq N$. Weiterhin ist $\sum_{n\geq N} |a_N|\widetilde{q}^{n-N}$ konvergent (als geometrische Reihe). Damit folgt nach dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz der ursprünglichen Reihe.

$p > 1$: Ähnlich wie im vorigen Fall schließt man, daß ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|a_{k+1}|/|a_k| \geq 1$$

für alle $k \geq N$. Damit folgt

$$|a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \ldots \geq |a_N| > 0$$

für alle $k \geq N$. Also ist $|a_k|$ keine Nullfolge. Damit konvergiert die Reihe nicht. □

Bemerkung. Für $q = 1$ bzw. $p = 1$ ist jedes Konvergenzverhalten möglich.

- $a_k = \frac{1}{k}$. Dann $q = p = \lim \frac{1/(k+1)}{1/k} = \lim \frac{k}{k+1} = 1$ und $\sum a_k$ divergent.
- $a_k = \frac{1}{k^2}$. Dann $q = p = \lim \frac{1/(k+1)^2}{1/k^2} = \lim \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$ und $\sum a_k$ konvergent.

Ende der Vorlesung

Theorem (Wurzelkriterium). *Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $q := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. Gilt $q < 1$, so ist $\sum a_k$ absolut konvergent. Gilt $q > 1$ so ist $\sum a_k$ divergent.*

Beweis. $q < 1$: Sei $\widetilde{q}$ mit $q < \widetilde{q} < 1$ und $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \widetilde{q}$$

für alle $k \geq N$. Damit gilt also

$$|a_k| \leq \widetilde{q}^k$$

für alle $k \geq N$. Die Reihe $\sum_{k\geq N} \widetilde{q}^k$ konvergiert (geometrische Reihe). Damit folgt aus dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz von $\sum a_k$.

$q > 1$: Es gibt unendlich viele k mit $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$, also $|a_k| \geq 1$. Damit ist $|a_k|$ keine Nullfolge. □

Bemerkung. Für $q = 1$ ist jedes Konvergenzverhalten möglich.

- $a_k = 1/k$. Dann $q = \lim \sqrt[k]{1/k} = 1$ und $\sum a_k$ divergent.
- $a_k = 1/k^2$. Dann $q = \lim \sqrt[k]{1/k^2} = 1$ und $\sum a_k$ konvergent.

Beispiel - Exponentialreihe. Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig und $a_k := z^k/k!$. Dann ist die Exponentialreihe

$$\sum_{k\geq 0} a_k = \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{k!}$$

absolut konvergent und der Grenzwert wird als $\exp(z)$ oder e^z bezeichnet.

Bew. Das kann man mit Quotientenkriterium oder Wurzelkriterium zeigen. Wir geben (zur Sicherheit ;-) beide Beweise.

Quotientenkriterium: Aufgrund von

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|z^{k+1}/(k+1)!|}{|z^k/k!|} = \frac{|z|}{|k+1|} \to 0 < 1$$

ist die Voraussetzung des Quotientenkriterium erfuellt.

Wurzelkriterium: Aufgrund von

$$\sqrt[k]{\left|\frac{z^k}{k!}\right|} = \frac{|z|}{\sqrt[k]{k!}} \to 0 < 1$$

ist die Voraussetzung des Wurzelkriterium erfuellt. (Hier nutzen wir im letzten Schritt die uns schon bekannte bestimmte Divergenz $\sqrt[k]{k!} \to \infty, k \to \infty$).

Bemerkung. Es ist kein Zufall, daß im vorigen Beispiel sowohl Quotienten- als auch Wurzelkriterium zum Ziel fuehren. Tatsaechlich ist das Wurzelkriterium echt stärker als das Quotientenkriterium d.h.

- Wenn das Quotientenkriterium Konvergenz liefert, auch das Wurzelkriterium. Genauer gilt $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.
- Es gibt Faelle mit $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty$ und $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Damit liefert dann das Wurzelkriterium Konvergenz, aber nicht das Quotientenkriterium.

Allerdings ist das Quotientenkriterium (oft) leichter anzuwenden als das Wurzelkriterium.

Hier skizzieren wir noch kurz Begruendungen zu den beiden Aussagen ueber die Wurzelkriterium:

- Ist $b_n > 0$, so gilt $\limsup \sqrt[n]{b_n} \leq \limsup \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. (siehe Weihnachtszettel). Idee :

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{b_1 \frac{b_2}{b_1} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}}} \approx \sqrt[n]{\frac{b_{N+1}}{b_N} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}}} \preceq \sqrt[n]{q^{n-N}} \approx q.$$

- Es gibt Reihen, deren Konvergenz aus dem Wurzelkriterium folgt aber nicht aus dem Quotientenkriterium. Ein Beispiel ist folgendes:

$$a_k := \begin{cases} 2^{-k} & : \text{ k gerade} \\ 3^{-k} & : \text{ k ungerade} \end{cases}$$

Dann ist $\sqrt[k]{a_k}$ gleich 1/2 oder 1/3, also $\limsup \sqrt[k]{a}_k = 1/2 < 1$. Aber es gilt

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}} & : \text{ k gerade} \\ \frac{3^k}{2^{k+1}} & : \text{ k ungerade} \end{cases}$$

Damit wird dann also $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ fuer grosse ungerade k beliebig gross.

Das Beispiel laesst sich so abwandeln, dass sogar gilt $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$: Seien $c_k > 0$ mit $c_k \to 0$ gewaehlt. Setze $a_k := c_n^n$ fuer $k = 2n$ und $a_k := (2c_n)^n$ fuer $k = 2n+1$.

Beispiele. Sei $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$. Dann ist die Reihe nicht konvergent, da (a_n) keine Nullfolge ist. Sei $b_n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$. Dann folgt aus dem Wurzelkriterium die absolute Konvergenz der entsprechenden Reihe, wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = 1/e < 1$.

$\longleftrightarrow$ Ende der Vorlesung

In den bisherigen Betrachtungen zur Konvergenz haben wir nicht die Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ genutzt. Für reelle Reihen gibt es zwei weitere Konvergenzkriterien, die von der Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ Gebrauch machen.

Theorem (Leibnizkriterium). *Sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$ (d.h. $a_k \geq a_{k+1} \geq \cdots \geq 0$ und $a_k \to 0$). Dann ist die alternierende Reihe $\sum(-1)^k a_k$ konvergent.*

Notation. Eine Reihe heißt alternierend, wenn die zugrundeliegenden Folgeglieder abwechselnd positives und negatives Vorzeichen haben.

Beweis. **Zeichnung.** Sei $n > l$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=l}^{n}(-1)^k a_k\right| &= |a_l - a_{l+1} + a_{l+2} - \ldots a_n| \\ &= a_l - a_{l+1} + \ldots a_n \\ &\leq a_l \\ &\to 0. \end{aligned}$$

Hier: Erste Gleichung: Kein Vorzeichen bei a_l, da Betrag; Zweite Gleichung: betrachte Paare beginnend mit a_l und eventuell einen einzelnen positiven Summanden am Ende

$$0 \leq (a_l - a_{l+1}) + (a_{l+2} - a_{l+3}) + \ldots$$

Denn es ist jeder einzelne Term nichtnegativ aufgrund der Monotonie.
Dritte Gleichung: betrachte Paare beginnend mit a_{l+1} und eventuel einem einzelnen negativen Summanden am Ende

$$a_l \geq a_l + (-a_{l+1} + a_{l+2}) + \ldots$$

Vierte Gleichung: Nullfolge.
Damit ist $\sum(-1)^k a_k$ eine Cauchy-Folge, also konvergent. $\square$

Bemerkung - Alternativer Beweis. Aufgrund der Monotonie der Folge (a_n) ist die Folge der geraden Partialsummen (S_{2n}) fallend und die Summe der ungeraden Partialsummen (S_{2n+1}) wachsend und es gilt

$$S_{2n+2} = S_{2n+1} + a_{2n} \geq S_{2n+1}.$$

Damit konvergieren sowohl (S_{2n}) als auch (S_{2n+1}) als beschraenkte monotone Folgen. Ihr Grenzwert stimmt ueberein, da die Differenz gerade eine Nullfolge ist.

Bemerkung. Die beiden Voraussetzungen des Theorem sind nötig: Tatsaechlich ist die Voraussetzung einer Nullfolge immer noetig fuer die Konvergenz der entsprechenden Reihe. Gilt nun die Monotonie nicht, kann die Reihe divergieren, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei $a_n = 2/n$, n-gerade; $a_n = 0$, sonst. Dann ist $\sum(-1)^n a_n = 1 + 1/2 + 1/3 \ + \dots$ divergent.

Beispiel - alternierende harmoische Reihe. Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ...$$

ist konvergent. Diese Reihe ist nicht absolut konverent, da die harmonische Reihe divergiert. Das zeigt dann insbesondere die von uns oben schon aufgestellte Behauptung, dass absolute Konvergenz echt staerker ist als Konvergenz.

Theorem (Verdichtungskriterium). *Sei (a_n) eine nichtnegative fallende Folge in $\mathbb{R}$ (d.h. $a_k \geq a_{k+1} \geq \dots 0$.) Dann konvergiert $\sum_{k\geq 1} a_k$ genau dann wenn $\sum_{p\geq 1} 2^p a_{2^p}$ konvergiert.*

Beweis.
Zeichnung. Einteilung von $\mathbb{N}$ in die Abschnitte von $[2^p, 2^{p+1})$.

