Spektraltheorie - Notizen[1]

Jena - Sommersemester 2016

Daniel Lenz

[1]Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung. Kommentare sind willkommen.

Inhaltsverzeichnis

Einführung und Motivation

Ein wichtiger Operator in vielen Bereichen der Mathematik und der Naturwissenschaften ist der Laplaceoperator Δ mit

$$\Delta f := \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_j}.$$

Tatsaechlich tritt dieser Operator in den folgenden grundlegenden Gleichungen auf:

- $\partial_t \psi_t = i(-\Delta + V)\psi_t$. (Schroedingergleichung - Quantenmechanik)
- $\partial_t \psi_t = \Delta \psi_t$ (Waermeleitungsgleichung - Diffusionsprozesse).
- $\partial_t^2 \psi_t = -c\Delta \psi_t$ (Wellengleichung - Ausbreitung von Wellen aller Art) mit der Variante der stehenden Welle $\Delta\psi = \lambda\psi$ (Schwingende Membran)
- $\Delta\phi = g$ (Poissongleichung - Elektrostatik und Potentialtheorie)

Es stellt sich nun bei der Behandlung dieser Gleichungen folgendes **Problem**: Nicht jede Funktion ist differenzierbar. Damit ist der Laplaceoperator nicht auf alle Funktionen anwendbar. Das hängt eng mit der Unbeschränktheit des Operator zusammen. Tatsaechlich sind nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen die Unbeschraenktheit und die nicht-ueberall-Definiertheit - zumindest sinngemaess - aequivalent.

Im Umgang mit diesem Problem haben sich im wesentlichen zwei Loesungsansaetze entwickelt:
Der eine Ansatz fuehrt auf Distributionentheorie. Damit hat man dann ein Universum zur Verfuegung, in dem alle auftretenden 'Funktionen' beliebig oft differenzierbar sind. Das ist ein grosser Vorteil. Allerdings wird das damit erkauft, dass die zugrundeliegenden Raeume (lokalkonvexe Raeume) eine relativ komplizierte Geometrie haben. Wir werden diesen Ansatz in dieser Vorlesung nicht verfolgen.
Der andere Ansatz ist Hilbertraeumtheorie. In diesem Fall hat man eine sehr schoene Geometrie zur Verfuegung. Allerdings sind die Operatoren im allgemeinen nicht mehr ueberall definiert. Dafuer hat man, wenn man sich auf selbstadjungierte Operatoren fokusiert, noch ein weiteres wesentliches neues Hilfsmittel zur Verfuegung: den Spektralsatz. Darum wird es in dieser Vorlesung gehen.

Erinnerung an (unbeschraenkte) Operatoren im Hilbertraum

In diesem Kapitel wiederholen wir einige grundlegende Konzepte im Umfeld von unbeschraenkten Operatoren. Da wir im weiteren Verlauf der Vorlesung immer Operatoren im Hilbertraum betrachten, schraenken wir uns auch hier auf Operatoren im Hilbertraum ein, auch wenn die (meisten) unten genannten Aussagen auch fuer Operatoren in beliebigen Banachraeumen gelten.

Konvention. Wir betrachten nur Hilbertraeume über den komplexen Zahlen. Das Skalarprodukt ist linear im zweiten Argument (und antilinear im ersten Argument).

Definition (Linearer Operator). *Ein linearer Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist eine lineare Abbildung*

$$T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{H}$$

von einem Unterraum $\mathcal{D}$ von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$. Der Unterraum $\mathcal{D}$ heisst der Definitionsbereich des linearen Operator und wird auch mit $D(T)$ bezeichnet. Ist $\mathcal{D}$ dicht in $\mathcal{H}$, so heisst T dicht definiert. Der Teilraum $G(T) := \{(f, Tf) : f \in \mathcal{D}\} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ heisst der Graph von T.

Bemerkung. Offenbar kann man aus dem Graphen G des Operators den Operator wiedergewinnen. Tatsaechlich ist ein Unterraum G von $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ genau dann der Graph eines Operator, wenn aus $(0, g) \in G$ folgt $g = 0$. In diesem Fall ist $D(T)$ die Projektion auf die erste Komponente von G und es gilt fuer $f \in D(T)$ dann $Tf = g$ mit dem eindeutigen g mit $(f, g) \in G$.

Sind S und T lineare Abbildungen im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit $D(S) \subset D(T)$ und $Tf = Sf$ fuer $f \in D(S)$, so heisst T eine *Fortsetzung* von S und S eine *Einschraenkung* von T. Man schreibt dann $S \subset T$ oder $T \supset S$. Offenbar gilt $S \subset T$ genau dann, wenn gilt $G(S) \subset G(T)$.

Definition (Abgeschlossener Operator). *Ein linearer Operator T im Hilbertraum $\mathcal{H}$ heisst abgeschlossen, wenn aus (f_n) in $D(T)$ mit $f_n \to f$ und $Tf_n \to g$ fuer $f, g \in \mathcal{H}$ folgt $f \in D(T)$ und $Tf = g$.*

Bemerkung.(a) Fuer einen linearen Operator $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{H}$ sind aequivalent:

(i) Es ist T abgeschlossen.
(ii) Es ist der Graph von T abgeschlossen in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.
(iii) Es ist $\mathcal{D}$ vollstaendig bzgl. der Graphennorm $\| \cdot \|_T$ definiert durch $\|f\|_T := (\|f\|^2 + \|Tf\|^2)^{1/2}$.

(b) Wie die Definition zeigt, ist Abgeschlossenheit des Operators eine Form der Konsistenz. Bei Stetigkeit geht es hingegen um eine Konvergenz.
Nicht alle Operatoren sind abgeschlossen. In diesem Kontext hilft das folgende Konzept.

Definition (Abschließbarer Operator). *Ein linearer Operator T im Hilbertraum heisst abschließbar, wenn er eine abgeschlossene Fortsetzung besitzt.*

Lemma. *Ist T ein abschließbarer Operator, so gibt es eine eindeutige abgeschlossene Fortsetzung $\overline{T}$ mit der Eigenschaft, dass jede abgeschlossene Forsetzung von T eine Forsetzung von $\overline{T}$ ist. Es gilt $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar. Wir zeigen nun die Existenz. Sei $G := \overline{G(T)}$. Dann muss G im Graphen jeder abgeschlossenen Fortsetzung von T enthalten sein. (Denn der Graph dieser Fortsetzung enthaelt $G(T)$ und ist abgeschlossen.) Da es solche Fortsetzungen $\widetilde{T}$ gibt, ist G selber der Graph eines Operators. Denn aus $(0, g) \in G$ folgt $(0, g) \in G(\widetilde{T})$ und damit folgt $g = \widetilde{T}0 = 0$. Damit ist G also der Graph eines Operator $\overline{T}$, d.h. es gilt

$$G(\overline{T}) = G.$$

Da G abgeschlossen ist, ist dann also $\overline{T}$ abgeschlossen. Damit ist G der Graph einer abgeschlossenen Fortsetzung. $\square$

Definition. *Es heisst die abgeschlossene Fortsetzung $\overline{T}$ aus dem vorigen Lemma der Abschluss von T.*

Fuer abgeschlossene Operatoren gilt folgender fundamentaler Satz.

Theorem (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Ist T ein abgeschlossener Operator in $\mathcal{H}$ mit abgeschlossenem Definitionsbereich, so ist T beschraenkt.*

Definition (Spektrum und Resolvente). *Sei T ein Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann heisst*

$$\varrho(T) := \{z \in \mathbb{C} : (T - zI) \text{ bijektiv mit stetiger Inversen}\}$$

die Resolventemenge von T und

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \varrho(T)$$

das Spektrum von T. Es heisst die Abbildung

$$\varrho(T) \longrightarrow \text{beschaenkte Operatoren auf } \mathcal{H}, z \mapsto (T - zI)^{-1},$$

die Resolvente.

Theorem (Der Satz zum Spektrum). *Sei T ein linearer Operator im Hilbertraum. Dann gilt:*
(a) Es ist $\sigma(T)$ abgeschlossen und $\varrho(T)$ offen. Genauer gilt fuer jedes $z \in \varrho(T)$ dann $U_r(z) \subset \varrho(T)$ mit $r := \|(T - zI)^{-1}\|^{-1}$ dann.
(b) Die Resolvente $R : \varrho(T) \longrightarrow$ beschraenkte Operatoren $, z \mapsto (T - zI)^{-1}$ ist analytisch (d.h. um jeden Punkt in eine normkonvergente Potenzreihe entwickelbar) und es gilt:

$$
\begin{aligned}
R(z) - R(w) &= -(z-w)R(z)R(w) \\
R(z)R(w) &= R(w)R(z) \\
\frac{d}{dz}R(z) &= -R(z)^2
\end{aligned}
$$

fuer alle $z, w \in \varrho(T)$.
(c) Ist $\varrho(T)$ nicht leer, so ist T abgeschlossen.

Beweis. (a) und (b): Sei $z \in \varrho(T)$. Dann gilt fuer alle $w \in \mathbb{C}$

$$(T - (z+w)I) = (I - w(T-z)^{-1})(T-z) = (T-z)(I - w(T-z)^{-1}).$$

Setze $B := (T - zI)^{-1}$. Dann ist fuer $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < r$ die Reihe

$$C := \sum_{n=0}^{\infty} w^n B^n$$

absolut konvergent mit

$$C(I - wB) = I = (I - wB)C.$$

Setzt man nun $S := C(T-z)^{-1} = (T-z)^{-1}C$ so folgt fuer $f \in D(T)$

$$S(T - (z-w)I)f = C(T-z)^{-1}(T-z)(I-wB)f = C(I-wB)f = f$$

und fuer $g \in \mathcal{H}$

$$(T - (z+w)I)Sg = (I - wB)(T-z)BCg = (I-wB)Cg = g.$$

Damit ist also S der Inverse von $(T - (z+w)I)$.
Damit folgt (a) sowie die Analytizitaet der Resolvente. Die uebrigen Aussagen von (b) folgen einfach.
Es bleibt (c) zu zeigen. Fuer $z \in \varrho(T)$ ist $(T - zI)^{-1}$ beschraenkt und uberall definiert, also abgeschlossen. Damit ist dann auch $(T - zI)$ abgeschlossen. Damit ist dann nach eine kleinen Rechnung auch T abgeschlossen. □

Beispiel - Multiplikationsoperatoren. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum ohne Atome von unendlichem Mass[1] und $u : X \longrightarrow \mathbb{C}$ meßbar. Sei M_u der maximale Operator der Multiplikation mit u auf $L^2(X,\mu)$ d.h.

$$
\begin{aligned}
D(M_u) &:= \{f \in L^2(X,\mu) : uf \in L^2(X,m)\} \\
M_u f &= uf.
\end{aligned}
$$

Ende der Vorlesung

Dann gilt:
(a) Es ist $D(M_u)$ dicht in $L^2(X,\mu)$.
(b) Es sind Spektrum und Resolventenmenge gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\sigma(M_u) &= \text{wesentlicher Wertebereich von } u \\
&:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu(u^{-1}(U_\varepsilon(\lambda))) > 0 \text{ for all } \varepsilon > 0\}
\end{aligned}
$$

[1] Eine messbare Teilmenge A von X heisst Atom von unendlichem Mass, wenn $\mu(A) = \infty$ und jede messbare Teilmengen von A entweder Mass 0 oder Mass ∞ hat. Ein Massraum hat offenbar genau dann keine Atome von unendlichem Mass, wenn jede messbare Menge mit positivem Mass eine messbare Teilmenge mit endlichem positiven Mass besitzt. Offenbar hat ein σ-endlicher Massraum keine Atome von unendlichem Maß.

und

$$\varrho(M_u) = \{z : \text{existiert } \varepsilon > 0 \text{ mit } |u(x) - z| \geq \varepsilon \text{ fuer fast alle } x \in X\}.$$

(c) $(M_u - z)^{-1} = M_{\frac{1}{u-z}}$ fuer alle $z \in \varrho(M_u)$.

(d) Es ist λ ein Eigenwert von $D(M_u)$ genau dann, wenn $\mu(u^{-1}(\{\lambda\})) > 0$ gilt.

Beweis. Zum ersten Punkt: Sei fuer jedes $N \in \mathbb{N}$ $U_N := \{x \in X : |u(x)| \leq N\}$ (d.h. es ist U_N das Urbild unter u der Kugel mit Radius N um den Ursprung). Dann ist U_N messbar mit $U_N \to X$. Weiterhin gehoert fuer jedes $f \in L^2(X, \mu)$ offenbar $f_N := 1_{U_N} f$ zu $D(M_u)$. Wegen $U_N \nearrow X$ gilt $f_N \to f$. Damit folgt die Dichtheit. (Diese Betrachtungen koennen wir in jedem Massraum durchfuehren.)

Zum zweiten und dritten Punkt: Sei

$$\varrho' := \{z : \text{existiert } \varepsilon > 0 \text{ mit } |u(x) - z| \geq \varepsilon \text{ fuer fast alle } x \in X\}.$$

Es gilt $\varrho' = \varrho(T)$:

Fuer $z \in \varrho'$ ist $g := \frac{1}{u-z}$ eine beschraenkte Funktion und es gilt offenbar

$$(M_u - z)M_g = I, \;\; M_g(M_u - z) = I_{D(M_u)}.$$

Es ist also $z \in \varrho(T)$ und die angegebene Formel fuer die Inverse von $(M_u - z)$ gilt.

