Analysis II Sommersemester 2017

Hausaufgabenblatt 5

Abgabe am 10.05.2017

Aufgabe 1. Beweisen Sie das Integralkriterium für Reihenkonvergenz:
Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $f : [n_0, \infty) \to [0, \infty)$ monoton fallend. Dann gilt

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{n_0}^{\infty} f(t)\, dt < \infty.$$

Aufgabe 2. Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Riemann Integrale existieren:

(a) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, (b) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$, (c) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie, für welche Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgenden uneigentlichen Riemann Integrale existieren:

(a) $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x \cdot (\ln x)^{\alpha}}\, dx$, (b) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\alpha}}\, dx$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Riemann Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$, (b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$, (c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$.

Hinweis für (c): Setzen Sie $x = 2t$ und nutzen Sie Additionstheoreme für den doppelten Winkel.

Zusatzaufgabe 5. Sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar. Gilt dann $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.