Für $p \in \mathbb{N}$ setze $C_p := \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} a_k$. ($2^p$-Terme). Aufgrund der Monotonie gilt

$$(*) \quad 2^p a_{2^{p+1}} \leq C_p \leq 2^p a_{2^p}.$$

Aufgrund der Nichtnegativität der C_p und a_k reicht es jeweils Beschränktheit zu zeigen. Damit erhaelt man

$$
\begin{aligned}
& \sum_{p\geq 1} 2^p a_{2^p} \text{ konvergent} \\
\iff & \sum_{p\geq 1} 2^p a_{2^p} \text{ beschränkt} \\
\overset{(*)}{\iff} & \sum C_p \text{ beschränkt} \\
\iff & \sum a_k \text{ beschränkt} \\
\iff & \sum a_k \text{ konvergent.}
\end{aligned}
$$

Das beendet den Beweis. □

Beispiel. Sei $\alpha > 0$. Dann gilt $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergent $\iff \alpha > 1$.
Bew. Nach dem Verdichtungskriterium ist $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergent genau dann wenn $\sum 2^p/(2^p)^\alpha = \sum 1/(2^{\alpha-1})^p$ konvergiert. Letzteres ist eine geometrische Reihe mit $q = 1/2^{\alpha-1}$.
Ist $\alpha > 1$, so ist $2^{\alpha-1} > 1$ also $0 < q < 1$ und die geometrische Reihe konvergiert.
Ist $\alpha \leq 1$, so ist $2^{\alpha-1} \leq 1$ also $1 \leq q$ und die geometrische Reihe divergiert.

Wir kommen jetzt noch zu einem weiteren Thema aus dem Bereich der Reihen. Genauer betrachten wir jetzt noch **Doppelsummen**. Es geht also um

$$a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, (i,j) \mapsto a(i,j) =: a_{ij}$$

und wir fragen,

- ob $\sum a(n,m)$ in irgendeinem Sinne existiert,
- und, falls es existiert, ob es egal ist, wie man summiert, d.h. ob gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i,j=1}^{N} a(i,j) = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} a(k, N-k+1) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Zeichnung zu den verschiedenen Summationsarten!

Das ist von eigenem Interesse und nützlich zum Studium von Produkten von Reihen und Umordnungen.

Achtung. Es geht um das Vertauschen von Grenzwerten!

Gegenbeispiel. Sei a_{ij} gegeben, so daß alle Einträge Null sind ausser auf der Diagonalen und der ersten unteren Nebendiagonalen. Seien die Einträge auf der Diagonalen $1, 2, 4, 8, \ldots$ und die Einträge auf der ersten Nebendiagonalen $-1, -2, -4, -8, \ldots$. Dann sind alle Spaltensummen absolut konvergent und haben den Wert 0. Die k-te Zeilensumme ist absolut konvergent und hat den Wert 2^{k-1}.

Idee der folgenden Betrachtungen: Gibt es eine gleichmäßige Schranke an die (endlichen Teile) der Doppelsummen, so sitzt die wesentliche 'Masse' in einem (großen) Quadrat. Damit liefern dann alles Summationsarten dasselbe Ergebnis.

PROPOSITION. *Sei* $a : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$. *Es gebe* $C \geq 0$ *mit* $\sum_{i,j=1}^m |a_{ij}| \leq C$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$. *Dann gilt:*

(a) $\sum a_{\tau(k)}$ *für jedes injektive* $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *absolut konvergent.*

(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $L = L(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *mit* $\sum_{k=0}^\infty |a_{\sigma(k)}| \leq \varepsilon$ *für jedes injektive* $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *mit* $\sigma(k) \notin \{1,\ldots,L\}^2$ *für jedes* $k \in \mathbb{N}$.

Ende der Vorlesung

Beweis. (a) Zu $n \in \mathbb{N}$ existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $\{\tau(1),\ldots,\tau(n)\} \subset \{1,\ldots,m\}^2$. Damit folgt

$$\sum_{k=0}^n |a_{\tau(k)}| \leq \sum_{i,j=1}^m |a_{ij}| \leq C.$$

Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt (a).

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Sei fuer $N \in \mathbb{N}$

$$S_N := \sum_{k,j=1}^N |a_{kj}|.$$

Dann ist $(S_N)_N$ monoton wachsend und (nach Voraussetzung) beschraenkt. Damit existiert

$$S := \lim_{N\to\infty} \sum_{k,l=1}^N |a_{kl}|.$$

(Das ist die Summe über alle $|a_{ij}|$.) Insbesondere ist also (S_N) eine Cauchy-Folge. Daher existiert also ein $L \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k,l\in\{1,\ldots,N\}^2\setminus\{1,\ldots,L\}^2} |a_{kl}| \leq \varepsilon. \ (*)$$

fuer alle $N \geq L$. Ist nun $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ injektiv mit $\sigma(k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \setminus \{1,\ldots,L\}^2$, so folgt aus $(*)$ fuer jedes beliebige $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^m |a_{\sigma(k)}| \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{k,l=L}^N |a_{kl}| \leq \varepsilon.$$

Das ist die gewuenschte Behauptung. $\square$

THEOREM (Konvergenz von Doppelsummen). *Sei* $a : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ *gegeben. Es gebe ein* $C \geq 0$ *mit* $\sum_{ij=1}^m |a_{ij}| \leq C$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$. *Dann* *existiert* $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ *für jedes* $i \in \mathbb{N}$ *und es existiert* $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$ *für jedes* $j \in \mathbb{N}$ *und die Reihen*

$$\sum_{i\geq 1}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right), \sum_{j\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right), \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{l=1}^{k} a_{k-l+1,l}\right)$$

sind absolut konvergent und haben den gleichen Grenzwert, nämlich $\lim_{N\to\infty}\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}$.

Zeichnung der Summen, vgl. oben.

Beweis. Das folgt aus (a) und (b) der vorigen Proposition:

Existenz der 'inneren' Summen: Das folgt aus (a) der vorigen Proposition (z.B. $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\tau(k) = (i, k)$...)

Absolute Konvergenz der Doppelsummmen: Das ist klar nach Voraussetzung, etwa

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right| = \sum_{i=1}^{m}\left|\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leq C.$$

(Grenzwert vertauscht mit Beträgen und mit endlichen Summen.)

Gleichheit der Grenzwerte: Das folgt aus (b) der vorigen Proposition: In allen Summen wird über beliebig große Quadrate in $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ summiert. Nach (b) der vorigen Proposition sind Summen über Terme ausserhalb solcher Quadrate beliebig klein. Damit folgt die Aussage. □

Wir ziehen nun einige Folgerungen aus dem Satz.

FOLGERUNG (Cauchy-Produkt). *Seien* (b_j), (c_i) *Folgen in* $\mathbb{C}$ *sodaß* $\sum b_j$ *und* $\sum c_i$ *absolut konvergent sind. Dann gilt*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{k} c_{k-l+1}b_l$$

Bemerkung. $\sum_{l=1}^{k} c_{k-l+1}b_l = \sum_{l=1}^{k} c_l b_{k-l+1}$.

Beweis. $C := \sum_{i=1}^{\infty}|c_i| < \infty$, $B := \sum_{j=1}^{\infty}|b_j| < \infty$. Setze $a_{ij} := c_i b_j$. Dann gilt

$$\sum_{i,j=1}^{m}|a_{ij}| = \sum_{i,j=1}^{m}|c_i b_j| = \sum_{i,j=1}^{m}|c_i||b_j| = \sum_{i=1}^{m}|c_i|\sum_{j=1}^{m}|b_j| \leq CB < \infty$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Damit erfüllt a die Voraussetzung des vorigen Satz. Dessen Aussage liefert dann die Behauptung. □

Anwendung - Funktionalgleichung der Exponentialfunktion: Für die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$ gilt

- $\exp(0) = 1$ und

- $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (Funktionalgleichung)

Insbesondere verschwindet exp nirgends und es gilt

$$\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z).$$

Beweis. $\exp(0) = 1$. Das ist klar.

Es gilt die Funktionalgleichung. Das folgt mittels Cauchy-Produkt:

$$\begin{aligned}
\exp(z_1)\exp(z_2) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} z_1^k/k!\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} z_2^l/l!\right)\\
\text{(Cauchy-Produkt)} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{z_1^m z_2^{n-m}}{m!(n-m)!}\\
\text{(Erweitern mit } 1 = n!/n!) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!} z_1^m z_2^{n-m}\\
\text{(Binomi)} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n\\
&= \exp(z_1+z_2).
\end{aligned}$$

Zum 'Insbesondere'. Nach dem schon Bewiesenen gilt

$$1 = \exp(0) = \exp(z-z) = \exp(z)\exp(-z).$$

Das liefert die Aussage. □

Bemerkung. (Übung) Eine stetige (s.u.) Funktion $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $E(x+y) = E(x)E(y)$ ist durch ihren Wert an der Stelle $x = 1$ eindeutig bestimmt.

Wir kommen nun zur schon angesprochenen Stabilität von absolut konvergenter Reihen unter Umordnung.

Definition (Umordnung). *Ist $\sum_{k\geq 1} a_k$ eine Reihe und $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv, so heißt $\sum_{k\geq 1} a_{\tau(k)}$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$.*

Bemerkung. Umordnung summiert über 'dieselben' Terme in einer anderen Reihenfolge.

Folgerung (Absolute Konvergenz impliziert Stabilität unter Umordnung). *Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{C}$. Ist $\sum_{k\geq 1} a_k$ absolut konvergent, so ist jede Umordnung absolut konvergent und hat denselben Grenzwert.*

Beweis. Setze $c_{ij} := a_{\tau(j)} = a_i$ falls $i = \tau(j)$ und 0 sonst. **Zeichnung** Dann gilt

- j-te Spalte enthält $a_{\tau(j)}$ an der $\tau(j)$-ten Stelle (und sonst Nullen).

- i-te Zeile enthält a_i an der Stelle j mit $\tau(j) = i$ (und sonst Nullen).

Damit folgt also sofort

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} = a_i$$

für jedes $i \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_{ij} = a_{\tau(j)}$$

für jedes $j \in \mathbb{N}$ sowie - da jedes a_k genau einmal in den (c_{ij}) auftritt

$$\sum_{i,j=1}^{m} |c_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = C < \infty.$$

Damit liefert der vorige Satz sofort die Behauptung. □

Nach Hause nehmen! Wenn die Reihen absolut konvergieren, darf man summieren wie man will und erhält immer den gleichen Grenzwert![1]

Wenn die Reihe aber nicht absolut konvergiert, muss man sehr vorsichtig sein:

Gegenbeispiel. (Voraussetzung der absoluten Konverenz ist nötig) Betrachte die Reihe

$$1 - 1 + 1/2 - 1/2 + 1/3 - 1/3 \ldots.$$

Dann gilt für die Partialsummen S_n also $S_n = 0$ falls n gerade und $S_n = 1/k$ falls $n = 2k - 1$. Damit folgt $S_n \to 0$, $n \to \infty$. Andererseits kann man die Summe so umordnen, daß sie divergiert:

$$(1 + 1/2) - 1 + (1/3 + \ldots + 1/k) - 1/2 + (1/(k+1) + \ldots + \frac{1}{n}) - 1/3..$$

so daß man immer wieder Summanden $\geq 1/2$ erhält...