Fuer $z \notin \varrho'$ gilt fuer jedes $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{x : |u(x) - z| \leq \varepsilon\}) > 0.$$

Nach der Voraussetzung der Nichtexistenz von Atomen unendlichen Masses gibt es dann eine meßbare Menge A mit $0 < \mu(A) < \infty$ und

$$A \subset \{x : |u(x) - z| \leq \varepsilon\}.$$

Dann gehoert die charakteristische Funktion 1_A von A zu $L^2(X, \mu)$ und ist nicht das Nullelement und es gilt

$$\|(M_u - z)1_A\| \leq \varepsilon \|1_A\|.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gehoert dann aber z nicht zu $\varrho(T)$. (Denn fuer $z \in \varrho(T)$ und $g \in D(T)$ gilt

$$\|g\| = \|(T - z)^{-1}(T - z)g\| \leq \|(T - z)^{-1}\| \|(T - z)g\|$$

also

$$\|(T - z)g\| \geq \frac{1}{\|(T - z)^{-1}\|} \|g\|.$$

Das liefert die Behauptung.)

Damit ist die Ausage zur Resolvente gezeigt. Die Aussage zum Spektrum folgt durch Komplementbildung. Die Formel zur Inversen wurde mitbewiesen.

Zum letzten Punkt. Das lassen wir als Uebung.

KAPITEL 1

Grundlegendes zu selbstadjungierten Operatoren

In diesem Kapitel lernen wir grundlegende Eigenschaften selbstadjungierter Operatoren kennen.

1. Der adjungierte Operator

In diesem Abschnitt geht es um die Frage: Was ist ein selbstadjungierter Operator?

Definition (Adjungierter Operator). *Sei T ein dicht definierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann ist der zu T adjungierte Operator T^* definiert durch*

$$D(T^*) = \{f \in \mathcal{H} : \text{ es existiert } h \in \mathcal{H} \text{ mit } \langle f, Tg\rangle = \langle h, g\rangle \text{ fuer alle } g \in D(T)\},$$

$$T^* f = h.$$

Bemerkungen. (a) Da T dicht definiert ist, ist T^* wohldefiniert (d.h. h ist eindeutig). Offenbar ist T^* ein linearer Operator.

(b) Im allgemeinen ist es nicht einfach, den adjungierten eines Operator T auszurechnen. Will man zeigen, dass ein bestimmter Operator S der adjungierte von T ist, so sind die folgenden beiden Aussagen zu zeigen:

- Es gilt $S \subset T^*$, d.h. fuer alle $f \in D(S)$ und $g \in D(T)$ gilt $\langle Sf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle$.
- Es gilt $D(T^*) \subset D(S)$.

(c) Es gelten folgende einfache Eigenschaften:

- $S \subset T$ impliziert $T^* \subset S^*$.
- $(S + \lambda T)^* \supset S^* + \overline{\lambda} T^*$
- $(ST)^* \supset T^* S^*$.

Beispiel - Multiplikationsoperatoren. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum ohne Atome von unendlichem Mass und $u : X \longrightarrow \mathbb{C}$ meßbar. Sei M_u der maximale Operator der Multiplikation mit u auf $L^2(X, \mu)$ d.h.

$$D(M_u) := \{f \in L^2(X, \mu) : uf \in L^2(X, m)\}$$

$$M_u f = uf.$$

Dann gilt $M_u^* = M_{\overline{u}}$.

Es ist $M_{\overline{u}} \subset M_u^*$. Das ist einfach.

Es gilt $D(M_u^*) \subset D(M_{\overline{u}})$: Sei $f \in D(M_u^*)$. Damit gilt also fuer $h = M_u^* f \in L^2$

$$\int \overline{h} g dx = \langle M_u^* f, g\rangle = \langle f, M_u g\rangle = \int \overline{f} u g dx = \int \overline{\overline{u} f} g dx$$

also
$$\int (\overline{h} - \overline{\overline{u}f}) g dx = 0$$
fuer alle $g \in D(M_u)$. Setze $v := (h - \overline{u}f)$. Wir wissen schon, dass jede Funktion der Form $g = 1_{U_N} h$ mit $h \in L^2$ und $U_N = u^{-1}(B_N(0))$ zu $D(M_u)$ gehoert. Weiterhin gilt offenbar $v1_{U_N} \in L^2$ fuer jedes N. Damit gilt also
$$0 = \int \overline{v} 1_{U_N} h dx = \langle v 1_{U_N}, h \rangle$$
fuer alle $N \in \mathbb{N}$ und $h \in L^2(X, \mu)$. Damit folgt dann $v1_{U_N} = 0$ fuer alle N und damit dann $v = 0$. Das ist die gewuenschte Aussage.

Der adjungierte Operator hat (ziemlich) automatisch schoene Abgeschlossenheits- und Dichtdefiniertheitseigenschaften.

LEMMA (Einfache Eigenschaften von T^*). *Sei T ein dicht definierte Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann ist T^* ein abgeschlossener Operator. Ist T zusaetzlich noch abgeschlossen, so ist T^* ebenfalls dicht definiert.*

Beweis. Wir zeigen zunaechst die Abgeschlossenheit von T^*. Sei (f_n) eine Folge in $D(T^*)$ mit $f_n \to f$ und $T^* f_n \to h$. Dann gilt fuer jedes $g \in D(T)$ also
$$\langle f, Tg \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, Tg \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T^* f_n, g \rangle = \langle h, g \rangle.$$
Das zeigt $f \in D(T^*)$ mit $T^* f = h$.
Sei nun T abgeschlossen. Wir zeigen, dass $D(T^*)$ dicht definiert ist. Sei $g \perp D(T^*)$. Dann ist also $(g, 0)$ senkrecht auf $G(T^*)$. Wir berechnen nun $G(T^*)^\perp$:
Behauptung. Sei $H := \{(Tf, -f) : f \in D(T)\}$. Dann gilt $G(T^*) = H^\perp$.
Bew. (der Behauptung): Es gilt
$$\begin{aligned} (g,h) \in H^\perp &\iff 0 = \langle (g,h), (Tf, -f) \rangle \text{ alle } f \in D(T) \\ &\iff 0 = \langle g, Tf \rangle - \langle h, f \rangle \text{ alle } f \in D(T) \\ &\iff g \in D(T^*), T^* g = h. \end{aligned}$$
Das beendet den Beweis der Behauptung.
Damit folgt dann also
$$G(T^*)^\perp = H^{\perp\perp} = \overline{H}.$$
Damit gibt es also eine Folge (f_n) in $D(T)$ mit $(Tf_n, -f_n) \to (g, 0)$. Da T abgeschlossen ist, folgt dann $g = T0 = 0$. □

DEFINITION. *Ein dicht definierter Operator im Hilbertraum heisst selbstadjungiert, wenn er gleich seinem adjungierten Operator ist.*

Bemerkung. Ein selbstadjungierter Operator ist also automatisch abgeschlossen (da der adjungierte automatisch abgeschlossen ist).

Beispiel - Multiplikationsoperatoren. Der maximale Operator der Multiplikation mit u ist selbstadjungiert, genau dann wenn u (fast sicher) reellwertig ist.

Unser naechstes Ziel ist es den Ort des Spektrums eines selbstadjungierten Operators zu finden. Fuer spaeter erweist es sich als nuetzlich, hier einen etwas allgemeineren Einstieg zu nehmen.

Definition (Symmetrischer Operator). *Ein dicht definierter Operator S im Hilbertraum heisst symmetrisch, wenn gilt $S \subset S^*$ d.h.*

$$\langle f, Sg \rangle = \langle Sf, g \rangle$$

fuer alle $f, g \in D(S)$.

Ende der Vorlesung

Bemerkungen.

(a) Der Adjungierte eines symmetrischen Operator ist abgeschlossen (als Adjungierter) und dicht definiert (da er den Definitionsbereich des urspruenglichen Operator enthaelt).

(b) Jeder symmetrische Operator S ist abschließbar mit

$$\overline{S} \subset S^*$$

(da S^* eine abgeschlossene Fortsetzung von S ist).

(c) Ist S ein symmetrischer Operator, so gilt $(\overline{S})^* = S^*$ (d.h. der Operator und sein Abschluss haben denselben Adjungierten). Insbesondere ist also der Abschluss eines symmetrischen Operator wieder symmetrisch.
(Denn: Aus $S \subset \overline{S}$ folgt $\overline{S}^* \subset S^*$. Sei umgekehrt $g \in D(S^*)$ beliebig und $f \in D(\overline{S})$ beliebig. Dann gibt es eine Folge f_n in $D(S)$ mit $f_n \to f$ und $Sf_n \to \overline{S}f$. Dann gilt aber

$$\begin{aligned}\langle g, \overline{S}f \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle g, Sf_n \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle S^* g, f_n \rangle \\ &= \langle S^* g, f \rangle.\end{aligned}$$

Da $f \in D(\overline{S})$ beliebig ist, folgt $g \in D(\overline{S}^*)$ und $\overline{S}^* g = S^* g$. Das beendet den Beweis.)

Beispiel - Laplaceoperator auf $C_c^\infty(\Omega)$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und S auf $C_c^\infty(\Omega)$ definiert durch $Sf = -\Delta f$. Dann ist S symmetrisch. Wie man sich leicht klarmacht ist aber S nicht selbstadjungiert. (Denn es ist fuer beschraenktes Ω zum Beispiel die konstante Funktion 1 im Definitionsbereich von S^* mit $S^* 1 = 0$. Fuer unbeschraenktes Ω ist S ebenfalls nicht selbstadjungiert.)

Fuer symmetrische Operatoren gilt folgender grundlegender Zusammenhabng.

Lemma (Die Gleichung zu symmetrischen Operatoren). *Ist S ein symmetrischer Operator im komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$, so gilt*

$$\|(S - zI)f\|^2 = \|(S - Rez)f\|^2 + |\Im z|^2 \|f\|^2$$

fuer alle $z \in \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{H}$. Insbesondere gilt

$$\|(S - zI)f\| \geq |\Im z| \|f\|$$

und es ist $(S - z)$ injektiv fuer alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\Im z \neq 0$. Ist also S zusaetzlich noch abgeschlossen, so ist $R(S - zI)$ also abgeschlossen fuer alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\Im z \neq 0$.

Bemerkung. Ist S symmetrisch und $z \in \varrho(S)$, so folgt aus der angegebenen Gleichung einfach

$$\|(S - \Re z)(S - z)^2\| \leq 1 \text{ und } \|(\Im z(S - z)^{-1}\| \leq 1.$$

Beweis. Die erste Gleichung folgt durch direkte Rechnung unter Nutzen der Symmetrie. Aus dieser Gleichung folgt sofort die Ungleichung

$$\|(S - z)f\| \geq \|\Im z\| \|f\|$$

fuer alle $z \in \mathbb{C}$ und $x \in H$. Damit folgt dann leicht die letzte Aussage: Sei $g_n = (S - zI)f_n$ eine Folge im Bild, die gegen g konvergiert. Dann ist (g_n) eine Cauchy-Folge. Damit ist dann nach der Ungleichung auch (f_n) eine Cauchy-Folge. Sei f ihr Grenwert. Dann gilt also

$$f_n \to f \text{ und } Sf_n = (S - zI)f_n + zf_n \to g + zf.$$

Dann gilt nach Abgeschlossenheit von S also $f \in D(S)$ und $Sf = g + zf$ und damit

$$(S - z)f = g.$$

Das beendet den Beweis. □

Theorem (Der Satz zu selbstadjungierten Operatoren). *Sei S ein symmetrischer Operator im komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es ist S selbstadjungiert.*
(ii) *Es gibt $z_\pm \in \mathbb{C}$ mit $\Im z_\pm \gtrless 0$ und $R(S - z_\pm) = \mathcal{H}$.*
(iii) *Fuer alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\Im z \neq 0$ gilt $R(S - z) = \mathcal{H}$.*

Gilt eine dieser Bedingungen, so gilt

$$\sigma(S) \subset \mathbb{R}$$

sowie fuer $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\|(S - zI)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\Im z|}$$

und $((S - zI)^{-1})^* = (S - \overline{z}I)^{-1}$ fuer alle $z \in \varrho(S)$.

Bemerkung. Das Theorem liefert insbesondere, dass das Spektrum eines selbstadjungieren Operator in $\mathbb{R}$ enthalten ist. Das erlaubt es in der Quantenmechanik das Spektrum eines selbstadjungierten Operator als die moeglichen Ergebnisse einer Messung zu interpretieren.

Beweis. Wir zeigen zunaechst die Aquivalenz:

(i)$\Longrightarrow$ (iii): Wir nutzen die Ungleichung

$$(*) \quad \|(S - z)f\| \geq \|\Im z\| \|f\|$$

fuer alle $z \in \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{H}$. Wie schon im vorigen Lemma diskutiert liefert $(*)$ sofort die Injektivitaet von $(S - z)$ und die Abgeschlossenheit des Bildes von $(S - zI)$ da S als selbstadjungierter Operator natuerlich abgeschlossen ist. Schliesslich folgt aus $(*)$ (mit $\overline{z}$) noch

$$Ran(S - z)^\perp = Ker(S^* - \overline{z}) = Ker(S - \overline{z}) = \{0\}.$$

Damit ist dann also $Ran(S - zI)$ dicht und abgeschlossen, also stimmt es mit $\mathcal{H}$ ueberein.

