Spektraltheorie

Sommersemester 2016 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 6 **Besprechung Dienstag 14.06.2016**

(1) Sei A ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum. Zeigen Sie

$$\|A(A-\lambda i)^{-1}\| \leq 1 \text{ und } |\lambda|\|(A-\lambda i)\| \leq 1$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(Hinweis: Es reicht natuerlich (Warum?)

$$\|A(A-\lambda i)^{-1}f\|^2 + |\lambda|^2\|(A-\lambda i)^{-1}f\|^2 \leq \|f\|^2$$

für alle f aus dem Hilbertraum zu zeigen.)

(2) Sei A ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum und B ein abschließbarer A - beschränkter Operator mit A-Schranke κ. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $\kappa \leq \|B(A-z)^{-1}\|$ für jedes $z \in \varrho(A)$.

(b) Es gilt $\limsup_{\lambda\to\infty} \|B(A-\lambda i)^{-1}\| \leq \kappa$ und $\limsup_{\lambda\to-\infty} \|B(A-\lambda i)^{-1}\| \leq \kappa$. (Hinweis: Hier können Sie die Ergebnisse von Aufgabe 1 benutzen.)

(c) Es gilt $\lim_{\lambda\to\infty} \|B(A-\lambda i)^{-1}\| = \kappa = \lim_{\lambda\to-\infty} \|B(A-\lambda i)^{-1}\|$.

(3) Sei $g \in L^1(\mathbb{R},\lambda)$ und $p \in [1,\infty)$ beliebig. Zeigen Sie: Für jedes $f \in L^p(\mathbb{R},\lambda)$ existiert

$$\int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y)dy$$

fuer fast alle $x \in \mathbb{R}$, und die (fast ueberall) definierte Funktion

$$g * f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y)dy,$$

gehoert zu $L^p(\mathbb{R},\mu)$ und erfuellt $\|g * f\|_p \leq \|g\|_1\|f\|_p$.

(Hinweis: Es reicht (Warum?)

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)f(y)|dy\right)^p dx \leq \|g\|_1^p\|f\|_p^p$$

zu zeigen. Es gilt natuerlich $|g| = |g|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ fuer q mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.)

(4) Definiere zu $\varepsilon > 0$ die Funktion $q_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty), q_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{t^2+\varepsilon^2}$. Sei $p \in [1,\infty)$ beliebig. Zeigen Sie

$$q_\varepsilon * g \to g \text{ in } L^p(\mathbb{R},\lambda) \text{ für } \varepsilon \to 0$$

für alle $g \in L^p(\mathbb{R},\lambda)$, wobei $q_\varepsilon * g$ aus Aufgabe (3) (und der Vorlesung) bekannt ist.

(Hinweis: Aus der Vorlesung ist Ihnen $\|q_\varepsilon\|_1 = 1$ fuer alle $\varepsilon > 0$ bekannt. Nach Aufgabe (3) gilt dann also

$$\|q_\varepsilon * g\|_p \leq \|g\|_p$$

fuer alle $g \in L^p(\mathbb{R},\lambda)$ und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie nun (Wie?)

$$q_\varepsilon * \phi \to \phi \text{ in } L^p(\mathbb{R},\lambda) \text{ fuer } \varepsilon \to 0$$

fuer alle $\phi \in C_c(\mathbb{R})$ und nutzen Sie die Dichtheit von $C_c(\mathbb{R})$ in $L^p(\mathbb{R},\lambda)$.)