Dieses Verfahren lässt sich verallgemeinern und führt auf den folgenden Satz:

Theorem (Riemannscher Umordnungsatz). *Ist (a_k) eine Folge in $\mathbb{R}$ und $\sum a_k$ konvergent aber nicht absolut konvergent, so existiert zu jedem $s \in \mathbb{R}$ eine Umordnung τ mit $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$. Ebenso existieren bestimmt divergente Umordnungen zu $+\infty$ und $-\infty$.*

[1]Etwas flapsig kann das auch so sagen: Mit absolut konvergenten Reihen darf man rechnen wie die Physiker ;-)

Beweis. Die Grundidee ist, daß Konvergenz der Reihe ohne absolute Konvergenz nur auftreten kann, wenn die Reihe durch Wahl der Glieder mit positivem bzw. nichtpositivem Vorzeichen in zwei Teile zerlegt wird, die sich zu $+\infty$ bzw. $-\infty$ addieren. Durch geeignetes 'Verschieben' der Balance zwischen diesen beiden Teilen lässt sich dann jede gewünschte Konvergenz der Umordnung erzwingen.

Hier sind die Details: Teile die Folge (a_k) in positive und nichtpositive Terme wie folgt: Sei

$$a_k^+ := \ k\text{-tes positives Element von } (a_k)$$

und

$$a_k^- := -k\text{-tes nichtpositives Element von } (a_k).$$

Setze

$$A^+ := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k^+, \ \ A^- := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k^-,$$

wobei der Wert ∞ möglich ist.

Behauptung. Es gilt:

- $A^+ := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k^+ = \infty$ und $A^- := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k^- = \infty$.
- (a_n^+) und (a_n^-) sind Nullfolgen.

Bew: $A^+, A^- = \infty$*:* Angenommen A^+ und A^- endlich: Widerspruch zu $\sum a_n$ nicht absolut konvergent. Angenommen: A^+ endlich und A^- unendlich (oder umgekehrt): Widerspruch zu $\sum a_n$ konvergent.

Nullfolge: klar (da Summe konvergiert).
Damit ist die Behauptung beweisen.

Nun gehe so vor: Summiere a_k^+ bis gerade s überschritten wird; summiere nun a_k^- bis s gerade unterschritten wird etc. Wegen $A^+, A^- = \infty$ kann dieses Verfahren beliebig fortgesezt werden. Da (a_k^+) und (a_k^-) Nullfolgen sind, folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Mit einer leichten Modifikation lassen sich dann Umordnungen erzeugen, deren zugehoerige Reihen zwei Haeufungspunkte haben.

FOLGERUNG (Absolute Konvergenz äquivalent zu unbedingter Konvergenz). *Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es ist $\sum a_n$ absolut konvergent.*
(ii) *Es konvergiert jede Umordnung von $\sum a_n$ in $\mathbb{C}$. ('Unbedingte Konvergenz der Reihe')*

In diesem Fall haben alle Umordnungen denselben Grenzwert.

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): s.o.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Anwenden des Riemanschen Umordnungssatzes auf Realteil und Imaginärteil der Summe liefert absolute Konvergenz von $\sum \Re a_n$ und $\sum \Im a_n$. Damit folgt die Aussage. $\square$

KAPITEL 7

Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Stetigkeit von Funktionen ist ein fundamentales Konzept der Analysis, das man als Anwendung des Grenzwertkonzeptes sehen kann.

Grundidee: Eine Funktion f heißt stetig im Punkt p, wenn sie Punkte q, die nahe an p liegen, auf Werte abbildet, die nahe an $f(p)$ liegen d.h. kurz gefaßt *q nahe p impliziert $f(q)$ nahe $f(p)$.*

Natuerlich muss praezise gefaßt werden, was unter Naehe verstanden wird. Das geschieht - wie ueblich - unter Verwendung von griechischen Buchstaben;-) Da Naehe an zwei Stellen eine Rolle spielt, werden entsprechend zwei griechische Buchstaben auftreten, naemlich ε und δ.

DEFINITION (Stetigkeit). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Dann heißt f stetig in $p \in D$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit*

$$|f(q) - f(p)| < \varepsilon$$

für alle $q \in D$ mit $|q - p| < \delta$. Ist f in jedem $p \in D$ stetig, so heißt f stetig auf D.

Bemerkungen.

- In dieser Definition wird also *q nahe an p* gefaßt durch $|q-p| < \delta$ und *$f(q)$ nahe an $f(p)$* durch $|f(q) - f(p)| < \varepsilon$.
- Offenbar schließt diese Definition die Fälle ein, daß $D \subset \mathbb{R}$ gilt und/oder f nur reelle Werte annimmt. Diesen Fällen werden wir uns später noch einmal besonders widmen.
- Ist $p \in D$ ein isolierter Punkt von D (d.h. es existiert ein $r > 0$ mit $\{p\} = D \cap U_r(p)$ Zeichnung), so ist jedes $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ in p stetig. (Bew. Wähle $\delta > 0$ mit $\delta < r$ beliebig.)

Wir betrachten nun einige **Beispiele**. Tatsaechlich wird sich zeigen, daß alle 'gaengigen' Funktionen stetig sind.

Konstante Funktion. Die konstante Funktion $D \longrightarrow \mathbb{C}$ $x \mapsto c$, ist stetig.

Beweis. Es kann $\delta > 0$ beliebig gewählt werden.

Identitaet. Die Identitaet $id : D \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto x$, ist stetig.

Beweis. Es kann $\delta = \varepsilon$ gewählt werden.

Betrag. Der Betrag $|\cdot| : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto |x|$, ist stetig.

Beweis. Dreiecksungleichung $||x|-|y|| \leq |x-y|$ zeigt, daß $\delta = \epsilon$ gewählt werden kann.

Ende der Vorlesung

k**-te Wurzel.** Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt[k]{\cdot}\ : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ ist stetig
Beweis. Wir zeigen zunächst folgende
Zwischenbehauptung. $|\sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{x}| \leq \sqrt[k]{|y-x|}$ für alle $x, y \geq 0$.
Beweis der Zwischenbehauptung: Ohne Einschränkung sei $x < y$. Dann gilt $\sqrt[k]{y} > \sqrt[k]{x}$. Es ist also

$$\sqrt[k]{y} \leq \sqrt[k]{y-x} + \sqrt[k]{x}$$

zu zeigen. Es reicht also zu zeigen, daß

$$(\sqrt[k]{y})^k \leq \left(\sqrt[k]{y-x} + \sqrt[k]{x}\right)^k.$$

Das ist wahr nach dem binomischen Satz. Damit ist die Zwischenbehauptung bewiesen.

Nach der Zwischenbehauptung kann $\delta = \varepsilon^k$ gewählt werden.

Bemerkung. In diesen Beispielen kann (bei gegebenem $\varepsilon > 0$) das δ unabhaengig von x gewaehlt werden. Das fuehrt auf eine Verschaerfung des Konzeptes der Stetigkeit, naemlich die gleichmaeßige Stetigekeit (s.u.). Im allgemeinen kann (zu gegebenem $\varepsilon > 0$) das δ nicht unabhaengig von x gewaehlt werden, wie man auch am folgenden Beispiel sieht.

Exponentialfunktion. Die (uns schon aus dem vorigen Abschnitt, Stichwort 'absolute Konvergenz', bekannte) Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist stetig.
Bew. Es gilt nach Funktionalgleichung

$$\exp(z) - \exp(z_0) = \exp(z_0)(\exp(z-z_0) - \exp(0)) = \exp(z_0)(\exp(z-z_0) - 1).$$

Es reicht also die Stetigkeit von exp bei 0 zu zeigen. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} |\exp(z) - 1| &= |\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k| \\ &= |z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k-1}| \\ &\leq |z| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |z|^{k-1} \\ (|z| < 1) \quad &= |z| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= |z| \exp(1). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$|\exp(z) - 1| \leq \varepsilon$$

fuer $z \in \mathbb{C}$ mit
$$|z| < 1 \text{ und } |z| < \frac{\varepsilon}{\exp(1)}.$$
Damit ergibt sich die Stetigkeit in 0 mit
$$\delta := \min\{1, \frac{\varepsilon}{\exp(1)}\}.$$

Die Argumentation des letzten Beispiel laeßt sich auf eine große und sehr wichtige Klasse von Funktionen verallgemeinern. Diese diskutieren wir als naechstes.

Potenzreihen. Sei die Folge (a_n) in $\mathbb{C}$ mit
$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} =: \rho < \infty$$
gegeben und sei zu dieser Folge R definiert durch
$$R := 1/\rho > 0$$
(mit $R = \infty$ falls $\rho = 0$). Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ fuer alle $z \in U_R = U_R(0)$ absolut konvergent und die Funktion
$$f : U_R \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \;\; f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$
ist stetig.

Bemerkung.

- Offenbar ist ein Spezialfall die schon erwaehnte Exponentialfunktion. In diesem Fall ist $a_n = \frac{1}{n!}$ und damit $\rho = 0$ und damit $R = \infty$.
- Ein Spezialfall von Potenzreihen ergibt sich, wenn $a_n = 0$ fuer alle $n \geq N$ gilt. In diesem Fall ist die Potenzreihe also ein **Polynom**. Dann ist $\rho = 0$ und damit $R = \infty$ und man erhaelt Stetigkeit auf ganz $\mathbb{C}$.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $R < \infty$. (Der andere Fall ist leichter.)