(iii)$\Longrightarrow$ (ii): Das ist klar.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Wir beginnen mit einer kleinen Vorbereitung. Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $R(S - zI) = \mathcal{H}$. Dann ist $S - zI$ surjektiv. Weiterhin ist $S - zI$ nach dem vorangehenden Lemma injektiv. Damit ist $S - zI$ bijektiv. Nach dem voranghenden Lemma gilt weiterhin

$$\|(S - zI)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\Im z|}$$

Denn es gilt fuer $f = (S - zI)^{-1}g$

$$\|g\| = \|(S - zI)f\| \geq |\Im z|\|f\|$$

und damit

$$\|f\| \leq \frac{1}{|\Im z|}\|g\|.$$

Nach dem Satz zum Spektrum ist dann $S - w$ stetig invertierbar fuer alle $w \in U_{|\Im z|}$. Dann kann man den vorangehenden Schluss also auf alle diese w anwenden. Beginnt man nun mit $z_{\pm}$, so erhaelt man schliesslich

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \varrho(S).$$

Wir zeigen nun $D(S^*) \subset D(S)$. (Wegen $S \subset S^*$ folgt dann das gewuenschte $S = S^*$.) Sei $g \in D(S^*)$ beliebig. Damit existiert also $(S^* - i)g$. Nach der Vorbereitung gilt

$$R(S - i) = \mathcal{H} = R(S + i).$$

Damit existiert also ein $f \in D(S)$ mit

$$(S - i)f = (S^* - i)g.$$

Wegen $S \subset S^*$ gilt dann also auch $(S^* - i)f = (S^* - i)g$ und damit

$$(S^* - i)(f - g) = 0.$$

Damit ergibt sich fuer alle $h \in D(T)$ dann

$$\langle (S + i)h, (f - g)\rangle = \langle h, (S^* - i)(f - g)\rangle = 0.$$

Wegen $R(S + i) = \mathcal{H}$ folgt dann $g = f \in D(S)$.

Die Aussage ueber das Spektrum und die Schranke an die Norm der Resolvente wurde im Beweis von (ii) $\Longrightarrow$ (i) mitbewiesen.

Zur letzten Aussage: Fuer beliebige $f, g \in D(S)$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ haben wir

$$\langle f, (S - z)g\rangle = \langle (S - \overline{z})f, g\rangle.$$

Gilt $f = (S - \overline{z})^{-1}f'$ und $g = (S - z)^{-1}g'$ mit beliebigen $f', g' \in \mathcal{H}$, so folgt also

$$\langle (S - \overline{z})^{-1}f', g'\rangle = \langle f', (S - z)^{-1}g'\rangle.$$

Das liefert die gewuenschte Behauptung. □

FOLGERUNG. *Sei T ein symmetrischer Operator im Hilbertraum. Dann ist T selbstadjungiert genau dann, wenn $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ gilt.*

Bemerkung. (Uebung) Aus dem (Beweis des) vorigen Theorem erhalt man noch eine Beschreibung des Spektrums eines symmetrischen nicht selbstadjungierten Operators: Dieses ist $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R} \cup \mathbb{C}^+$ oder $\mathbb{R} \cup \mathbb{C}'$.

Beispiel - selbstadjungierte Operatoren mit reinem Punktspektrum. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Sei T ein symmetrischer Operator auf $\mathcal{H}$, so dass eine Orthonormalbasis (ϕ_n) von $\mathcal{H}$ in $D(S)$ und eine Folge (λ_n) in $\mathbb{R}$ existiert mit

$$S\phi_n = \lambda_n \phi_n.$$

Dann ist S abschließbar und es ist $\overline{S}$ selbstadjungiert mit reinem Punktspektrum. (Ein selbstadjungierter Operator hat *reines Punktspektrum*, wenn es eine Orthonormalbasis aus Eigenfunktionen gibt.)

Ende der Vorlesung

Beweis. Da (ϕ_n) eine ONB ist, gibt es eine eindeutige unitaere Abbildung

$$U : \mathcal{H} \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$$

mit $U\phi_n = \delta_n$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$. (Hier ist δ_n die charakteristische Funktion von $\{n\}$.) Wir koennen also ohne Einschraenkung annehmen, dass S ein Operator auf $\ell^2(\mathbb{N})$ ist mit $\delta_n \in D(S)$ und $S\delta_n = \lambda_n \delta_n$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Sei M_λ der maximale Operator der Multiplikation mit der Funktion

$$\lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, n \mapsto \lambda_n,$$

auf $\ell^2(\mathbb{N})$. Da λ reellwertig ist, ist M_λ ein selbstadjungierter Operator nach dem schon gezeigten. Sei weiterhin $M_{\lambda,c}$ die Einschraenkung von M_λ auf $C_c := \{f \in \ell^2(\mathbb{N}) : f(n) = 0 \text{ fuer alle bis auf endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt (wie man leicht sieht)

$$\overline{M_{\lambda,c}} = M_\lambda.$$

Weiterhin gilt nach Konstruktion

$$M_{\lambda,c} \subset S.$$

Damit folgt dann

$$M_\lambda = \overline{M_{\lambda,c}} \subset \overline{S}.$$

Wie in einer obigen Bemerkung diskutiert ist mit S auch $\overline{S}$ symmetrisch und damit folgt dann also

$$\overline{S} \subset \overline{S}^* \subset M_\lambda^* = M_\lambda.$$

Nimmt man alles zusammen folgt dannn $\overline{S} = M_\lambda$ und $\overline{S}$ ist selbstadjungiert. Weiterhin sieht man durch Betrachten von M_λ leicht, dass die Eigenwerte von $\overline{S}$ gerade die λ_n sind und jede Eigenfunktion zu einem λ gerade eine Linearkombination der Eigenfunktionen von λ_n mit $\lambda_n = \lambda$ ist.

Dieses allgemeine Resulat kann man anwenden auf folgende Operatoren: Sei $-\infty < a < b < \infty$. Sei $C^2([a,b])$ die Menge der Funktionen $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, die auf (a,b) zweimal stetig differenzierbar sind mit Ableitungen (0-ter, 1-ter und 2ter Ordnung), die sich stetig auf ganz $[a,b]$ fortsetzen lassen.
Sei $L_{C^2}^{(N)}$ definiert durch

$$D(L_{C^2}^{(N)}) := \{f \in C^2([a,b]) : f'(a) = f'(b) = 0\}$$

$$L_{C^2}^{(N)} f = -f''.$$

Sei $L_{C^2}^{(D)}$ definiert durch

$$D(L_{C^2}^{(D)}) := \{f \in C^2([a,b]) : f(a) = f(b) = 0\}$$

$$L_{C^2}^{(D)} f = -f''.$$

Dann sind $L_{C^2}^{(N)}$ und $L_{C^2}^{(D)}$ symmetrisch und ihre Abschluesse sind selbstadjungiert und die Operatoren haben reines Punktspektrum.
(Bew. Die Symmetrie folgt nach partieller Integration, da die Randterme aufgrund der Randbedingungen verschwinden. Weiterhin bilden die Funktionen

$$\psi_n = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{\pi n(x-a)}{(b-a)}\right), n \in \mathbb{N}_0$$

und

$$\phi_n = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{\pi n(x-a)}{(b-a)}\right), n \in \mathbb{N},$$

jeweils Orthonormalbasen aus Eigenfunktionen (Uebung). Damit folgt aus den vorangehenden allgemeinen Ueberlegungen die gewuenschte Aussage.)

Bemerkung. Es sind also die Abschluesse $L^{(N)}$ und $L^{(D)}$ von $L_{C^2}^{(N)}$ und $L_{C^2}^{(D)}$ zwei verschiedene selbstadjungierte Fortsetzungen von $-\Delta|_{C_c^\infty(a,b)}$. Allgemeiner ergeben sich alle selbstadungierten Fortsetzungen von $-\Delta|_{C_c^\infty(a,b)}$ durch Wahl geeigneter Randbedingungen.

Operatoren, deren Abschluss selbstadjungiert ist (wie im vorigen Beispiel), haben einen eigenen Namen.

Definition. *Ein Operator heisst wesentlich selbstadjungiert, wenn sein Abschluss selbstadjungiert ist.*

Bemerkung. Offenbar ist ein wesentlich selbstadjungierter Operartor symmetrisch. (Denn ist S wesentlich selbstadjungiert, so gilt $S \subset \overline{S} = \overline{S}^* = S^*$.

2. Selbstadjungierte Operatoren via Formen

In diesem Abschnitt geht es um die Frage: Wo bekommt man selbstadjungierte Operatoren her? Eine sehr effektive und recht 'moderne' Methode zur Erzeugung von selbstadjungierten Operatoren liefern abgeschlossene Formen.

Definition (Quadratische Form). *Eine quadratische Form auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist eine Abbildung $Q : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, wobei $\mathcal{D}$ eine Unterraum von $\mathcal{H}$ ist, so dass gilt:*

- *$Q(f, g + \alpha h) = Q(f, g) + \alpha Q(f, h)$ fuer alle $f, g, h \in \mathcal{D}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. 'Q ist linear im zweiten Argument'*
- *$\overline{Q(f, g)} = Q(g, f)$ fuer alle $f, g \in \mathcal{D}$. 'Q ist symmetrisch'*

Dann heisst $\mathcal{D}$ der Definitionsbereich von Q und wird auch mit $D(Q)$ bezeichnet.

Bemerkung. Die von uns betrachteten Formen werden mit 'vollem Namen' als *symmetrische Sesquilinearformen* bezeichnet. Da in dieser Vorlesung keine anderen Formen vorkommen, verwenden wir die einfachere Bezeichnung *Form* oder *quadratische Form.*

Beispiel - beschraenkte Formen. Ist T ein ueberall definierter beschraenkter selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$, so ist $Q_T(f, g) := \langle f, Tg\rangle = \langle Tf, g\rangle$

eine ueberall definierte Form auf $\mathcal{H}$ mit $|Q(f,g)| \leq \|T\|\|f\|\|g\|$ fuer alle $f, g \in \mathcal{H}$. Ist umgekehrt Q eine ueberall definierte Form mit

$$|Q(f,g)| \leq C\|f\|\|g\|$$

fuer alle $f, g \in \mathcal{H}$, so gibt es einen eindeutigen ueberall definierten beschraenkten selbstadjungierten Operator T mit $Q = Q_T$. (Bew: Die erste Aussage ist einfach. Zur zweiten Aussage: Betrachte fuer festes $f \in \mathcal{H}$ die Abbildung

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}, g \mapsto Q(f,g).$$

Diese Abbildung ist linear und beschraenkt (durch $C\|f\|$). Damit existiert nach dem Riezschen Lemma ein Element $Tf \in \mathcal{H}$ mit $\|Tf\| \leq C\|f\|$ mit

$$Q(f,g) = \langle Tf, g\rangle$$

fuer alle $g \in \mathcal{H}$. Offenbar ist die Abbildung $f \mapsto Tf$ linear und - wegen $\|Tf\| \leq C\|f\|$ - auch stetig. Damit gilt dann also insgesamt $Q(f,g) = \langle Tf, g\rangle$. Mit der Symmetrie von Q sieht man dann leicht, dass T selbstadjungiert ist.) Eine Form mit $|Q(f,g)| \leq C\|f\|\|g\|$ fuer alle $f, g \in \mathcal{H}$ wird (oft) *beschraenkt* genannt.

Das Beispiel laesst sich wesentlich verallgemeinern auf unbeschraenkte Operatoren. Dazu ist lediglich eine Schranke nach unten noetig.

DEFINITION (Nach unten beschraenkte Form). *Die quadratische Form Q heisst nach unten beschraenkt (mit Schranke $\gamma \in \mathbb{R}$) wenn gilt*

- *$Q(f,f) \geq \gamma\langle, f, f\rangle$ fuer alle $f \in D(Q)$.*

In diesem Fall schreibt man $Q \geq \gamma$.

Beispiele - nach unten beschraenkte Formen.

- Ist T ein symmetrischer nach unten beschraenkter Operator, so ist $Q(f,g) = \langle f, Tg\rangle$ mit $D(Q) = D(T)$ eine nach nach unten beschraenkte Form. (Hier heisst ein Operator nach unten beschraenkt, wenn ein $\gamma \in \mathbb{R}$ existiert mit $\langle f, Tf\rangle \geq \gamma\|f\|^2$.)
- Sei $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein Massraum und $V : X \longrightarrow [0, \infty)$ messbar. Dann ist Q_V mit

$$D(Q_V) := \{f \in L^2(X,\mu) : \int V|f|^2 d\mu < \infty\} = L^2(X, (1+V)\mu)$$

$$Q(f,g) = \int V\overline{f}g d\mu$$

eine nach unten beschraenkte Form mit Schranke 0.

Es ist Q_V beschraenkt genau dann, wenn V beschraenkt ist (Uebung).

Sinngemaess (und in einem noch zu praezisierenden Sinne tatsaechlich) ist dies die Form zum maximalen Operator der Multiplikation mit V. Man beachte aber, dass - fuer unbeschraenktes V der Definitionsbereich der Form echt groesser ist als der des Operators

$$D(M_V) = \{f \in L^2(X,m) : \int |Vf|^2 d\mu < \infty.\}$$

- Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{(N)}$ offen und $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$. Dann definiert man auf $D(Q) = C_c^1(\Omega)$ die Form Q durch
$$Q(f,g) = \int_\Omega \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle_{\mathbb{C}^{(N)}} dx.$$
Dies ist die Form zu einer selbstadjungierten Version des Laplace-operator Δ auf $C^2_\infty(\Omega)$. Man beachte auch hier, dass an Funktionen im Definitionsbereich lediglich die Forderung der Existenz der ersten Ableitung gestellt wird (waehrend man fuer den Laplacaoperator ja letztendlich auch zweite Ableitungen braucht).