Reihe ist absolut konvergent: Das folgt aus dem Wurzelkriterium mit
$$\limsup_k \sqrt[k]{|a_k z^k|} = \limsup_k |z| \sqrt[k]{|a_k|} = |z|\rho < R\rho = 1.$$

Stetigkeit: Das folgt aehnlich wie zum Falle der Exponentialfunktion. Allerdings muss man an jedem Punkt argumentieren (da man keine Funktionalgleichung hat). Wir ueberlassen die Details zur Uebung. (Hier sind sie: Es ergibt sich durch direkte Rechnung
$$|f(z) - f(z_0)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0) \sum_{l=0}^{k-1} z^{k-1-l} z_0^l.$$

Für z mit $|z| < \frac{|z_0|+R}{2} =: c < R$ (Zeichnung) ergibt sich dann

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |z - z_0| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k c^{k-1} = C|z - z_0|$$

mit $C := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k c^{k-1} < \infty$. (Hier folgt Endlichkeit von C nach dem Wurzelkriterum, Check!) Damit folgt Stetigkeit (mit $\delta = \min\{\varepsilon/C, c - |z_0|\}$).

Notation. Der Ausdruck $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ wird als *Potenzreihe* bezeichnet. Es heißt R der *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Es ist R charakterisiert durch folgende Eigenschaft:

- Für $|z| < R$ ist $\sum a_k z^k$ absolut konvergent. (Beweis wurde in obiger Betrachtung mitgeliefert)
- Für $|z| > R$ ist is $\sum a_k z^k$ divergent. (Beweis ergibt sich leicht ebenfalls leicht aus obiger Betrachtung. Alternativ: Nutze direkt, dass dann $|a_k z^k|$ keine Nullfolge ist.)

(Fuer z mit $|z| = R$ ist keine allgemeine Aussage moeglich.) Ist insbesondere $\sum a_k z^k$ konvergent für ein z, so folgt $|z| \leq R$. Damit erhaelt man also folgende alternative Formel fuer den Konvergenzradius

$$R = \sup\{r \geq 0 : \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ konvergent für ein } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = r \}.$$

Wir diskutieren nun noch kurz eine Verschärfung des Konzeptes der Stetigkeit, die durch die Beispiele nahegelegt wird:

Definition (Gleichmäßige Stetigkeit). *Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt gleichmäßig stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit*

$$|f(p) - f(q)| < \varepsilon$$

für alle $p, q \in D$ mit $|p - q| < \delta$.

Kurzfassung:

$$\begin{array}{rcl} \text{Stetigkeit} & : & \delta = \delta(\varepsilon, x) \\ \text{Gleichmässige Stetigkeit} & = & \delta = \delta(\varepsilon). \end{array}$$

Beispiele. Wie schon weiter oben diskutiert sind etwa die Funktionen $id : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow [0, \infty)$ und $\sqrt[k]{\ }\ : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ gleichmaeßig stetig. Die Quadratfunktion $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2$, ist nicht stetig (Uebung).

Eine spezielle Klasse gleichmaeßig stetiger Funktionen sind die folgenden Funktionen:

Lipschitzstetige Funktionen. Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt lipschitzstetig, wenn ein $C \geq 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

für alle $x, y \in D$. Offenbar ist jede lipschitzstetige Funktion gleichmäßig stetig (mit $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$).

(Gegen)Beispiele von lipschitzstetigen Funktionen: (Uebung)
Es sind die folgenden Funktionen lipschitzstetig:

- Lineare Funktionen $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = ax + b$.
- $|\cdot|$, $\Re$, $\Im$, id auf $\mathbb{C}$.
- (Übung) Ist $A \subset \mathbb{C}$, so ist die zugehörige Distanzfunktion
$$d = d_A : \mathbb{C} \longrightarrow [0, \infty),\ d(z) := \inf\{|z - w| : w \in A\}$$
Lipschitzstetig mit $C = 1$.

Fuer $k \geq 2$ ist die Wurzel $\sqrt[k]{\ }: [0, \infty) \longrightarrow$) ist nicht lipschitzstetig, aber gleichmäßig stetig. (Gleichmässig stetig: s.o.; Angenommen lipschitzstetig d.h. $|\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{y}| \leq C|x - y|$. Betrachte $x = 0$ und $y = 1/n$ fuer $n \in \mathbb{N}$...)
Zur Abgrenzung geben wir noch einige Beispiele von unstetigen Funktionen:

Beispiel - Heaviside Funktion. Die Funktion $H : \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}$ mit $H(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $H(x) = 1$ für $x > 0$ ist unstetig in $x = 0$ und stetig in allen anderen Punkten.

Beispiel - Charakteristische Funktion von $\mathbb{Q}$: Eine Funktion, die in keinem Punkt stetig ist, wird gegeben durch
$$1_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}, 1_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & : \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Bew. Das folgt, da $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ sind, also jede ε-Kugel um ein $p \in \mathbb{R}$ sowohl Punkte von $\mathbb{Q}$ als auch von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ enthält.

Beispiel - Nennerfunktion. (Uebung) Die Funktion
$$N : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ N(x) := \begin{cases} 0 & : \quad \text{x irrational} \\ \frac{1}{p} & : \quad x = q/p \text{ mit } p \in \mathbb{N} \text{ und } q \in \mathbb{Z} \text{ teilerfremd}, \end{cases}$$
ist stetig in allen irrationalen Punkten und unstetig in den rationalen Punkten.

Bemerkung. Die Beispiele zeigen, dass eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ in einem Punkt, in vielen Punkten und in allen Punkten unstetig sein kann.

Es lässt sich Stetigkeit einer Funktion mit Konvergenz von Folgen charakterisieren und das ist sehr nützlich (da wir gut mit konvergenten Folgen umgehen können).

LEMMA (Folgencharakterisierung der Stetigkeit). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Dann sind für $p \in D$ äquivalent:*

(i) *Es ist f stetig in p.*
(ii) *Für jede Folge (p_n) in D mit $p_n \to p$ gilt $f(p_n) \to f(p)$.*

Beweis. Sei $c = f(p)$.
(i)$\Longrightarrow$ (ii): $p_n \to p$ (Zu zeigen: $f(p_n) \to c$.) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach (i) ein $\delta > 0$ mit $|f(q) - c| < \varepsilon$ für alle $q \in D$ mit $|q - p| < \delta$. Wegen $p_n \to p$ existiert ein $N = N_\delta \in \mathbb{N}$ mit $|p_n - p| < \delta$ für $n \geq N_\delta$. Damit gilt für $n \geq N$ also $|f(p_n) - c| \leq \varepsilon$.

Ende der Vorlesung

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Angenommen nein: Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ 'ohne δ', d.h. mit der Eigenschaft, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $p_n \in D$ existiert mit $|p_n - p| < \frac{1}{n}$ aber $|f(p_n) - c| \geq \varepsilon$. Dann gilt $p_n \to p$ aber nicht $f(p_n) \to c$. Widerspruch. $\square$

Aus dieser Charakterisierung von Stetigkeit erhalten wir sofort einige Rechenregeln für stetige Funktionen. (Diese Rechenregeln koennte man natürlich auch direkt zeigen und das ist eine gute Uebung.)

Proposition (Rechenregeln). *$D \subset \mathbb{C}$ und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Seien f, g stetig in p. Dann gilt:*
(a) Fuer jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ ist $f + \alpha g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig in p.
(b) Es ist $fg : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig in p.
(c) Gilt $g(p) \neq 0$, so existiert ein $r > 0$ mit $g(q) \neq 0$ für alle $q \in U_r(p)$ und es ist $f/g : U_r(p) \cap D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig in p.

Beweis. Es folgen (a) und (b) direkt aus den Recheneregeln für konvergente Folgen und dem vorangehenden Lemma.
(c) Wir zeigen die Existenz eines $r > 0$ mit $g(q) \neq 0$ fuer alle $q \in U_r(p) \cap D$. (Dann folgt gewuenschte Stetigkeitsaussage direkt aus den Recheneregeln für konvergente Folgen.) Sei $\varepsilon := |g(p)| > 0$. Dann existiert also aufgrund der Stetigkeit von g in p ein $\delta > 0$ mit $|g(q) - g(p)| < \varepsilon$ fuer alle $q \in U_\delta(p)$. Damit gilt dann also fuer $q \in U_\delta(p)$

$$|g(q)| = |q(p) - (g(p) - g(q))| \geq |g(q)| - |g(p) - g(q)| = \varepsilon - |g(p) - g(q)| > 0.$$

Damit kann man also $r = \delta > 0$ waehlen. $\square$

Beispiel. Ist P ein Polynom d.h. $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$, so ist $f(z) = P/\exp$ stetig.

Auch Komposition stetiger Funktionen ist stetig.

Proposition. *Seien $u : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $v : E \longrightarrow \mathbb{C}$ und $p \in D$ gegeben mit $u(D) \subset E$. Ist u stetig in p und v stetig in $u(p)$, so ist $v \circ u : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig in p.*

Beweis. Auch das folgt leicht mit der Folgencharakterisierung der Stetigkeit: $p_n \to p \Longrightarrow u(p_n) \to u(p) \Longrightarrow v(u(p_n)) \to v(u(p))$. Das beendet den Beweis. $\square$

Folgerung. *Sind $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so sind auch* $\max\{f, g\}$ *und* $\min\{f, g\}$ *stetig.*

Beweis. Es gilt

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$$

und

$$\min\{a,b\} = \frac{a-b}{2} - \frac{|a-b|}{2}.$$

Damit folgt die Aussage leicht aus den vorangehenden beiden Propositionen. □

Wir systematisieren jetzt die obigen Betrachtungen durch das Konzept des **Grenzwertes einer Funktion in einem Punkt**. Dabei werden wir auch Punkte zulassen, in denen die Funktionen nicht definiert ist (in deren Nähe sie aber definiert ist). Für solche Punkte ist die Frage nach Existenz von Grenzwerten gerade die Frage nach stetiger Fortsetzbarkeit der Funktion. Für Punkte, in denen die Funktion definiert ist, ist Frage nach der Existenz von Grenzewerten gerade die Frage nach Stetigkeit der Funktion.

Wir führen zunächst die Punkte ein, um die es uns geht.