Ende der Vorlesung

Ist Q eine nach unten beschraenkte quadratische Form mit Schranke γ, so ist
$$\langle f,g\rangle_Q := Q(f,g) - \gamma\langle f,g\rangle + \langle f,g\rangle$$
ein Skalarprodukt auf $D(Q)$.

Definition (Abgeschlossenheit von Formen). *Eine nach unten beschraenkte quadratische Form Q mit Schranke γ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heisst abgeschlossen, wenn ihr Definitionsbereich $\mathcal{D}$ mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ vollstaendig (also ein Hilbertraum) ist.*

Bemerkung. (Uebung) Man macht sich leicht klar, dass Abgeschlossenheit nicht von der Wahl der unteren Schraenke abhaengt.

Beispiel. Die oben betrachteten beschraenkten Formen sind abgeschlossen. Ebenso ist die Form Q_V abgeschlossen (s.u.).

Die Relevanz von Abgeschlossenheit beruht auf der Nuetzlichkeit einer Hilbertraumstruktur. Fuer den Nachweis der Abgeschlossenheit ist aber oft auch die folgende Charakterisierung nuetzlich.

Erinnerung. Eine Funktion $h : M \longrightarrow [0,\infty]$ auf einem metrischen Raum heisst *unterhalbstetig*, wenn $f(x) \le \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$ falls $x_n \to x$.

Lemma (Charakterisierung Abgeschlossenheit). *Fuer eine nach unten beschraenkte Form Q sind aquivalent:*
(i) *Es ist Q abgeschlossen.*
(ii) *Die Abbildung $Q' : \mathcal{H} \longrightarrow [0,\infty]$,*
$$Q'(f) := Q(f,f) \text{ falls } f \in D(Q) \text{ bzw. } Q'(f) = \infty \text{ sonst}$$
ist unterhalbstetig.

Beweis. Sei ohne Einschraenkung $\gamma = 0$. Der grundlegende Zusammenhang zwischen (i) und (ii) ist die Formel
$$Q'(f) + \|f\|^2 = \|f\|_Q^2$$
fuer alle $f \in D(Q)$. Damit ist also Q' sinngemaess so etwas wie die Norm eines Skalarproduktes.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): (Das ist die fuer unsere Anwendungen wichtige Richtung.) Sei (f_n) eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_Q$. Dann ist (f_n) eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|$. Damit konvergiert diese Folge (in $\mathcal{H}$) gegen ein f. Wir zeigen, dass sie auch bzgl. $\|\cdot\|_Q$ gegen f konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert aufgrund der Cauchy-Folgen-Eigenschaft also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$Q'(f_n - f_m) + \|f_n - f_m\|^2 = \|f_n - f_m\|_Q^2 \leq \varepsilon^2$$

fuer alle $n, m \geq N$. Fuer $n \to \infty$ konvergiert $f_n - f_m$ in $\mathcal{H}$ gegen $f - f_m$ und es folgt unter Nutzen von (ii) dann

$$Q'(f - f_m) + \|f - f_m\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty}(Q'(f_n - f_m) + \|f_n - f_m\|^2) \leq \varepsilon^2$$

fuer $m \geq N$. Das liefert dann

$$\|f - f_m\|_Q \leq \varepsilon^2$$

fuer alle $m \geq N$.

(i)$\Longrightarrow$ (ii): Um das zu zeigen, brauchen wir noch zwei Aussage aus der Hilbertraumtheorie. (Wir werden spaeter in der Vorlesung eine noch staerkere Aussage zu Formen auf andere Art beweisen.) Sei $\mathcal{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle$ ein beliebiger Hilbertraum. Dann gilt (vgl. Appendix):

- Ist (f_n) eine beschraenkte Folge in $\mathcal{K}$, so hat (f_n) eine schwach konvergente Teilfolge. ('Schwache Kompaktheit der Einheitskugel im Hilbertraum')
- Ist (f_n) eine schwach konvergent Folge in $\mathcal{K}$, so gibt es eine Teilfolge (f_{n_k}) mit $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{(N)} f_{n_k} \to f$. ('Banach Saks')

Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $f_n \to f$. Wir betrachten die Folge $(Q'(f_n))$. Gilt $\liminf_{n\to\infty} Q'(f_n) = \infty$ oder $Q'(f) = 0$, so ist nichts weiter zu tun.
Sei nun $Q'(f) > 0$ und $\liminf_{n\to\infty} Q'(f_n) < \infty$. Ohne Einschraenkung (sonst Teilfolge) gelte

$$\lim_{n\to\infty} Q'(f_n) = \liminf_{n\to\infty} Q'(f_n) < \infty.$$

Damit ist dann also die Folge (f_n) im Hilbertraum $D(Q)$ mit der Norm $\|\cdot\|_Q$ beschraenkt. Daher hat die Folge (f_n) eine Teilfolge, die bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ schwach konvergiert gegen ein $h \in D(Q)$. Mit dem Satz von Banach Saks folgt $h = f$. Damit gilt dann also $f = h \in D(Q)$ und es folgt

$$\|f\|_Q^2 = \lim_{n\to\infty} \langle f, f_n\rangle_Q \leq \liminf_{n\to\infty} \|f\|_Q \|f_n\|_Q$$

also nach Division durch $\|f\|_Q = Q'(f) \neq 0$ dann

$$\|f\|_Q \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_Q.$$

Das bedeutet gerade

$$Q'(f) + \|f\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty}(Q'(f_n) + \|f_n\|^2).$$

Wegen $f_n \to f$ in $\mathcal{H}$ folgt

$$Q'(f) \leq \liminf_{n\to\infty} Q'(f_n).$$

Das ist die gewuenschte Aussage. □

Beispiel. Ist (X, μ) ein Massraum und $V : X \longrightarrow [0, \infty)$ messbar, so ist

$$Q(f, g) := \int_X V\overline{f}g d\mu$$

auf

$$D(Q) := \{f \in L^2(X,\mu) : \int_X V|f|^2 d\mu < \infty\}$$

eine nach unten halbbeschraenkte abgeschlossene Form. (Denn nach dem Lemma von Fatou ist das zugehoerige Q' unterhalbstetig: Sei (f_n) eine Folge in $L^2(X,\mu)$ mit $f_n \to f$. Sei (ohne Einschraenkung; sonst Uebergang zu einer Teilfolge)

$$\lim_{n\to\infty} Q(f_n, f_n) = \liminf_{n\to\infty} Q(f_n, f_n).$$

Ohne Einschraenkung (sonst Auswahl einer Teilfolge) koennen wir annehmen, dass f_n punktweise fast ueberall gegen f konvergiert. Dann gilt nach dem Lemma von Fatou

$$Q(f,f) = \int_X V|f|^2 d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X V|f_n|^2 d\mu = \liminf_{n\to\infty} Q(f_n, f_n).$$

Das beendet den Beweis.)

Theorem (Der Satz zu abgeschlossenen Formen). *Sei Q eine nach unten beschraenkte abgeschlossene Form mit dichtem Definitionsbereich $\mathcal{D}$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann existiert ein eindeutiger selbstadjungierter Operator T auf $\mathcal{H}$ mit $D(T) \subset \mathcal{D}$ und*

$$Q(f,g) = \langle f, Tg\rangle$$

fuer alle $g \in D(T)$ und $g \in \mathcal{D}$. Es ist T gegeben durch

$$D(T) = \{g \in \mathcal{D} : \text{ ex existiert } h \in \mathcal{H} \text{ mit } Q(f,g) = \langle f, h\rangle \text{ fuer alle } f \in \mathcal{D}\}$$

$$Tg = h.$$

Bemerkung. Wir werden spaeter auch die Umkehrung zeigen i.e. dass man zu jedem (nach unten beschraenkten) Operator T eine eindeutige Form Q assoziieren kann, so dass T gerade der nach dem Theorem zu der Form gehoerige Operator ist.

Ende der Vorlesung

Beweis. Wir zeigen zunaechst, dass der durch

$$D(T) = \{f \in \mathcal{D} : \text{ es existiert } h \in \mathcal{H} \text{ mit } Q(f,g) = \langle f, h\rangle \text{ fuer alle } g \in \mathcal{D}\}$$

$$Tg = h,$$

gegebene Operator die gewuenschten Eigenschaften hat. (Das zeigt die Existenz sowie die letzte Aussage.) Dazu beweisen wir eine Reihe von Aussagen:

Durch T wird ein linearer Operator definiert. Da $\mathcal{D}$ dicht ist, ist T wohldefiniert. Offenbar ist T linear.

Es gilt $\langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle$ fuer alle $f, g \in D(T)$. Das folgt aus der Symmetrie von Q:

$$\langle f, Tg\rangle = Q(f,g) = \overline{Q(g,f)} = \overline{\langle g, Tf\rangle} = \langle Tf, g\rangle.$$

Es ist $D(T)$ dicht. (Bisher haette sehr wohl $D(T) = \{0\}$ gelten koennen.) Sei J ein Operator von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{D}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}$ und

$$J : \mathcal{D} \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{D}, Jf = f.$$

Wir untersuchen nun J:

Es ist J abgeschlossen[1]: Sei $f_n \to f$ (in $\mathcal{H}$) und $Jf_n \to g$ (in $\mathcal{D}$). Dann gilt also $f_n \to f$ in $\mathcal{H}$ und $f_n \to g$ in $\mathcal{D}$. Damit folgt $f = g \in \mathcal{D}$ und $Jf = g$. Damit ist J abgeschlossen.
Es gilt $D(J^*) = D(T) \subset \mathcal{D}$.[2] Denn es gilt $f \in D(J^*)$ genau dann, wenn ein $g \in \mathcal{H}$ existiert mit

$$\langle g, h\rangle = \langle f, Jh\rangle_Q = Q(f,h) + (1-\gamma)\langle f, h\rangle$$

fuer alle $h \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}$.
Da J abgeschlossen ist, ist also $D(J^*) = D(T)$ dicht in $\mathcal{D}$ bzgl. $\|\cdot\|_Q$. Da $\mathcal{D}$ dicht in $\mathcal{H}$ bzgl. $\|\cdot\|$ ist und $\|\cdot\|_Q \geq \|\cdot\|$ gilt, folgt die gewuenschte Dichtheit.

Es ist T symmetrisch. Das folgt sofort aus den vorangehenden Eigenschaften.

Es gilt $R(T-\gamma+1) = H$. Fuer jedes $f \in \mathcal{H}$ ist die Abbildung

$$(\mathcal{D}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \longrightarrow \mathbb{C},\ g \mapsto \langle f, g\rangle,$$

linear und stetig. Hierbei folgt die Stetigkeit aufgrund von

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\| \leq \|f\|\|g\|_Q.$$

Damit folgt also nach dem Lemma von Riesz die Existenz eines $\widetilde{f} \in \mathcal{D}$ mit

$$\langle f, g\rangle = \langle \widetilde{f}, g\rangle_Q = Q(\widetilde{f}, g) + (1-\gamma)\langle \widetilde{f}, g\rangle.$$

Damit folgt also

$$Q(\widetilde{f}, g) = \langle f - \widetilde{f} + \gamma\widetilde{f}, g\rangle.$$

Nach Definition von T liefert dies $T\widetilde{f} = f - \widetilde{f} + \gamma\widetilde{f}$ und damit $(T-\gamma+1)\widetilde{f} = f$.

Es ist T selbstadjungiert. Nach dem vorangehenden ist $T-\gamma+1$ surjektiv. Wegen

$$\|f\|\|(T-\gamma+1)f\| \geq \langle f, (T-\gamma+1)f\rangle = Q(f,f) + (1-\gamma)\|f\|^2 \geq \|f\|^2$$

ist $(T-\gamma+1)$ auch injektiv. Damit ist es bijektiv. Aufgrund der Offenheit der Resolventenmenge, gibt es also $z_\pm$ in $\mathbb{C}^\pm$ in der Resolventenmenge. Aus dem Satz zu selbstadjungierten Operatoren folgt dann, dass T selbstadjungiert ist.

Nachdem wir nun die Existenz und die angegebene Formel fuer T bewiesen haben, zeigen wir nun die *Eindeutigkeit*: Sei S ein selbstadjungierter Operator mit den gewuenschten Eigenschaften. Dann gilt offenbar $S \subset T$. Da S und T selbstadjungiert sind, folgt dann

$$S \subset T \subset S^* = S$$

und damit $S = T$. □

Unter Umstaenden ist eine Form nicht abgeschlossen hat aber abgeschlossene Fortsetzungen.

DEFINITION. *Eine Form heisst abschließbar, wenn sie eine abgeschlossene Fortsetzung besitzt.*

---

[1]Das Konzept der Abgeschlossenheit eines Operators zwischen zwei verschiedenen Hilbertraeumen ist in der naheliegenden Weise definiert, vgl. folgende Betrachtungen.

[2]Das Konzept des Adjungierten eines Operators zwischen zwei verschiedenen Hilbetraeumen ist in der naheliegenden Weise definiert; vgl. folgend Betrachtungen.

LEMMA. *Sei Q eine nach unten halbbeschraenkte abschließbare Form. Dann gibt es eine eindeutige abgeschlossene Form $\overline{Q}$ mit $\overline{Q} \subset \widetilde{Q}$ fuer alle abgeschlossenen Fortsetzungen $\widetilde{Q}$ von Q.*

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar. Wir zeigen nun die Existenz. Sei $\overline{D}$ die Menge der $f \in \mathcal{H}$, fuer die eine Folge (f_n) in $D(Q)$ existiert mit den folgenden beiden Eigenschaften:

- (f_n) ist eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_Q$;
- es konvergiert (f_n) gegen f in $\mathcal{H}$.