DEFINITION (Berührpunkt). *Sei $D \subset \mathbb{C}$. Ein $x \in \mathbb{C}$ heißt Berührpunkt von D, wenn es eine Folge in D gibt, die gegen x konvergiert.*

Bemerkung.

- Jeder Punkt aus D ist Beruehrpunkt. (Wähle $x_n \equiv x$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.) Es gibt aber im allgemeinen noch weitere Beruehrpunkte. Betrachte z. B. $D = (a,b)$. Dann hat D noch die beiden Beruehrpukte a und b. (Beweis?)
- Es ist x Berührpunkt von D genau dann, wenn fuer jedes $r > 0$ die Menge $D \cap U_r(x) \neq$ mindestens einen Punkt enthaelt (also nicht leer ist). Ein Punkt p heißt *Haeufungspunkt* von D, wenn fuer jedes $r > 0$ die Menge $D \cap U_r(x)$ einen Punkt enthaelt, der nicht x ist. Damit kann man dann die Menge der Beruehrpunkte von D in zwei Teile teilen:
  - die Punkte von D,
  - die Punkte aus dem Komplement von D, die Haeufungspunkte von D sind.

  Wir werden hier das Konzept des Haeufungspunktes einer Menge aber nicht weiter verfolgen.
- (Uebung) Es gilt

$$\text{p Beruehrpunkt von } D \setminus \{p\} \iff \text{p Haeufungspunkt von } D.$$

LEMMA (Grenzwert einer Funktion). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Sei p ein Berührpunkt von D. Für $c \in \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(i) *Für jede Folge (p_n) in D mit $p_n \to p$ gilt $f(p_n) \to c$.*

(ii) *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $\delta > 0$ *mit* $|f(q) - c| \leq \varepsilon$ *für alle* $q \in D$ *mit* $|q - p| < \delta$.

In diesem Fall gilt $c = f(p)$ *falls* p *zu* D *gehoert.*

Beweis. Die Aequivalenzaussage verallgemeinert die Folgencharakterisierung der Stetigkeit. Der Beweis kann wortwörtlich von dort übernommen werden. Da er so schoen (und wichtig ist) fuegen wir das hier ein:

(i)$\Longrightarrow$ (ii): $p_n \to p$ (Zu zeigen: $f(p_n) \to c$.) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach (i) ein $\delta > 0$ mit $|f(q) - c| < \varepsilon$ für alle $q \in D$ mit $|q - p| < \delta$. Wegen $p_n \to p$ existiert ein $N = N_\delta \in \mathbb{N}$ mit $|p_n - p| < \delta$ für $n \geq N_\delta$. Damit gilt für $n \geq N$ also $|f(p_n) - c| \leq \varepsilon$.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Angenommen nein: Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ 'ohne δ', d.h. mit der Eigenschaft, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $p_n \in D$ existiert mit $|p_n - p| < \frac{1}{n}$ aber $|f(p_n) - c| \geq \varepsilon$. Dann gilt $p_n \to p$ aber nicht $f(p_n) \to c$. Widerspruch.

Zur letzten Aussage: Waehle $x_n = p$. $\square$

Definition (Grenzwert einer Funktion). *In der Situation des Lemma, heißt* c *der Grenzwert von* f *bei* p. *Man schreibt* $c = \lim_{x \to p} f(x)$ *oder* $f(x) \to c$, $x \to p$.

Existenz des Grenzwertes in einem Punkt ist äquivalent zu Stetigkeit (falls der Punkt zum Definitionsbereich gehört) und zu Fortsetzbarkeit zu einer im Punkt stetigen Funktion (falls der Punkt nicht zum Definitionsbereich gehört):

Folgerung (Existenz des Grenzwertes und Stetigkeit). *Sei* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *gegeben. Sei* p *ein Berührpunkt von* D. *Dann gilt:*

(a) Gehört p *zu* D, *so sind äquivalent:*

(i) *Es existiert* $\lim_{x \to p} f(x)$.

(ii) f *ist stetig in* $p \in D$.

(b) Gehört p *zu* $\mathbb{C} \setminus D$, *so sind äquivalent:*

(i) *Es existiert* $\lim_{x \to p} f(x)$.

(ii) f *besitzt eine stetige Fortsetzung* $\widetilde{f}$ *auf* $D \cup \{p\}$.

In diesem Fall ist diese Fortsetzung eindeutig bestimmt und gegeben durch

$$\widetilde{f}(x) = f(x) \text{ für } x \in D \text{ und } \widetilde{f}(p) = c.$$

Beweis. Das folgt sofort aus den Definitionen und dem vorangegangenen Lemma. $\square$

Wir betrachten nun noch eine besondere Situation, naemlich den Fall $D \subset \mathbb{R}$. In diesem Fall gibt es noch eine weitere Charakterisierung der Existenz des Grenzwertes. Das ist eine recht spezielle Eigenschaft von $\mathbb{R}$. (Fuer $\mathbb{C}$ ist die analoge Aussage falsch; vgl. Analysis II.)

Definition (Grenzwerte von links und von rechts). *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ und $p \in D$ gegeben.*
(a) Ist p ein Berührpunkt von $D \cap (p, \infty)$, so nennt man, falls existent, $\lim_{q \to p} f|_{D\cap(p,\infty)}$ den rechtsseitigen Grenzwert von f in p und bezeichnet ihn auch als

$$\lim_{q \to p+} f(x).$$

(Bsp: $D = (p, \infty)$).
(b) Ist p ein Berührpunkt von $D \cap (-\infty, p)$, so nennt man, falls existent, $\lim_{q \to p} f|_{D\cap(-\infty,p)}$ den linksseitigen Grenzwert von f in p und bezeichnet ihn auch als

$$\lim_{q \to p-} f(x).$$

(Bsp. $D = (-\infty, p)$).

Bemerkung. Nach dem vorangehenden Lemma lautet das ausgeschrieben so:

$$\lim_{q \to p+} f(q) = c.$$

$$\Longleftrightarrow$$

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(q) - c| < \varepsilon$ für alle $q \in D$ mit $|q - p| < \delta$ **und** $q > p$

$$\Longleftrightarrow$$

Es gilt $f(p_n) \to f(p)$ für jede Folge (p_n) in D mit $p_n \to p$ **und** $p_n > p$.
$\lim_{q \to p-} f(q) = c$: Analog (zur Übung überlassen).

Beispiele - Existenz links- und rechtsseitiger Grenzwerte ohne Stetigkeit.

- $f = 1_{(-\infty,0]} : \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}$. Links- und rechtsseitige Grenzwerte existieren in 0 und sind ungleich; es ist f nicht stetig in 0. **Zeichnung.**
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ für $x < 0$, $f(x) = 1/2$ für $x = 0$ und $f(x) = 1$ für $x > 0$. Links und rechtsseitige Grenzwerte existieren in 1 und sind ungleich; es ist f nicht stetig in 0. **Zeichnung.**
- $f : (0, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ für $x \neq 1$, $f(1) = 2$. Links und rechtsseitige Grenzwerte existieren in 1 und sind gleich; es ist f nicht stetig in 1.

Eine wesentliche Anwendung des Konzeptes von links- und rechtseitigem Grenzwert ist das folgende Theorem. (Die andere wesentliche Anwendung werden wir bei der Diskussion monotoner Funktionen kennenlernen.)

Theorem (Charakterisierung Stetigkeit mit links- und rechtsseitigen Grenzwerten). *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ und $p \in D$ gegeben. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es ist f stetig in p.*

(ii) *Es existieren* $\lim_{q\to p+} f(q)$ *und* $\lim_{q\to p-} f(q)$ *und stimmen mit* $f(p)$ *überein.*

Beweis. $(i) \Longrightarrow (ii)$: f stetig $\Longrightarrow \lim f(p_n) = f(p)$ für JEDE Folge $(p_n) \to p$. Damit folgt (i).

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Nach Voraussetzung gilt

- $\lim_{q\to p+} f(q) = f(p)$.
- $\lim_{q\to p-} f(q) = f(p)$.

Damit existiert ein δ_+ mit $|f(q)-f(p)| < \varepsilon$ für alle $q > p$ mit $|q-p| < \delta_+$ und es existiert ein δ_- mit $|f(q) - f(p)| < \varepsilon$ für alle $q < p$ mit $|q-p| < \delta_-$. Mit $\delta := \min\{\delta_+, \delta_-\}$ gilt dann

$$|f(p) - f(q)| < \varepsilon$$

für alle q mit $|q-p| < \delta$. □

Bemerkung. (Übung) Analog lässt sich für $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ zeigen: $\lim f(p) = c \Longleftrightarrow$ Es existieren links- und rechtsseitiger Grenzwert $\lim_{q\to p+} f(q)$ und $\lim_{q\to p+} f(q)$ und sind gerade c.

Wir betrachten nun noch **Grenzwerte, die $\pm\infty$ involvieren**. Die **Grundidee** ist dabei, daß weiterhin

$$\lim_{q\to p} f(q) = c$$

genau dann gilt, wenn fuer jede Folge (q_n) mit $q_n \to p$ gilt $f(q_n) \to c$. Im Unterschied zu den bisherigen Betrachtungen ist hier allerdings der Fall $p = \pm\infty$ bzw. $c = \pm\infty$ erlaubt.

Hier sind die Details:

In der Situation $D \subset \mathbb{R}$ gibt es noch **Grenzwerte bei** $\pm\infty$: Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$.

Grenzwert bei ∞: Ist $D \subset \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt (und in diesem Sinne also ∞ ein Beruehrpunkt von D), und $c \in \mathbb{C}$, so hat f bei ∞ den Grenzwert c, geschrieben als $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$, oder $f(x) \to c$, $x \to \infty$, falls fuer jedes $\varepsilon > 0$ ein $C \in \mathbb{R}$ existiert mit $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $x \geq C$. Analog zum Beweis des entsprechenden obigen Lemma zeigt man dann:
$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \Longleftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to \pm\infty$ gilt $f(x_n) \to c$.
Grenzwert bei $-\infty$: Ist $D \subset \mathbb{R}$ nach unten unbeschränkt (und in diesem Sinne also $-\infty$ ein Beruehrpunkt von D), und $c \in \mathbb{C}$, so hat f bei $-\infty$ den Grenzwert c, geschrieben als $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$, oder $f(x) \to c$, $x \to -\infty$, falls fuer jedes $\varepsilon > 0$ ein $C \in \mathbb{R}$ existiert mit $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $x \leq C$. Analog zum Beweis des entsprechenden obigen Lemma zeigt man dann:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = c \iff$ Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to -\infty$ gilt $f(x_n) \to c$.