Dann ist $\overline{D}$ offenbar ein Vektorraum und im Definitionsbereich jeder abgeschlossenen Fortsetzung von Q enthaelten. Da es solche Fortsetzungen gibt, ist die Fortsetzung von Q auf $\mathcal{D}$ zu $\overline{Q}$ durch

$$\overline{Q}(f,g) = \lim_{n\to\infty} Q(f_n, g_n)$$

wohldefiniert. (Denn sei $\widetilde{Q}$ eine abgeschlossene Fortsetzung und seien (f_n) und (f_n') zwei Cauchy-Folgen in $D(Q)$ bzgl. $\|\cdot\|_Q$. Dann konvergieren diese Cauchy-Folgen also in $D(\widetilde{Q})$ gegen f bzw. f'. Damit konvergieren sie aber auch in $\mathcal{H}$ gegen f bzw. f'. Haben sie also in $\mathcal{H}$ denselben Grenzwert, so auch in $D(\widetilde{Q})$.) $\square$

Bemerkung. Der Beweis des Lemma liefert bei naeherem Hinsehen noch eine Charakterisierung von Abschließbarkeit. Eine Form ist genau dann abschließbar ist, wenn folgendes gilt: Ist (f_n) eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_Q$ mit $f_n \to 0$ bzgl. $\|\cdot\|$, so gilt $f_n \to 0$ bzgl. $\|\cdot\|_Q$.

DEFINITION. *In der Situation des Lemma heisst die Form $\overline{Q}$ der Abschluss von Q.*

Man kann Formen nutzen, um selbstadjungierte Fortsetzungen gewisser symmetrischer Operatoren zu erhalten. Man beachte, dass fuer eine selbstadungierte Fortsetzung T eines symmetrischen Operator S jedenfalls gilt $S \subset T \subset S^*$. Es ist also T eine Einschraenkung von S^*.

THEOREM (Der Satz zur Friedrichsfortsetzung). *Sei S ein symmetrischer Operator in $\mathcal{H}$ und die Form Q auf $D(S)$ definiert durch $Q(f,g) := \langle f, Sg\rangle$. Ist Q nach unten beschraenkt, so ist Q abschließbar und es gibt eine eindeutige selbstadjungierte Fortsetzung T von S mit $D(T) \subset D(\overline{Q})$. Es gilt*

$$D(T) = D(S^*) \cap D(\overline{Q}) \text{ und } Tf = S^* f.$$

Ende der Vorlesung

Beweis. Es sind einige Aussagen zu zeigen.

Es ist Q abschließbar. Sei ohne Einschraenkung Q durch 1 nach unten beschraenkt. Wir zeigen: Ist (f_n) eine Cauchy-Folge in $D(Q)$ bzgl. $\|\cdot\|_Q$ mit $f_n \to 0$ bzgl. $\|\cdot\|$, so gilt $f_n \to 0$ bzgl. $\|\cdot\|_Q$. (Das liefert dann leicht die Abschließbarkeit.) Sei (f_n) eine Folge der angegebenen Art. Dann gilt fuer alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$Q(f_m, f_m) + Q(f_n, f_n) = Q(f_n - f_m, f_n - f_m) + Q(f_m, f_n) + Q(f_n, f_m).$$

Betrachtet man jetzt fuer festes n nun $m \to \infty$ so folgt aus $f_m \to 0$ dann

$$Q(f_m, f_n) = \langle f_m, S f_n\rangle \to 0 \text{ und } Q(f_n, f_m) = \overline{Q(f_m, f_n)} \to 0$$

und damit

$$\|f_n\|_Q^2 = Q(f_n, f_n) \leq \limsup_{m\to\infty} Q(f_n - f_m) = \limsup_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_Q^2.$$

Damit folgt dann $Q(f_n, f_n) \to 0$ fuer $n \to \infty$.

Fuer die weiteren Betrachungen erweist sich folgende Behauptung als nuetzlich.

Zwischenbehauptung: Fuer alle $f \in D(S^*) \cap D(\overline{Q})$ und $g \in D(\overline{Q})$ gilt $\langle g, S^* f\rangle = \overline{Q}(g, f)$.

Bew. Sei $g \in D(S)$ und (f_n) eine Folge in $D(Q)$ mit $f_n \to f$ bzgl. $\|\cdot\|_Q$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle g, S^* f\rangle &= \langle Sg, f\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle Sg, f_n\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} Q(g, f_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \overline{Q}(g, f_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \overline{Q}(g, f).
\end{aligned}$$

Das liefert die gewuenschte Formel $\langle g, S^* f\rangle = \overline{Q}(g, f)$ fuer $g \in D(S)$. Mit einem weiteren entsprechenden Grenzuebergang folgt dann die Formel fuer alle $g \in D(\overline{Q})$.

Sei T die nach dem Satz zu abgeschlossenen Formen zu $\overline{Q}$ gehoerende selbstadungierte Operator. Dann gilt $D(T) = D(S^*) \cap D(\overline{Q})$.

Wir zeigen zwei Inklusionen. Offenbar gilt $D(T) \subset D(\overline{Q})$. Weiterhin folgt aus der Zwischenbehauptung sofort $D(T) \subset D(S^*)$. Das liefert $\subset$. Die Inklusion $\supset$ folgt sofort aus der Zwischenbehauptung und der Definition von T.

Es gibt hoechstens eine selbstadjungierte Fortsetzung T' von S mit $D(T') \subset D(\overline{Q})$. Sei T' eine solche Fortsetzung. Dann gilt fuer $f \in D(T') \subset D(S^*)$ und $g \in D(\overline{Q})$ nach der Zwischenbehauptung also

$$\langle g, T' f\rangle = \langle g, S^* f\rangle = \overline{Q}(g, f).$$

Damit folgt dann $f \in D(T)$ und $Tf = T'f$. Damit ist T' eine Einschraenkung von T. Aus der Selbstadjungiertheit von T und T' folgt $T = T'$. □

Definition (Friedrichsfortsetzung). *Es heisst T die Friedrichsfortsetzung von S.*

Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{(N)}$ offen und $S = -\Delta|_{C_c^\infty(\Omega)}$. Dann ist S symmetrisch (s.o.) und es gilt nach partieller Integration

$$\langle f, Sf\rangle = -\int_\Omega f\Delta f dx = \int_\Omega \langle \nabla f, \nabla f\rangle dx \geq 0.$$

Damit erfuellt S die Voraussetzungen des Satzes und hat also eine selbstadjungierte Fortsetzung. Fuer $\Omega = \mathbb{R}^{(N)}$ ist die Friedrichsfortsetzung von S die einzige selbstadjungierte Fortsetzung von S (s.u.). Sie ist bekannt als *der Laplaceoperator* auf $L^2(\mathbb{R}^{(N)})$. Beliebiges Ω behandeln wir im folgenden Unterabschnitt.

3. Laplaceoperatoren und laplaceartige Operatoren

In diesem Abschnitt wenden wir die Resultate des vorigen Abschnittes an, um besonders wichtige Klassen von Operatoren zu konstruieren.

3.1. Laplaceoperatoren auf offenen $\Omega \subset \mathbb{R}^{(N)}$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{(N)}$ offen. Wir werden nun zunaechst ein Konzept von schwacher Ableitung angeben und dann Formen auf geeigneten schwach ableitbaren Funktionen definieren. Die Operatoren, die zu diesen Formen gehoeren, sind dann Laplaceoperatoren.

Man definiert den *Sobolevraum* $W^1(\Omega)$ der *Funktionen auf* Ω *mit schwacher Ableitung in* L^2 als die Menge aller Funktionen $f \in L^2(\Omega)$ mit der Eigenschaft, dass fuer jedes $j = 1, \ldots, N$ ein $f_j \in L^2(\Omega)$ existiert mit

$$\int_\Omega f \partial_j \varphi dx = -\int_\Omega f_j \varphi dx$$

fuer alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Offenbar ist ein solches f_j (wenn es existiert) eindeutig (da $C_c^\infty(\Omega)$ dicht im Hilbertraum $L^2(\Omega)$ ist). Es heisst f_j die *schwache Ableitung nach der* j*-ten Koordinate* von f. Man schreibt

$$\nabla f := (f_1, \ldots, f_N).$$

Es gilt offenbar

$$C_c^\infty(\Omega) \subset W^1(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Bemerkung. Analog kann man $W^N(\Omega)$ definieren, als die Menge der Funktionen in $L^2(\Omega)$ deren schwache Ableitung (englisch *weak* derivative und daher kommt die Bezeichnung W) bis zur Ordnung N existieren und zu $L^2(\Omega)$ gehoeren. Man kann noch allgemeiner $W^{N,p}(\Omega)$ definieren als die Menge aller Funktionen in $L^p(\Omega)$, deren schwache Ableitung bis zur Ordnung N existieren und in $L^p(\Omega)$ liegen. Uns wird es immer um L^2 gehen und wir lassen daher diesen Index weg.

Bemerkung. Diese Betrachtungen lassen sich etwas verallgemeinern: Sei $\Omega \in \mathbb{R}^N$ offen. Dann definiert man den Vektorraum der lokal integrierbaren Funktionen, $L^1_{loc}(\Omega)$, als

$$\{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \text{ messbar} : \int_\Omega |f 1_K| dx < \infty \text{ fuer alle kompakten } K \subset \Omega\}/\sim,$$

wobei $\sim$ zwei Funktionen identifiziert die fast ueberall uebereinstimmen. Offenbar gilt $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ fuer jedes $p \in [1, \infty]$. Es heisst ein $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ *schwache Ableitung* von f nach der j-ten Koordinate, wenn fuer alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int_\Omega f \partial_j \varphi dx = -\int_\Omega g \varphi dx$$

fuer alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Mit etwas Aufwand laesst sich dann auch hier die Eindeutigkeit der schwachen Ableitung zeigen.

Offenbar ist

$$\langle f, g\rangle_{W^1(\Omega)} := \langle f, g\rangle + \sum_{j=1}^{(N)} \langle f_j, g_j\rangle = \int_\Omega \overline{f} g dx + \int_\Omega \langle \nabla f(x), \nabla g(x)\rangle dx$$

eine Sklalarprodukt auf $W^1(\Omega)$. Die zugehoerige Norm heisst die *Sobolevnorm.*

PROPOSITION. *Es ist $W^1(\Omega)$ vollstaendig bzgl.* $\|\cdot\|_{W^1(\Omega)}$.

Beweis. Sei $(f^{(n)})$ eine Cauchy-Folge in $W^1(\Omega)$. Dann ist fuer jedes $j = 1,\ldots,N$ also $(f_j^{(n)})$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega)$. Da L^2 vollstaendig ist, exstieren dann $f, f_1, \ldots, f_N \in L^2$ mit $f^{(n)} \to f$ und $f_j^{(n)} \to f_j$ in L^2 fuer $n \to \infty$. Es reicht zu zeigen, dass f zu $W^1(\Omega)$ gehoert und f_j, $j = 1,\ldots,N$, seine schwachen Ableitungen sind. Das folgt durch direkte Rechung:

$$\begin{aligned}\int f\partial_j\varphi dx &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f^{(n)}\partial_j\varphi dx\\ &= \lim_{n\to\infty} -\int_\Omega f_j^{(n)}\varphi dx\\ &= -\int_\Omega f_j\varphi dx.\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Wir definieren noch $W_0^1(\Omega)$ als den Abschluss von $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^1(\Omega)$ d.h.

$$W_0^1(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^1(\Omega)}.$$

Dann ist $W_0^1(\Omega)$ ebenfalls vollstaendig als abgeschlossener Teilraum eines vollstaendigen Raumes.

Bemerkung. Fuer $\Omega = \mathbb{R}^N$ gilt $W_0^1(\Omega) = W^1(\Omega)$. Im allgemeinen gilt aber nicht die Gleichheit. Diese Aussagen sind nichttrivial. Wir werden sie (und mehr) im weiteren Verlauf der Vorlesung diskutieren.

Ende der Vorlesung

Wir definieren nun die Form $Q^{(N)}$ auf $\mathcal{D} := W^1(\Omega)$ durch

$$Q^{(N)}(f,g) := \int_\Omega \langle\nabla f, \nabla g\rangle dx.$$

Offenbar ist $Q^{(N)}$ nach unten durch 0 beschraenkt und es gilt

$$\langle f,g\rangle_{Q^{(N)}} = \langle f,g\rangle_{W^1(\Omega)}.$$

Insbesondere ist also $Q^{(N)}$ abgeschlossen (da $W^1(\Omega)$ nach der Proposition vollstaendig ist). Damit gehoert nach dem Satz zu abgeschlossenen Formen zu $Q^{(N)}$ ein selbstadjungierter Operator $L^{(N)}$.
Fuer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt fuer alle $f \in \mathcal{D}$ nach Definition der schwachen Ableitung

$$\begin{aligned}
Q(\varphi, f) &= \int_\Omega \sum_{j=1}^{(N)} \overline{\partial_j \varphi} f_j dx \\
&= -\int_\Omega \sum_{j=1}^{(N)} \overline{\partial_j^2 \varphi} f dx \\
&= -\int_\Omega \overline{\Delta\varphi} f dx \\
&= \langle (-\Delta\varphi), f\rangle.
\end{aligned}$$

Damit gehoert also φ zu $D(L^{(N)})$ und es gilt

$$L^{(N)}\varphi = -\Delta\varphi.$$

Es heisst $L^{(N)}$ bzw. $-L^{(N)}$ der *Laplaceoperator mit Neumann-Randbedingungen*.[3]

Wir definieren nun die Form $Q^{(D)}$ auf $\mathcal{D} := W_0^1(\Omega)$ durch

$$Q^{(D)}(f,g) := \int_\Omega \langle \nabla f, \nabla g\rangle dx.$$

Offenbar ist $Q^{(D)}$ nach unten durch 0 beschraenkt und es gilt

$$\langle f, g\rangle_{Q^{(D)}} = \langle f, g\rangle_{Q^{(N)}} = \langle f, g\rangle_{W^1(\Omega)}.$$

Insbesondere ist also $Q^{(D)}$ abgeschlossen (da $W_0^1(\Omega)$ vollstaendig ist). Damit gehoert nach dem Satz zu abgeschlossenen Formen zu $Q^{(D)}$ ein selbstadjungierter Operator $L^{(D)}$.