Beispiel. Betrachte $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$. (Bew. Offenbar gilt $\exp(x) \geq x$ fuer $x \geq 0$....)

Grenzwert ist $\pm\infty$: Fuer Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ gibt es noch die Moeglichkeit daß der Grenzwert von f bei $p \in \mathbb{C}$ gerade $\pm\infty$ ist:
Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, p$ Berührpunkt von D. Dann definiert man: $\lim_{x\to p} f(x) = \pm\infty :\iff$ Für jedes $C \in \mathbb{R}$ existiert $\delta > 0$ mit $f(x) > C$ bzw. $f(x) < C$ für alle $x \in D$ mit $|x - p| \leq \delta :\iff$ Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to \pm p$ gilt $f(x_n) \to \pm\infty$.

Beispiel. Betrachte $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$. **Zeichnung.** Dann gilt

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty.$$

Grenzwert bei ∞ bzw $-\infty$ ist $\pm\infty$: Für $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ gibt es noch den **weiteren Grenzwert** $\lim_{q\to\infty} f(q) = \pm\infty$: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \iff$ Für alle $C \in \mathbb{R}$ existiert ein $S \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq C$ bzw. $f(x) \leq C$ für alle $x \geq S \iff$ Für jede Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to \infty$ gilt $f(x_n) \to \pm\infty$.
Entsprechend definiert man $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$.

Beispiel. $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Dann gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. (Bew. $\exp(x) \geq x$...).

Ende der Vorlesung

Zum Abschluss des Kapitels kommen wir nun noch zu einer Stabilitätseigenschaft der Menge aller stetigen Funktionen auf einer Menge.

Definition (Gleichmäßige Konvergenz). *Seien $D \subset \mathbb{C}$ und $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Dann heißt (f_n) gleichmäßig gegen f konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

für alle $x \in D$ und $n \geq N_\varepsilon$.

Bemerkung. Um das Konzept der gleichmaessigen Konvergenz besser einordnen zu koennen, diskutieren wir noch eine weitere Form der Konvergenz von Folgen von Funktionen: Eine Folge von Funktionen $f_n : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, heißt *punktweise konvergent* gegen $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, wenn $f_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$, fuer jedes $x \in D$ gilt. Offenbar impliziert gleichmaßige Konvergenz die punktweise Konvergenz. Es gilt aber nicht die Umkehrung (s.u.).

Theorem (Gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen ist stetig). *Seien $D \subset \mathbb{C}$ und $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, und $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Sei $p \in D$. Sind alle f_n stetig in p und konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f, so ist auch f stetig in p.*

Beweis. Der Beweis wird mit einem sogenannten $\frac{\varepsilon}{3}$-Argument geführt. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

- Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f(q) - f_N(q)| < \varepsilon/3$ für alle $q \in D$.
- Da f_N stetig in p ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $|f_N(q) - f_N(p)| < \varepsilon/3$ für alle $q \in D$ mit $|q - p| < \delta$.

Damit gilt für $q \in D$ mit $|q - p| < \delta$ also

$$\begin{aligned} |f(q) - f(p)| &= |f(q) - f_N(q) + f_N(q) - f_N(p) + f_N(p) - f(p)| \\ &\leq |f(q) - f_N(q)| + |f_N(q) - f_N(p)| + |f_N(p) - f(p)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Sind die (f_n) in allen Punkten stetit, so erhaelt man aus dem Satz, dass auch f in allen Punkten stetig ist.

Beispiele.

- Sei $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Dann konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen f. (Man beachte, dass die Funktionen f_n keinen 'Knick' bei 0 haben, aber die Funktion f einen solchen hat.)

  Beweis. $|f_n(x) - f(x)| \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \to 0$, $n \to \infty$ (unabhängig von x!).
- Sei $f_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, und $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, $x < 1$ und $f(1) = 1$. Dann gilt $f_n(x) \to f(x)$ für jedes $x \in [0,1]$, f_n stetig für jedes n, aber f_n konvergiert nicht gleichmäßig. (In diesem Beispiel liegt also punktweise Konvergenz vor, aber keine gleichmäßige Konvergenz.)

  Bew. Das kann man direkt sehen durch Untersuchen von x, die nahe an 1 liegen (**Zeichnung.**), oder aus dem vorigen Satz folgern, da f nicht stetig ist.

KAPITEL 8

Funktionen auf Intervallen

In diesem Kapitel geht es um Funktionen

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.
Dabei untersuchen wir zunächst stetige Funktionen. Für diese Funktionen gibt es (eigentlich nur) zwei Sätze und noch einen weiteren ;-) Diese Sätze lernen wir in diesem Abschnitt kennen.
Anschließend diskutieren wir noch eine weitere Klasse von Funktionen, nämlich die monotonen Funktionen. Für diese lässt sich Stetigkeit der Funktion und der Umkehrfunktion leicht charakterisieren. Außerdem erweist es sich, daß diese Funktionen automatisch gewisse Stetigkeitseigenschaften haben.

Zeichnung. Stetige Funktion auf einem Intervall.

Sind $x, y, z \in \mathbb{R}$ gegeben, so sagt man, dass *z zwischen x und y liegt*, wenn $x \leq z \leq y$ oder $y \leq z \leq x$ gilt.

Theorem (Zwischenwertsatz). *Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert an, der zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt.* ***Zeichnung.***

Bemerkung. Man mache sich klar, daß die Aussage im allgemeinen falsch ist, wenn f nicht stetig ist oder der Definitionsbereich von f kein Intervall ist.
Beweis. Ohne Einschränkung $f(a) < f(b)$. Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ beliebig. Zu zeigen: Es gibt ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = \gamma$.
Beginnend mit $[a_0, b_0] = [a, b]$ konstruieren wir induktiv durch Halbierung der Intervalle eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$ mit

- $f(a_n) \leq \gamma \leq f(b_n)$,
- $|b_n - a_n| = \frac{1}{2^n}|b - a|$.

auf folgende Weise:

$n = 0$: $[a_0, b_0] = [a, b]$.

$n \Longrightarrow (n + 1)$: Setze $m_n := \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ und betrachte $f(m_n)$. Gilt $f(m_n) \geq \gamma$, so setzt man $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, m_n]$. Gilt $f(m_n) < \gamma$, so setzt man $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [m_n, b_n]$.

Offenbar haben dann die so konstruierten Intervalle $[a_n, b_n]$ die gewuenschten Eigenschaften. Die Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren dann gegen den (eindeutigen) Punkt

$$c \in \bigcap_n [a_n, b_n].$$

Aufgrund der (Folgen)-Stetigkeit gilt:

$$\gamma \le \lim_n f(b_n) = f(c) = \lim_n f(a_n) \le \gamma.$$

Damit folgt also $\gamma = f(c)$. Das beendet den Beweis. $\square$

Wir geben jetzt noch eine Umformulierung des Satzes.

Folgerung (Zwischenwertsatz - Variante). *Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $J := f(I)$ ebenfalls ein Intervall. Genauer gilt*

$$(\inf f(I), \sup f(I)) \subset J \subset [\inf f(I), \sup f(I)]$$

falls $\inf f(I)$ *und* $\sup f(I)$ *endlich sind.*

Beweis. (Uebung) Wir betrachten nurn denn Fall, dass $\inf f(I)$ und $\sup f(I)$ endlich sind.
Zweite Inklusion: klar.
Erste Inklusion: Reicht für jedes $\varepsilon > 0$ zu zeigen, daß gilt

$$(\inf f(I) + \varepsilon, \sup f(I) - \varepsilon) \subset f(I).$$

Wähle dazu $a \in I$ mit $f(a) < \inf f(I) + \varepsilon$ und $b \in I$ mit $f(b) > \sup f(I) - \varepsilon$. Nach dem Zwischenwertsatz gilt dann $[f(a), f(b)] \subset f(I)$. $\square$

Bemerkung.

- Wir haben die Folgerung aus dem Zwischenwertsatz hergleitet. Aus der Folgerung folgt aber offenbar auch der Zwischenwertsatz. Es handelt sich also um zwei Formulierungen desselben Sachverhaltes. Die Folgerung ist strukturell gesehen bemerkenswert. Sie besagt, dass Intervalle unter stetigen Abbildungen erhalten bleiben.
- (Uebung) Ist I ein offenes Intervall, so kann man über Offenheit / Abgeschlossenheit von $f(I)$ im allgemeinen keine Aussage treffen: (Identität auf $(0,1)$; Hut auf $(0,1)$). Im Falle von abgeschlossenen Intervallen ist die Lage anders. Das werden wir gleich untersuchen.

Offenbar impliziert der Zwischenwertsatz die folgende Aussage.

Folgerung. *Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Gilt $f(a) \le 0 \le f(b)$, so hat f in $[a, b]$ eine Nullstelle.* ***Zeichnung***

Anwendung - Existenz der Wurzel. Ist $\alpha > 0$ so hat

$$P : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ P(x) = x^n - \alpha$$

ein Nullstelle.
Beweis. $P(0) = -\alpha < 0$ und $P(1+\alpha) \geq 1$ (nach Bernoulli-Ungleichung). Anwendung des Folgerung (oder der Zwischenwertsatzes) auf die Einschränkung von P auf $[0, 1+\alpha]$ liefert dann die Behauptung.

Anwendung- Fixpunkt von Selbstabbildungen Jede stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ hat einen Fixpunkt (d.h. es gibt ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = c$). **Zeichnung**
Bew. Betrachte

$$g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ \ g(x) = f(x) - x.$$

Dann gilt (wegen $f([a, b]) \subset [a, b]$) aber

$$g(a) = f(a) - a \geq 0,\ \ g(b) = f(b) - b \leq 0.$$

Aus der Folgerung (oder dem Zwischenwertsatz) folgt Existenz eines c mit $g(c) = 0$ d.h. $f(c) = c$.