Fuer $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt fuer alle $f \in \mathcal{D}$ nach Definition der schwachen Ableitung und derselben Rechnung wie oben

$$Q^{(D)}(\varphi, f) = Q^{(N)}(\varphi, f) = \langle (-\Delta\varphi), f\rangle.$$

Damit gehoert also φ zu $D(L^{(D)})$ und es gilt

$$L^{(D)}\varphi = -\Delta\varphi.$$

Es heisst $L^{(D)}$ bzw. $-L^{(D)}$ der *Laplaceoperator mit Dirichlet-Randbedingungen.*

Bemerkungen. (a) Es ist nicht schwer zu sehen, dass $L^{(D)}$ die Friedrichsfortsetzung von $-\Delta$ auf $C_c^\infty(\Omega)$ ist. Tatsaechlich ist nach Konstruktion ja die Form $Q^{(D)}$ gerade der Abschluss der zu $-\Delta|_{C_c^\infty(\Omega)}$ gehoerenden Form.

(b) Die obigen Betrachtungen zeigen, dass $L^{(D)}$ und $L^{(N)}$ beide selbstadjungierte Fortsetzungen von Δ auf $C_c^\infty(\Omega)$ sind. Fuer $\Omega = \mathbb{R}^{(N)}$ stimmen $W^1(\Omega)$ und $W_0^1(\Omega)$ und damit auch $L^{(D)}$ und $L^{(N)}$ ueberein (s.u.). Im allgemeinen sind $L^{(D)}$ und $L^{(N)}$ aber verschieden (wie man schon an eindimensionalen Beispielen sehen kann; vgl. folgender Unterabschnitt). Insbesondere ist Δ auf $C_c^\infty(\Omega)$ im allgemeinen nicht wesentlich selbstadjungiert (da es zwei verschiedene selbstadjungierte Fortsetzungen hat).

[3]Es sind wirklich beide Konventionen im Gebrauch. Tendenziell wird in der Differentialgeometrie eher L und in der mathematischen Physik eher $-L$ als Laplaceoperator bezeichnet.

Aehnliche Betrachtungen koennen fuer eine wesentlich groessere Klasse von Beispielen gemacht werden. Das diskutieren wir als naechstes. Sei

$$b : \Omega \longrightarrow \text{ symmetrische } N \times N\text{-Matrizen}$$

messbar und es gebe $0 < \lambda_0 < \lambda_N < \infty$ mit

$$\lambda_0 \leq \text{kleinster Eigenwert von } b(x) \leq \text{ groesster Eigenwert von } b(x) \leq \lambda_N$$

fuer alle $x \in \Omega$. Dann ist die auf dem Definitionsbereich $W^1(\Omega)$ definierte Form

$$Q_b^{(N)}(f,g) := \int_\Omega \langle b(x)\nabla f(x), \nabla g(x)\rangle dx$$

abgeschlossen. (Tatsaechlich ist wieder die Formnorm aequivalent zur Sobolevnorm.) Der zugehoerige Operator $L_a^{(N)}$ wird (oft) als

$$-\nabla \cdot b\nabla$$

mit Neumann Randbedingungen bezeichnet. Es wird allerdings im allgemeinen sehr schwer sein explizit Elemente aus dem Definitionsbereich dieses Operators anzugeben. Insbesondere wird $C_c^\infty(\Omega)$ im allgemeinen nicht zum Definitionsbereich gehoeren.
Ebenso ist die auf dem Definitionsbereich $W_0^1(\Omega)$ definierte Form

$$Q_b^{(D)}(f,g) := \int_\Omega \langle b(x)\nabla f(x), \nabla g(x)\rangle dx$$

abgeschlossen. (Tatsaechlich ist wieder die Formnorm aequvalent zur Sobolevnorm.) Der zugehoerige Operator $L_b^{(D)}$ wird (oft) als $-\nabla\cdot b\nabla$ mit Dirichlet Randbedingungen bezeichnet. Es wird allerdings im allgemeinen sehr schwer sein explizit Elemente aus dem Definitionsbereich dieses Operators anzugeben. Insbesondere wird $C_c^\infty(\Omega)$ im allgemeinen nicht zum Definitionsbereich gehoeren.
Die Operatoren der Form $\nabla \cdot b\nabla$ sind aehnlich dem Laplaceoperator. Sie werden auch als *Diffusionsoperatoren* bezeichnet.
Bemerkung. Jedes $b : \Omega \longrightarrow$ symmetrische $N \times N$-Matrizen entsteht aus einem $a : \Omega \longrightarrow \; N \times N$ - Matrizen via $b = a^* a$. Man kann also die obige Definition der Form auch schreiben als

$$\int_\Omega \langle a(x)\nabla f(x), a(x)\nabla g(x)\rangle dx.$$

3.2. Laplaceoperatoren auf Graphen. Hier kommen wir zu einer weiteren grossen Klasse von Operatoren, die insbesondere in den letzten zehn Jahren rege Aufmerksamkeit erfahren haben.

Sei X eine Menge[4]. Dann ist X mit der σ-Algebera aller Teilmengen ein Massraum. Sei m ein Mass auf X. Dann ist m eindeutig durch die Funktion $X \longrightarrow [0,\infty), x \mapsto m(\{x\})$ bestimmt. Wir schreiben $m(x) := m(\{x\})$. Weiterhin setzen wir noch

$$0 < m(x) < \infty$$

[4]Für die folgenden Überlegungen mag man sich ohne Einschränkung eine abzaehlbare Menge vorstellen.

fuer alle $x \in X$ voraus. (Sollte das fuer ein $x \in X$ nicht gilt, entfernen wir einfach diesen Punkt. In diesem Sinne ist es eigentlich keine Einschraenkung das zu fordern.) Wir nennen dann (X, m) einen *diskreten Maßraum.*

Ein *Graph ueber* X ist eine Abbildung $b : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ mit

- $b(x, y) = b(y, x)$ fuer alle $x, y \in X$;
- $b(x, x) = 0$ fuer alle $x \in x$;
- $\sum_{z \in X} b(x, z) < \infty$ fuer alle $x \in X$.

Sei $\widetilde{D}$ die Menge aller $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\frac{1}{2} \sum_{x,y \in X} b(x, y)|f(x) - f(y)|^2 < \infty$$

Sei $\widetilde{Q}$ auf $\widetilde{D} \times \widetilde{D}$ definiert durch

$$\widetilde{Q}(f, g) := \frac{1}{2} \sum_{x,y \in X} \overline{(f(x) - f(y))}(g(x) - g(y)).$$

Wir definieren

$$C_c(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : \{x : f(x) \neq 0\} \text{ ist endlich } \}.$$

Proposition. *Sei (X, m) ein diskreter Massraum und b ein Graph ueber X. Dann gilt $C_c(X) \subset \widetilde{Q}$.*

Beweis. Sei $\varphi \in C_c(X)$ gegeben. Dann koennen wir abschaetzen

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}(\varphi, \varphi) &= \frac{1}{2} \sum_{x,y} b(x, y)|\varphi(x) - \varphi(y)|^2 \\
&\leq \sum_{x,y} b(x, y)(|\varphi(x)|^2 + |\varphi(y)|^2) \\
&= 2 \sum_{x,y} b(x, y)|\varphi(x)|^2 \\
\text{(Fubini)} \quad &= 2 \sum_{x} |\varphi(x)|^2 \left(\sum_{y \in X} b(x, y) \right) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Proposition. *Die Einschraenkung von $\widetilde{Q}$ auf $\widetilde{D} \cap \ell^2(X, m)$ ist abgeschlossen.*

Beweis. Nach der Charakterisierung der Abgeschlossenheit reicht es eine Unterhalbstetigkeit zu zeigen. Diese folgt leicht aus dem Lemma von Fatou. □

Die Form aus der Proposition wird mit $Q_{b,c}^{(N)}$ bezeichnet. Der zugehoerige Operator ist der *Laplace Operator mit Neumann Randbedingungen.*

Ende der Vorlesung

Es ist ein nichtriviales (und im allgemeinen Fall auch nicht vollstaendig geloestes) Problem die Definitionsbereiche dieser Operatoren explizit anzugeben. Aber man kann ihre Aktion angeben. Dazu fuehren wir den Operator $\widetilde{L}$ auf

$$\widetilde{F} := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : \sum_y b(x,y)|f(y)| < \infty \text{ fuer alle } x\imath X\}$$

ein durch

$$\widetilde{L}f(x) := \frac{1}{m(x)} \sum_{y \in X} b(x,y)(f(x) - f(y)).$$

(Man beachte, dass fuer $f \in \widetilde{F}$ die Summe absolut konvergent ist fuer jedes $x \in X$.)

Proposition. *Es gilt $\widetilde{D} \subset \widetilde{F}$.*

Beweis. Sei $f \in \widetilde{D}$. Dann koennen wir fuer jedes $x \in X$ unter Nutzen von

$$d(x) := \sum_{y \in X} b(x,y) < \infty$$

abschaetzen

$$\begin{aligned}
\sum_{y \in X} b(x,y)|f(y)| &\leq \sum_{y \in X} b(x,y)(|f(x) - f(y)| + |f(x)|) \\
&= \sum_{y \in X} b(x,y)|f(x) - f(y)| + |f(x)| \sum_{y \in X} b(x,y) \\
&= \sum_{y \in X} b^{1/2}(x,y) b^{1/2}(x,y)|f(x) - f(y)| + |f(x)|d(x) \\
&\leq d(x)^{1/2} \left(\sum_y b(x,y)|f(x) - f(y)|^2 \right)^{1/2} + |f(x)|d(x) \\
&\leq d(x)^{1/2} \widetilde{Q}(f,f)^{1/2} + |f(x)|d(x) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Theorem. *Sei (X,m) ein diskreter Massraum und b ein Graph ueber X mit assoziierter Form $Q^{(N)}$. Sei $L^{(N)}$ der zugehoerige Operator. Dann gilt $D(L^{(N)}) \subset \widetilde{D}$ und $L^{(N)}f = \widetilde{L}f$ fuer alle $f \in D(L^{(N)})$.*

Beweis. Aufgrund der vorigen Proposition gilt

$$D(L^{(N)}) \subset D(Q^{(N)}) \subset \widetilde{F}.$$

Weiterhin gilt nach Definition von $L^{(N)}$ fuer alle $f \in D(L^{(N)})$ und jedes $p \in X$

$$\langle 1_p, L^{(N)} f \rangle = Q(1_p, f).$$

(Hier bezeichnet $1_p \in C_c(X) \subset D(Q^{(N)})$ die charakteristische Funktion von p.) Ausrechnen beider Seiten liefert

$$\langle 1_p, L^{(N)} f \rangle = m(p) L^{(N)} f(p)$$

und

$$\begin{aligned}
Q(1_p, f) &= \frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)(1_p(x) - 1_p(y))(f(x) - f(y)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)1_p(x)(f(x) - f(y)) - \frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)1_p(y)(f(x) - f(y)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{y} b(p,y)(f(p) - f(y)) - \frac{1}{2}\sum_{x} b(x,p)(f(x) - f(p)) \\
&= \sum_{y} b(p,y)(f(p) - f(y)).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Symmetrie von b genutzt.
Vergleich der beiden Terme gibt die gewuenschte Aussage. □

Bemerkung. Man kann auch die Form $Q^{(N)}_{b,c}$ einschraenken auf den Abschluss von $C_c(X)$ bzgl $\| \cdot \|_{Q^{(N)}_{b,c}}$. Das ist natuerlich ein abgeschlossener Unterraum und entsprechend handelt es sich um eine abgeschlossene Form. Der zugehoerige Operator $L^{(D)}$ ist der *Laplace Operator mit Dirichlet Randbedingungen*. Wie oben sieht man, dass dieser Operator auch eine Einschraenkung von $\widetilde{L}$ ist.

Bemerkung - Vergleich von Laplace auf Graphen und auf Teilmengen des Euklidischen Raumes.
Auf der Ebene der Formen sieht man eine klare Analogie:

Diffusion auf $\Omega \subset \mathbb{R}^N$:

$$\int_\Omega \langle b(x)\nabla f(x), \nabla g(x)\rangle dx.$$

Graph b over (X, m):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) &= \sum_{x}\left(\sum_{y\in X} b(x,y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))\right) \\
&= \sum_{x\in X} \langle b(x)\nabla f(x), \nabla g(x)\rangle
\end{aligned}$$

mit

$$\nabla f(x) : X \longrightarrow \mathbb{C}, y \mapsto f(x) - f(y).$$

Auf der Ebene der Operatoren sieht man zunaechst keine so klare Analogie zwischen $-\Delta f(x) = -\sum_{j=1}^N \partial_j^2 f(x)$ und $Lf(x) = \frac{1}{m(x)}\sum_{y\in X} b(x,y)(f(x) - f(y))$.