Wir kommen nun zum anderen Satz über stetige Funktionen auf Intervallen.

Theorem (Existenz Minimum und Maximum stetiger Funktionen auf abg. beschränkten Intervall). *Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an, d.h. es gibt p_m und p_M in $[a, b]$ mit*

$$f(p_m) \leq f(p) \leq f(p_M)$$

für alle $p \in [a, b]$.

Bemerkung. Es ist nötig, daß I ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall ist (vgl. id auf $(0, 1)$ oder exp auf $\mathbb{R}$).

Beweis. Wir zeigen nur die Aussage zum Maximum. Die Aussage zum Minimum kann ähnlich bewiesen werden. Alternativ folgt die Aussage zum Minimum auch durch Anwenden der Aussage zum Maximum auf die Funktion $-f$.

Sei $M := \sup f(I)$. Sei (p_n) eine Folge in $[a, b]$ mit $f(p_n) \to M$.

- Da $[a, b]$ beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano/Weierstraß eine konvergente Teilfolge (p_{n_k}) von (p_n).
- Da $[a, b]$ abgeschlossen ist, gehört der Grenzwert p der konvergenten Teilfolge (p_{n_k}) wieder zu $[a, b]$.

Es gilt also

$$p_{n_k} \to p \in [a, b].$$

Da f in p stetig ist, folgt dann

$$f(p) = \lim_{k \to \infty} f(p_{n_k}) = \lim_n f(p_n) = M.$$

Das beendet den Beweis. □

Nach diesen beiden Sätzen kommen wir nun zum dritten Satz über stetige Funktionen auf Intervallen.

Theorem (Gleichmässige Stetigkeit von stetigen Funktionen auf abgeschlossenen beschränkten Intervallen). *Sei* $-\infty < a < b < \infty$ *und* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig. Dann ist* f *gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen Nein! Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ 'ohne δ' d.h. mit der Eigenschaft, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, y_n \in [a,b]$ existieren mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ aber } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir ohne Einschränkung annehmen, daß

$$x_n \to x \in [a,b].$$

Wegen $|y_n - x_n| \leq \frac{1}{n}$ gilt dann auch $y_n \to x \in [a,b]$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq |f(x_n) - f(y_n)| \\ &= |f(x_n) - f(x) + f(x) - f(y_n)| \\ &\leq |f(x_n) - f(x)| + |f(x) - f(y_n)| \\ &\to 0, n \to \infty. \end{aligned}$$

Widerspruch. □

Bemerkung. Für die beiden vorangegangenen Schlüsse ist die entscheidende Eigenschaft der abgeschlossenen beschränkten Intervalle I die folgende:

(K) Jede Folge mit Werten in I hat eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert wieder in I liegt.

Die Schlüsse (und damit auch die Aussagen) gelten für jede andere Menge I mit dieser Eigenschaft ebenfalls. Solche Mengen heißen kompakt (s.u.).

Wir kommen nun zu monotonen Funktionen auf Intervallen.

Definition (Monotonie). *Sei* $D \subset \mathbb{R}$ *und* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. *Dann heißt* f *monoton wachsend/fallend, wenn für alle* $x, y \in D$ *mit* $x < y$ *gilt*

$$f(x) \leq f(y) \ \ /f(x) \geq f(y).$$

Gilt eine strikte Ungleichung, so heißt f *streng oder strikt monoton wachsend/fallend.*

Beispiele.

- Jede konstante Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist monoton (und zwar sowohl monoton wachstend als auch monoton fallend).

- Die Identitaet $id : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist strikt monoton wachsend.
- Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die **k-te Potenz** auf $[0, \infty)$ d.h. die Funktion $(\cdot)^k : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty), x \mapsto x^k$ ist streng monoton.
  Bew. $y > x$ impliziert $y = x + h$ mit $h > 0$. Damit folgt Aussage aus binomischem Satz:
- Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die **k-te Wurzel** $\sqrt{k} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ ist streng monoton wachsend.
  Bew. Das wissen wir schon.
- Auf $\mathbb{R}$ ist die **Exponentialfunktion** $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty), x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n$ streng monoton wachsend.
  Bew. Das folgt mit der Funktionalgleichung: $y > x$ impliziert $y = x + h$ mit $h > 0$. Damit folgt
  $$\exp(y) = \exp(x + h) = \exp(x) \exp(h) > \exp(x)$$
  da für $h > 0$ gilt $\exp(h) = 1 + ... > 1$.

Lemma (Hauptlemma monotone Funktionen). *Sei $D \subset \mathbb{R}$ gegeben und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Ist $c \in D$ ein Beruehrpunkt von $D \cap (-\infty, c)$, so existiert der halbseitige Grenzwerte $f(c_-) := \lim_{x \to c-} f(x)$ und es gilt $f(c_-) \leq f(c)$. Ist $c \in D$ ein Beruehrpunkt von $D \cap (c, \infty)$, so existiert der halbseitige Grenzwert $f(c_+) := \lim_{x \to c+} f(x)$ und es gilt $f(c) \leq f(c_+)$. Entsprechendes gilt fuer monoton fallende Funktionen.*

Beweis. Wir zeigen nur die Aussage zum Grenzwert von links. Die andere Aussage folgt analog.

Ende der Vorlesung

Es ist $\{f(x) : x < c\}$ durch $f(c)$ nach oben beschränkt und besitzt daher ein Supremum M (und dieses Supremum erfuellt $M \leq f(c)$). Wir zeigen $\lim_{x \to c-} f(x) = M$.

Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert ein $x_\varepsilon < c$ mit $M - \varepsilon \leq f(x_\varepsilon) \leq M$. Setzt man $\delta := c - x_\varepsilon$, so gilt dann also für alle $x < c$ mit $|x - c| < \delta$ auch $x_\varepsilon < x < c$. **Zeichnung.** Damit gilt für solche x dann aufgrund der Monotonie
$$M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq M$$
also $|f(x) - M| < \varepsilon$. □

Bemerkung. Fuer monoton wachsende f und ein $c \in D$, das Beruehrpunkt von $D \cap (-\infty, c)$ und $D \cap (c, \infty)$ ist, gibt es vier Moeglichkeiten: **Zeichnung.**

- Es gilt $f(c_-) = f(c_+)$. Dann ist f stetig.
- Es gilt $f(c_-) = f(c)$ und $f(c) < f(c_+)$. Dann ist f unstetig.
- Es gilt $f(c_-) < f(c) = f(c_+)$. Dann ist f ist unstetig.
- Es gilt $f(c_-) < f(c) < f(c_+)$. Dann ist f ist unstetig.

Entsprechendes gilt fuer monoton fallende Funktionen.

THEOREM. *Sei* $D \subset \mathbb{R}$ *und* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *monoton. Ist* $f(D)$ *ein Intervall, so ist* f *stetig.*

Beweis. Sei ohne Einschraenkung f monoton wachsend. Sei $p \in D$. Sei ohne Einschraenkung p ein Beruehrpunkt von $D \cap (p, \infty)$ und von $D \cap (-\infty, p)$. Es reicht, zu zeigen $f(p_+) = f(p) = f(p_-)$. Waere das nicht der Fall, so folgte nach dem Lemma $f(p_-) < f(p_+)$. Damit haette dann nach der Monotonie von f der Wertebereich von f eine 'Luecke'. Das ist ein Widerspruch. □

Bemerkung (Uebung). Ist D kein Intervall, so gilt die Umkehrung der Aussage des Theorems nicht (wie man sich leicht klarmacht). Ist aber I ein Intervall, so gilt die Umkehrung: Ist I ein Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f genau dann stetig, wenn $f(I)$ ein Intervall ist.

Wir untersuchen die Umkehrfunktionen monotoner Funktionen und insbesondere deren Stetigkeit: Ist $D \subset \mathbb{R}$ und

$$f : D \longrightarrow f(D) \subset \mathbb{R}$$

streng monoton, so ist f offenbar injektiv (und natuerlich surjektiv). Also existiert die Umkehrfunktion

$$g = f^{-1} : f(D) \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mit } g \circ f = \mathrm{id}_D \text{ und } f \circ g = id_{f(D)},$$

(d.h. $g(y) = x$ falls $f(x) = y$). Ist f streng monoton wachsend/fallend, so ist auch g streng monoton wachsend/fallend.
(Bew. Ohne Einschränkung f streng monoton wachsend. Sei $y < y'$ und x, x' mit $f(x) = y$, $f(x') = y'$. Dann gilt also $x \neq x'$. Wäre $x > x'$, so folgte $y = f(x) > f(x') = y'$. Widerspruch.)
Der Graph der Funktion f ist gegeben durch

$$\text{Graph von f} = \{(x, f(x)) : x \in D\}.$$

Der Graph der Umkehrfunktion g ist dann gegeben durch

$$\text{Graph von g} = \{(y, g(y)) : y \in f(D)\} = \{(f(x), x) : x \in D\}.$$

Es entsteht also der Graph der Umkehrfunktion aus dem Graphen der Funktion durch Vertauschen der Koordinaten. Geometrisch entspricht das Vetauschen der Koordination gerade dem Spiegeln an der Winkelhalbierenden. **Zeichnung.** Es entsteht die Umkehrfunktion also durch Spiegeln an der Winkelhalbierenden.

Beispiel: k-te Potenz und k-te Wurzel. $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^k$. Dann ist f streng monoton wachsend mit $f([0, \infty) = [0, \infty)$ und die Umkehrfunktion $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch $g(y) = \sqrt[k]{y}$.

THEOREM (Umkehrfunktion streng monotoner Funktionen auf Intervallen ist stetig). *Sei* I *ein Intervall in* $\mathbb{R}$ *und* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *streng monoton. Dann ist die Umkehrfunktion* $g = f^{-1} : f(I) \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$ *stetig.*

Beweis. Es ist g streng monoton (wie oben gezeigt). Wegen $g(f(I)) = I$ ist das Bild von g ein Interval. Also ist g stetig nach dem Theorem zu monotonen Funktionen. $\square$

Bemerkung. (Übung) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt:

$$f \text{ invertierbar} \iff f \text{ streng monoton.}$$

(Ist I kein Intervall, so gilt diese Äquivalenz nicht.)

Beispiel: Exponentialfunktion und Logarithmus. Sei $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$, $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Dann ist exp streng monoton wachsend mit $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ und die Umkehrfunktion $\ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
Zeichnung.
Bew. Wir wissen schon, dass die Exponentialfunktion streng monoton ist. Es bleibt also zu zeigen, daß $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ gilt: Wir wissen schon

$$\exp(x)^{-1} = \exp(-x) \text{ und } \exp(x) > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiterhin gilt offenbar für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\exp(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \geq k$$

und damit also auch

$$\exp(-k) < \frac{1}{k}.$$

Also enthält (nach Zwischenwertsatz) $\exp(\mathbb{R})$ das Intervall $[1/k, k]$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Da $k \in \mathbb{N}$ beliebig ist, folgt die gewünschte Behauptung.

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion heißt *Logarithmus* bzw. mit vollem Namen *natuerlicher Logarithmus* oder auf Latein, *logarithmus naturalis*). Sie wird mit ln bezeichnet. Der Logarithmus wird uns immer wieder begegenen (wie auch die Exponentialfunktion). Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion führt zur Gültigkeit der folgenden Gleichung

$$\ln x + \ln y = \ln(xy) \text{ und } \ln x = -\ln \frac{1}{x}$$

für $x, y > 0$.
Bew. $x = e^a$, $y = e^b$. Dann gilt

$$\ln x + \ln y = \ln e^a + \ln e^b = a + b = \ln(e^{a+b}) = \ln(xy).$$

Auch Monotonie ist stabil unter Konvergenz von Funktionen und zwar sogar unter punktweiser Konvergenz.

PROPOSITION. *Sei I ein Intervall und $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, seien monotone wachsende Funktionen. Gibt es ein $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in I$, so ist f ebenfalls monoton wachsend. Entsprechendes gilt für monoton fallende Funktionen.*

Beweis. Sei $x < y$. Dann gilt

$$f(x) = \lim_n f_n(x) \leq \lim_n f_n(y) = f(y).$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Man könnte denken, daß Funktionen auf einem Intervall, die stetig und monoton sind, besonders einfach sind. Das ist nicht der Fall, wie man an folgendem Beispiel sieht.

Beispiel - Teufelstreppe. Sei $I = [0, 1]$.
Setze $C_0 := I$ und konstruiere rekursiv durch Herausnehmen der offenen mittleren Drittelintervalle abgeschlossene Mengen $C_n \subset I$ mit $C_n \subset C_{n-1}$. **Zeichnung.** Damit besteht also C_n aus 2^n Intervallen der Länge $1/3^n$. Die 'Gesamtlänge' von C_n ist damit

$$\frac{1}{3^n} 2^n$$

und die 'Gesamtlänge' des Komplementes $I \setminus C_n$ ist gegeben durch

$$1 - \frac{1}{3^n} 2^n.$$

Sei

$$C := \bigcap_{n=1} C_n.$$

Dann ist die 'Gesamtlänge' des Komplementes $I \setminus C$ also gerade 1 und C hat die 'Länge' 0. Nun definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f_n : I \longrightarrow [0, 1]$$

auf folgende Weise: **Zeichnung**

- $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$.
- Auf den herausgenommenen $2^n - 1$ ($= 1 + 2 + \cdot + 2^{n-1}$) Intervallen ist die Funktion konstant mit den Werten $1/2^n, 2/2^n, \ldots, (2^n - 1)/2^n$.
- Auf den noch verbliebenen Intervallen wird die Funktion linear interpoliert.

Dann gilt offenbar $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 1/2^n$ für $m \geq n$. Damit ist für jedes $x \in I$ also $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge und damit konvergent und für die Grenzwert $f(x)$ gilt

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m \to \infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Damit konvergiert (f_n) also gleichmäßig gegen f und f ist stetig und monoton mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ und f konstant auf den einzelnen Stücken von $I \setminus C$. Diese Funktion kann also nicht gezeichnet werden.

Bemerkung.

- In gewisser Weise sind Funktionen wie obige die typischen stetigen monotonen Funktionen.

- Unsere Anschauung vom Zeichnen von Funktionen ist insofern irreführend, als wir (eigentlich) nur Funktionen zeichnen können, die - von wenigen Ausnahmepunkten abgesehen - lokal lipschitzstetig sind.
- Im nächsten Abschnitt werden wir differenzierbare Funktionen kennenlernen. Für diese Klasse 'gelten' unsere Zeichnungen.

KAPITEL 9

Differenzierbare Funktionen

Wir beginnen mit etwas allgeiner Einordnung: Eine Funktion ist in einem Punkt stetig, wenn sie in einer Umgebung des Punktes *gut* durch eine konstante Funktion approximiert wird.
Eine Funktion ist in einem Punkt differenzierbar, wenn sie in der Nähe des Punktes *sehr gut* durch eine linear affine Funktion, ihre Tangente, approximiert wird. Die zugehörige lineare Funktion (gegeben durch eine 1×1 Matrix d.h. eine Zahl) heißt die Ableitung.
Etwas praeziser laeßt sich das so formulieren: Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $p \in (a, b)$ gegeben. Dann gilt:

- f stetig in $p : f(q) = f(p) + \psi(q)$, wobei der Fehler $\psi(q)$ *klein* wird für $q \to p$, d.h. f ist *gut* durch eine konstante Funktion approximierbar in p.
- f differenzierbar in p: $f(q) = f(p) + b(q - p) + \varphi(q)$, wobei der φehler $\varphi(q)$ *sehr klein* wird für $q \to p$, nämlich $\varphi(q) = \psi(q)(q - p)$ mit $\psi(q) \to 0$, $q \to p$. Damit ist f in p *sehr gut* durch eine lineare Funktion, naemlich

$$T(x) = f(p) + b(x - p)$$

approximierbar. Diese Funktion wird Tangente genannt.

Um über 'Nähe' eines Punktes sprechen zu können, brauchen wir Platz. Daher wird es sich meist um Funktionen auf offenen Intervalle handeln. 'Sehr gute Approximation' wird bedeuten, daß der 'Fehler' klein ist. Differenzierbare Funktionen haben viele gute Eigenschaften. Im wesentlichen liefern unsere Zeichnungen meist differenzierbare Funktionen.

1. Definition und grundlegende Eigenschaften von Differenzierbarkeit in einem Punkt.

Es stellt sich heraus, daß die erwaehnte sehr gute Approximierbarkeit aequivalent ist zur Existenz eines Grenzwertes. Das ist der Inhalt des folgenden Lemma.

Lemma (Charakterisierung der Differenzierbarkeit in einer Dimension). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und $p \in I$ gegeben. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es existiert ein* $b \in \mathbb{R}$ *und ein* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = f(p) + b(x-p) + \varphi(x),$$

fuer alle $x \in I$*, wobei gilt*

$$\lim_{x \to p, x \neq p} \frac{\varphi(x)}{|x-p|} = 0.$$

(ii) *Der Grenzwert* $\lim_{x \to p, x \neq p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ *existiert.*

In diesem Fall gilt $b = \lim_{x \to p, x \neq p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$.

Ende der 27. Vorlesung.

Bemerkungen.

- Die Funktionen $x \mapsto \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ und $x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x-p}$ sind auf micht auf I sondern auf $I \setminus \{p\}$ definiert. Um daran zu erinnern, schreiben wir die entsprechenden Grenzwerte als $\lim_{x \to p, x \neq p}$. Spaeter werden wir dazu uebergehen, den Zusatz $x \neq p$ wegzulassen.
- Die Forderung
$$\lim_{x \to p, x \neq p} \frac{\varphi(x)}{|x-p|} = 0$$
an φ in (i) spiegelt gerade wieder, dass es sich um eine sehr gute Approximation handeln soll. Ohne eine entsprechende Forderung an φ ist die Aussage in (i) komplett trivial: Fuer jedes $b \in \mathbb{R}$ laßt sich ein φ mit $f(x) = f(p)+b(x-p)+\varphi(x)$ finden. (Denn man braucht ja lediglich φ durch $\varphi(x) = f(x)-f(p)-b(x-p)$ zu definieren.)
- Betrachtet man den sogenannten *Differenzenquotienten*
$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p}$$
für $q \to p$, so fällt auf, daß der Nenner gegen Null konvergiert. Damit der Quotient endlich bleibt und gegen einen Grenzwert strebt, muss also der Zähler auch gegen Null streben und zwar im wesentlichen im 'gleichen Masse'. Damit folgt aus Differenzierbarkeit also sinngemaaß die Stetigkeit. Einen praezisen Beweis geben wir unten.
- Wir erwaehnen noch, daß die Ableitung auch manchmal als Differentialquotient bezeichnet wird.

Beweis. $(i) \Longrightarrow (ii)$: Es gilt

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = b + \frac{\varphi(x)}{x-p} \to b, \quad x \to p.$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Setze $b := \lim_{x \to p, x \neq p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$. Dann erfüllt φ mit

$$f(x) = f(p) + b(x-p) + \varphi(x)$$

also

$$\frac{\varphi(x)}{(x-p)} = \frac{f(x)-f(p)}{x-p} - b \to 0, x \to p.$$

Weitere Aussage: Wurde schon gezeigt und zwar sowohl in $(ii) \Longrightarrow (i)$ als auch in $(i) \Longrightarrow (ii)$. □

Definition (Differenzierbarkeit). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : (a,b) \longrightarrow$ gegeben. Dann heißt f in $p \in I$ differenzierbar, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{x\to p, x\neq p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt dann die Ableitung von f in p und wird mit $f^{'}(p)$ oder $Df(p)$ oder $\frac{df}{dx}(p)$ bezeichnet. Ist f in allen Punkten von I differenzierbar, so heißt f differenzierbar.

Hinweis: Ausrechnen des Grenzwertes. Es gilt

$$\lim_{x\to p, x\neq p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}.$$