3.3. Absolute stetige Funktionen und Δ auf $(a, b) \subset \mathbb{R}$. In diesem Abschnitt betrachten wir den Sonderfall $N = 1$ und $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ (mit $-\infty < ay < b < \infty$). Dann haben wir aufgrund der obigen Betrachtungen zwei Definitionen von $L^{(D)}$ und $L^{(N)}$. Zum einen wurden diese Operatoren weiter oben als Abschluss von $L^{(D)}_{C^2}$ und $L^{(N)}_{C^2}$ definiert. Zum anderen wurden sie eben mittels Formen definiert. Diese beiden Definitionen stimmen aber ueberein. Dazu reicht es zu zeigen

$$(\diamond) \quad \langle g, L_{C^2}^{(N/D)} f\rangle = Q^{(N/D)}(g,f)$$

fuer alle $f \in D(L_{C^2}^{(N/D)})$ und $g \in D(Q^{(N/D)})$. Denn dann gilt fuer den zu der Form $Q^{(N/D)}$ assoziierten Operator $L_{Q^{(N/D)}}$ offenbar

$$L_{C^2}^{(N/D)} \subset L_{Q^{(N/D)}}.$$

Da die rechte Seite abgeschlossen ist, folgt dann auch

$$\overline{L_{C^2}^{(N/D)}} \subset L_{Q^{(N/D)}}.$$

Da selbstadjungierte Operatoren uebereinstimmen, wenn sie ineinander enthalten sind, folgt die gewuenschte Gleicheit.
Um die Gueltigkeit von $(\diamond)$ und mehr geht es in diesem Abschnitt.

Beispiel - $L^{(D)}$: Wir betrachten den Operator mit Dirichlet Randbedingungen. Wir zeigen zunaechst, dass jedes $f \in C^2([a,b])$ mit $f(a) = f(b) = 0$ zu $D(Q^{(D)})$ gehoert. Dazu muss man zeigen, dass ein solches f durch (φ_n) in $C_c^\infty((a,b))$ im Sinne von $Q^{(D)}$ approximiert werden kann. Das ist einfach. Nun folgt durch partielle Integration leicht

$$\langle g, L_{C^2}^{(D)} f\rangle = Q^{(D)}(g,f)$$

fuer alle $f \in D(L_{C^2}^{(D)})$ und $g \in C_c^\infty(a,b)$. Damit folgt dann durch Grenzuebergang ebenfalls die Gueltigkeit der vorigen Gleichung fuer $f \in D(L_{C^2}^{(D)})$ und $g \in D(Q^{(D)}) = W_0^1(a,b)$. Das liefert dann $L_{C^2}^{(D)} \subset L^{(D)}$.
Um den Operator mit Neumann-Randbedingungen zu behandeln muessen wir etwas ausholen. Dabei lernen wir einige Konzepte und Hilfsmittel kennen, die auch in weiteren Betrachtungen von Nutzen sind.
Eine Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ heisst *absolut stetig*, wenn es ein $c \in \mathbb{C}$ und $h \in L^1(a,b)$ gibt [5] mit

$$f(x) = c + \int_a^x h(t)dt$$

fuer alle $x \in (a,b)$. In diesem Fall ist f offenbar stetig fortsetzbar auf $[a,b]$ und es gilt $c = f(a)$ und h erfuellt

$$g(x) - g(y) = \int_y^x h(t)dt$$

fuer alle $a \leq y \leq x \leq b$.footnoteHier und im folgenden verwenden wir die suggestive Schreibweise $\int_a^b$ auch wenn es sich um Lebesgueintegrale handelt. Insbesondere ist also h eindeutig bestimmt. Man nennt h die *Ableitung* von f und schreibt $f' := h$. Offenbar ist jede differenzierbare Funktion absolut stetig und die beiden Konzepte von Ableitung stimmen für eine solche Funktion ueberein.

Ende der Vorlesung

Fuer absolut stetige Funktionen gilt die uebliche Formel der partiellen Integration.

[5]Eine etwas allgemeinere Theorie arbeitet mit Funktionen aus $L^1_{loc}(a,b)$.

Lemma (Partielle Integration). *Sind f und g absolut stetig auf (a,b), so gilt*

$$\int_a^b fg'dt = fg|_a^b - \int_a^b f'gdt.$$

Beweis. Das folgt aus dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_a^b fg'dt &= \int \left(f(a) + \int_a^t f'(s)ds\right) g'(t)dt \\
&= \int_a^b f(a)g'(t)dt + \int_a^b \int_a^b f'(s)g'(t)1_{[a,t]}(s)dsdt \\
&= f(a)(g(b)-g(a)) + \int_a^b \int_a^b f'(s)g'(t)1_{[s,b]}(t)dtds \\
&= f(a)(g(b)-g(a)) + \int f'(s)(g(b)-g(s))ds \\
&= f(a)(g(b)-g(a)) + g(b)(f(b)-f(a)) - \int_a^b f'(s)g(s)ds.
\end{aligned}$$

Das liefert die gewuenschte Behauptung. □

Ausserdem brauchen wir noch ein grundlegende Resultat fuer Funktionen mit schwachen Ableitungen.

Lemma (Lemma von du-Bois-Reymond). *Sei $f \in L^1(a,b)$ mit $\int_a^b f\varphi' dx = 0$ fuer alle $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$ (d.h. die schwache erste Ableitung von f ist Null), so ist f konstant fast sicher.*

Beweis. Wir nehmen ohne Einschraekung an $\int_a^b f dx = 0$ (und zeigen $f = 0$ fast sicher).

Die **Idee** ist es, zu $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$ ein $\Phi \in C_c^\infty(a,b)$ zu finden mit $\Phi' = \varphi$ und dann die Voraussetzung anzuwenden, um $f = 0$ zu schliessen. In dieser Form laesst sich das allerdings nicht durchfuehren und wir muessen dann etwas modifizieren.)

Sei $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$ beliebig. Sei $\varphi_0 \in C_c^\infty(a,b)$ mit $\int_a^b \varphi_0 dt = 1$ beliebig. Setze

$$\Phi(x) := \int_a^x \varphi(t)dt - I(\varphi)\int_a^x \varphi_0(t)dt,$$

wobei $I(\varphi) = \int_a^b \varphi dx$ ist. Dann gilt $\Phi \in C_c^\infty((a,b))$ und $\Phi' = \varphi - I(\varphi)\varphi_0$. Damit folgt dann aus der Voraussetzung an f sofort

$$0 = \int f\Phi' dx = \int f\varphi dx - I(\varphi)\int f\varphi_0 dx.$$

Da $\varphi_0 \in C_c^\infty(a,b)$ mit $\int_a^b \varphi_0 = 1$ beliebig ist kann man damit die konstante Funktion $1/(b-a)$ beliebig gut in $L^1(a,b)$ approximieren und es ergibt sich aus der vorigen Gleichung und $\int_a^b f dx = 0$ dann

$$0 = \int_a^b f\varphi dx$$

fuer alle $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$. Das liefert dann $f = 0$. □

Damit kommen wir nun zu einer zentralen Folgerung.

Folgerung. *Es ist f genau dann absolut stetig, wenn es eine schwache Ableitung in $L^1(a,b)$ hat. In diesem Fall stimmt die schwache Ableitung mit der Ableitung ueberein.*

Beweis. Sei f absolut stetig mit Ableitung $h \in L^2(a,b)$. Sei $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$. Dann ist φ ebenfalls absolut stetig mit Ableitung φ'. Damit folgt dann durch partielle Integration

$$\int_a^b f\varphi' dx = \int_a^b h\varphi dx.$$

(Hierbei verschwinden die Randterme, da φ kompakten Traeger hat).
Es habe f die schwache Ableitung $h \in L^1(a,b)$. Setze $H(x) := \int_a^x h(s)ds$. Dann ist H absolut stetig mit Ableitung h. Betrachte nun

$$\widetilde{f} := f - H.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \int \widetilde{f}\varphi' dx &= \int_a^b f\varphi' dx - \int H\varphi' dx \\ \text{(Definition } h \text{ bzw. part. Int)} \quad &= -\int_a^b h\varphi dx + \int_a^b h\varphi dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

fuer alle $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$. Damit ist dann $\widetilde{f}$ nach dem vorigen Lemma konstant. Das liefert

$$f(x) = c + \int_a^x h(s)ds.$$

und f ist absolut stetig.
Die letzte Aussage wurde mitbewiesen. □

Wir halten auch noch folgende Stetigkeitseigenschaft fest.

Proposition. *Fuer jedes $x \in [a,b]$ ist die punktweise Auswertung*

$$\delta_x : W^1(a,b) \longrightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f(x),$$

stetig.

Beweis. Nach der vorigen Folgerung sind die Funktionen in $W^1(a,b)$ gerade die absolut stetigen Funktionen. Insbesondere ist jedes solche f stetig und man kann die punktweise Auswertung bilden. Wir zeigen nun, dass die punktweise Auswertung stetig ist. Dazu betrachten wir ohne Einschraenkung den Punkt $x = b$. Es gilt fuer jedes $s \in [a,b]$

$$f(b) = f(s) + \int_s^b f'(t)dt.$$

Damit folgt dann

$$f(b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(f(s) + \int_s^b f'(t)dt\right) ds.$$

Das liefert leicht die gewuenschte Stetigkeit. □

Beispiel - $L^{(N)}$. Wir zeigen $L_{C^2}^{(N)} \subset L^{(N)}$. Sei $g \in W^1((a,b))$ beliebig. Dann ist g also absolut stetig nach der vorangehenden Folgerung. Sei $f \in D(L_{C^2}^{(N)})$

beliebig. Dann gehoert f also zu $C^2([a,b]]$ und es gilt $f'(a) = 0 = f'(b)$. Wegen $f \in C^2([a,b])$ ist f absolut stetig. Damit erhalten gehoert f zu $W^1 = D(Q^{(N)})$ und wir koennen partielle Integration anwenden und erhalten

$$\langle g, L^{(N)}_{C^2} f\rangle = \langle g, -f''\rangle \stackrel{p.I.}{=} \langle g', f'\rangle = Q^{(N)}(g,f),$$

wobei die Randterme aufgrund der Randbedingung an f' verschwinden. Damit folgt dann $f \in D(L^{(N)})$ und $L^{(N)}f = f'' = L^{(N)}_{C^2} f$.

Beispiel - $L^{(per)}$. Wir definieren den Sobolevraum

$$W^1_{(per)}(a,b) := \{f \in W^1(a,b) : f(a) = f(b)\}.$$

Dann ist $W^1_{(per)}(a,b)$ ein abgeschlossener Unterraum von $W^1(a,b)$ (aufgrund der Stetigkeit der Auswertung in einem Punkt). Sei $Q^{(per)}$ die Einschraenkung von $Q^{(N)}$ auf

$$D(Q^{(per)} := W^1_{(per)}.$$

Dann ist also $Q^{(per)}$ eine abgeschlossene symmetrische Form. Aehnlich wie in den vorangehenden Beispielen (Uebung) zeigt eine kleine Rechung, dass der zugehoerige Operator $L^{(per)}$ gerade der Abschluss von $L^{(per)}_{C^2}$ mit

$$D(L^{(per)}_{C^2} = \{f \in C^2([a,b]) : f(a) = f(b), f'(a) = f'(b)\}$$
$$L^{(per)} f = -f''$$

ist. Tatsaechlich liefert eine einfache partielle Integration

$$\langle g, L^{(per)}_{C^2} f\rangle = -\overline{g}f'|_a^b - \int_a^b \overline{g}' f' dt = Q^{(per)}(g,f)$$

fuer alle $f \in D(L^{(per)}_{C^2})$ und $g \in D(Q^{(per)})$. Das zeigt dann $L^{(per)}{}_{C^2} \subset L^{(per)}$ und damit folgt die gewuenschte Aussage.

4. Stoerungstheorie

In diesem Abschnitt geht es um die Frage: Wie darf man selbstadjungierter Operatoren stoeren?

Seien T, V Operatoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Der Operator V heisst T-beschraenkt, wenn $D(T) \subset D(V)$ gilt und es $a, b \geq 0$ gibt mit

$$\|Vf\| \leq a\|f\| + b\|Tf\|.$$

Das Infimum aller zulaessigen solchen b heisst dann die *T-Schranke* von V. Im allgemeinen ist diese Infimum kein Minimum (Uebung).

Ende der Vorlesung

Bemerkung (Uebung). (a) Offenbar ist V genau dann T-beschraenkt, wenn die Abbildung

$$(D(T), \|\cdot\|_T) \longrightarrow (D(V), \|\cdot\|_V), x \mapsto x,$$

stetig ist.
(b) Sind T und V abgeschlossene Operatoren, so sind aequivalent:
 (i) Der Operator V ist T-beschraenkt.
 (ii) Es gilt $D(T) \subset D(V)$.

Ist $\varrho(T)$ nichtleer, so ist dies aequivalent zu

(iii) Es ist $V(T-z)^{-1}$ beschrankt fuer ein (alle) $z \in \varrho(T)$.

Theorem (Der Satz von Rellich-Kato). *(a) Sei T ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ und V symmetrisch und T-beschraenkt mit Schranke kleiner als Eins. Dann ist $T+V$ selbstadjungiert.*
(b) Sei S ein wesentlich selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ und V symmetrisch und T-beschraenkt mit Schranke kleiner als Eins. Dann ist $S+V$ wesentlich selbstadjungiert, und es gilt $\overline{S+V} = \overline{S} + \overline{V}$.

Beweis. (a) Offenbar ist $T+V$ symmetrisch. Es reicht also nach dem Satz zu selbstadjungierten Operatoren zu zeigen, dass $T+V \pm i\alpha$ surjektiv ist fuer ein (alle) $\alpha \neq 0$.
Da T selbstadjungiert ist, ist $T \pm i\alpha$ stetig invertierbar fuer alle $\alpha \neq 0$. Damit reicht es zu zeigen, dass

$$(*)\ \ \|V(T\pm i\alpha)^{-1}\| < 1$$

gilt und es wird dann nach der Stabilitaet der stetigen Invertierbarkeit $T \pm i\alpha + V$ surjektiv sein. Nun zu $(*)$:
Nach Voraussetzung gibt es $a \geq 0$ und $0 \leq b < 1$ mit

$$\|Vf\| \leq a\|f\| + b\|Tf\|$$

fuer alle $f \in D(T)$. Damit koenen wir unter Nutzen der Ungleichung

$$2\kappa\lambda = 2\frac{\kappa}{\varepsilon}(\varepsilon\lambda) \leq \frac{\kappa^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\lambda^2$$

und mit der Abkuerzung

$$g := (T \pm i\alpha)^{-1} f$$

rechnen[6]

$$\begin{array}{rcl}
\|V(T\pm i\alpha)^{-1}f\|^2 & \leq & (a\|g\| + b\|Tg\|)^2 \\
 & = & a^2\|g\|^2 + b^2\|Tg\|^2 + 2ab\|g\|\|Tg\| \\
\text{(Ungleichung)} & \leq & a^2(1+\dfrac{b^2}{\varepsilon^2})\|g\|^2 + (b^2+\varepsilon^2)\|Tg\|^2 \\
(C^2 = a^2(1+\dfrac{b^2}{\varepsilon^2})) & \leq & C^2\|g\|^2 + (b+\varepsilon)^2\|Tg\|^2 \\
 & = & (b+\varepsilon)^2\|(T \pm i\dfrac{C}{b+\varepsilon})g\|^2 \\
\text{(Einsetzen } g) & = & (b+\varepsilon)^2\|(T \pm i\dfrac{C}{b+\varepsilon})(T\pm i\alpha)^{-1}f\|^2 \\
 & = & (b+\varepsilon)^2\|f\|^2,
\end{array}$$

wobei wir $\alpha = C(b+\varepsilon)^{-1}$ setzen. Ist nun $0 < \varepsilon$ genuegend klein, so folgt $(b+\varepsilon) < 1$ und wir haben die gewuenschte Aussage bewiesen.

(b) Nach Voraussetzung ist $\overline{S}$ selbstadjungiert. Weiterhin zeigt eine einfache Approximation folgendes.

[6] wobei $\kappa = ab\|g\|, \lambda = \|Tg\|$

Approximation: Seien $a, b \geq 0$ mit $\|Vf\| \leq a\|f\| + b\|Sf\|$ fuer alle $f \in D(S)$ gewaehlt. Gilt $f \in D(\overline{S})$ so folgt $f \in D(\overline{V})$ und $\|\overline{V}f\| \leq a\|f\| + b\|\overline{S}f\|$ sowie $f \in D(\overline{S+V})$.
Bew. Sei f_n in $D(S)$ mit $f_n \to f$ und $Sf_n \to \overline{S}f$ gewaehlt. Dann folgt aus der Voraussetzung der S-Beschraenktheit von V, dass (Vf_n) eine Cauchy-Folge ist. Da V symmetrisch (also abschließbar ist) gilt dann $f \in D(\overline{V})$ und $Vf_n \to \overline{V}f$. Weiterhin folgt

$$\|\overline{V}f\| = \lim_{n\to\infty} \|Vf_n\| \ \leq \liminf_{n\to\infty}(a\|f_n\| + b\|Sf_n|) = a\|f\| + b\|\overline{S}f_n\|.$$

Offenbar konvergiert also auch $((S+V)f_n))$.

Aus der Approximation folgt, dass $\overline{V}$ dann $\overline{T}$-beschraenkt ist mit derselben Schranke mit der V schon T-beschraenkt ist; also einer Schranke kleiner als Eins. Damit sind die Voraussetzungen von (a) fuer $\overline{T}$ und $\overline{V}$ erfuellt und es ist $\overline{T} + \overline{V}$ selbstadjungiert. Weiterhin gilt offenbar

$$S + V \subset \overline{S} + \overline{V}$$

und, da $\overline{S} + \overline{V}$ abgeschlossen (sogar selbstadjungiert) ist, folgt

$$\overline{S+V} \subset \overline{S} + \overline{V}.$$

Weiterhin wurde bei der Approximation auch

$$D(\overline{S}) \subset D(\overline{S+V})$$

mitbewiesen. Damit folgt also

$$D(\overline{S} + \overline{V}) = D(\overline{S}) \subset D(\overline{S+V}).$$

Damit ergibt sich

$$\overline{S+V} = \overline{S} + \overline{V}$$

und der Beweis ist fertig. □

Bemerkung. Sei T ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$. Offenbar ist jedes beschraenkte ueberall definierte symmetrische V auch T-beschraenkt mit Schranke kleiner als Eins (naemlich 0). Daher ist dann also $T + V$ selbstadjungiert. Tatsaechlich kann man das auch leicht direkt beweisen (Uebung).

Ein ganz aehnliches Resultat laesst sich fuer Formen beweisen. Wir halten zunaechst folgende Beobachtung.

LEMMA. *Sei Q_0 eine nach unten beschraenkte abgeschlossene Form auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und sei Q_1 eine weitere nach unten beschraenkte Form auf $\mathcal{H}$ mit $D(Q_1) = D(Q_0)$ mit*

$$\frac{1}{c}\|\cdot\|_{Q_0} \leq \|\cdot\|_{Q_1} \leq c\|\cdot\|_{Q_0}$$

fuer ein $c > 0$. Dann ist Q_1 abgeschlossen.

FOLGERUNG. *Sei Q_0 eine nach unten beschraenkte abgeschlossene Form. Sei $Q_1 = Q_0 + R$ mit einer nach unten beschraenkten Form R mit $D(R) \supset D(Q)$ fuer die $0 \leq b < 1$ existiert mit*

$$|R(f, f)| \leq bQ(f, f) + a\|f\|^2$$

fuer alle $f \in D(Q)$. Dann ist Q_1 ebenfalls abgeschlossen.

Beweis. Das folgt aus dem vorangehenden Lemma nach einer kleinen Rechnung. □

Bemerkung. Sind in der Situation des Lemma T_0 und T_1 die selbstadjungierten Operatoren zu Q_0 und Q_1 und gibt es einen symmetrischen Operator V mit $D(V) = D(R)$ und $R(f, g) = \langle f, Vg \rangle$, so nennt man T_1 die Formsumme von T_0 und V und schreibt auch

$$'T_1 = T_0 + V \quad \text{(Formsumme)}'.$$

Ende der Vorlesung

KAPITEL 2

Die Boreltransformation

Die Boreltransformation gehoert mit der Fouriertransformation und der Laplacetransformation zu den bekannten Transformationen. Sie ist auch unter den Namen wie Herglotz-, Bochner- und Cauchy - Transformation bekannt. In der Spektraltheorie von selbstadjungierten Operatoren L spielen alle drei Transformationen eine große Rolle:

- Fouriertransformation $\mu \mapsto \int_{\mathbb{R}(N)} e^{-ixy} d\mu(y)$: Unitaere Gruppe e^{-itL}, $t \in \mathbb{R}$ (Schroedingergleichung).
- Laplacetransformation $\mu \mapsto \int_0^\infty e^{-tx} d\mu(x)$: Halbgruppe e^{-tL} (Waermeleitungsgleichung).
- Boreltransformation $\mu \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t-z}$: Resolvente $(L-z)^{-1}$, $z \in \varrho(L)$ (Poissongleichung).

Sie bilden (gewisse) Maße jeweils bijektiv auf (gewisse) Funktionen ab. In diesem Kapitel geht es um die Boreltransformation.

1. Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

Die Boreltransformation kann man fuer Maße auf $\mathbb{R}$ mit einer gewissen Beschraenktheitseigenschaft definieren. Wir werde sie hier fuer beschraenkte Maße untersuchen.

Definition (Boreltransformation). *Sei μ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$. Die Boreltransformation $\mathcal{R}\mu$ von μ ist definiert durch*

$$\mathcal{R}\mu : \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C}, \;\; \mathcal{R}\mu(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t-z}.$$

Bemerkungen zur Definition.

- Hier ist die obere Halbebene $\mathbb{C}^+$ definiert als
$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}.$$
- Fuer $z \in \mathbb{C}^+$ ist $t \mapsto \frac{1}{t-z}$ beschraenkt. Damit existiert in der Tat das angegebenen Integral, da das Maß μ endlich ist.
- Tatsaechlich existiert das angegebene Integral fuer alle $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}(\mu)$, da fuer solche z die Funktion $t \mapsto \frac{1}{t-z}$ beschraenkt ist.
- Gilt $\mu = 0$, so folgt offenbar $\mathcal{R}\mu = 0$. Fuer $\mu \neq 0$ ist $\mathcal{R}\mu(z) \neq 0$ fur jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (wie man sofort aus den folgenden Untersuchungen sieht).

Zum Aufwaermen berechnen wir zunaechst einmal den Real- und Imaginaerteil von $\mathcal{R}\mu(z)$ fuer $z = x + i\varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\mu(z) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} d\mu(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\overline{t-z}}{(t-z)\overline{(t-z)}} d\mu(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{t-x+i\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon^2} d\mu(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{t-x}{(t-x)^2+\varepsilon^2} d\mu(t) + i \int \frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon^2} d\mu(t).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine fundamentale Eigenschaft der Boreltransformation.

FOLGERUNG. *Fuer $\mu \neq 0$ gilt $\Im \mathcal{R}\mu(z) > 0$ fuer alle $z \in \mathbb{C}^+$. Es bildet dann also $\mathcal{R}\mu$ die obere Halbebene in sich selber ab.*

Auch erhalten wir unter Nutzen von

$$\frac{\varepsilon^2}{(t-x)^2+\varepsilon^2} \leq 1$$

und

$$\frac{|\varepsilon(t-x)|}{(t-x)^2+\varepsilon^2} \leq \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2+(t-x)^2}{(t-x)^2+\varepsilon^2} \leq \frac{1}{2}$$

noch folgende Eigenschaft.

FOLGERUNG. *Es gilt $0 \leq (\Im z)\Im \mathcal{R}\mu(z) \leq \mu(\mathbb{R})$ fuer alle $z \in \mathbb{C}^+$. Es ist also $z \mapsto (\Im z)\Im \mathcal{R}\mu(z)$ eine beschraenkte Funktion. Ebenso ist $z \mapsto (\Im z)(\mathcal{R}\mu(z))$ eine beschraenkte Funktion.*

Bemerkung. Das bedeutet, daß $\Im \mathcal{R}$ fuer z mit grossem Imaginaerteil relativ rasch faellt und fuer z mit kleinem Imaginaerteil nicht so schnell waechst.

Wir wenden uns nun noch der Ableitung der Boreltransformation eines Maßes zu: Es gilt

$$\mathcal{R}\mu(z) - \mathcal{R}\mu(z_0) = \int \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-z_0} \right) d\mu(t)(t) = \int \frac{z-z_0}{(t-z)(t-z_0)} d\mu(t).$$

Damit folgt

$$\frac{\mathcal{R}\mu(z) - \mathcal{R}\mu(z_0)}{z-z_0} = \int \frac{1}{(t-z)(t-z_0)} d\mu \to \int \frac{1}{(t-z_0)^2} d\mu.$$

Hier nutzt man im letzten Schritt den Satz von der dominierten Konvergenz (punktweise Konvergenz von (fuer z nahe z_0) gleichmaeßig beschraenkten Funktionen bei Endlichkeit des in Frage stehenden Maßes).

FOLGERUNG. *Es ist $\mathcal{R}\mu$ holomorph (d.h. komplex differenzierbar).*

Wir fassen die bisher diskutierten Eigenschaften der Boreltransformation eines Maßes zusammen. Wir werden spaeter sehen, daß diese Eigenschaften genau die Boreltransformationen beschraenkter Maße charakterisieren.

LEMMA (Charakteristische Eigenschaften von $\mathcal{R}\mu$). *Sei $\mu \neq 0$ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{R}\mu$ seine Boreltransformation. Dann gilt:*

- *Es bildet $\mathcal{R}\mu$ die obere Halbebene in sich selber ab.*

- *Es ist $\mathcal{R}\mu$ komplex differenzierbar.*
- *Es ist die Funktion $z \mapsto (\Im z)\mathcal{R}\mu(z)$ beschraenkt auf der oberen Halbebene.*

Bemerkung. Funktionen mit den ersten beiden Eigenschaften sind auch bekannt unter den Namen *Nevanlina*-Funktionen, *Pick*-Funktionen, *Nevanlinna-Pick*-Funktionen, *Herglotz*-Funktionen oder $\mathcal{R}$-Funktionen.

2. Das Maß μ als Randwert von $\mathcal{R}\mu$

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß

$$\Im\mathcal{R}\mu(x+i\varepsilon) = \int \frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon^2} d\mu(t)$$

fuer $\varepsilon \to 0$ gegen μ konvergiert mancherlei Weise. Genauer werden wir zeigen, dass die (positive) Masse

$$\mu_\varepsilon := \Im\mathcal{R}\mu(\cdot + i\varepsilon)\lambda$$

fuer $\varepsilon \to 0$ gegen μ konvergieren. In diesem Sinne ist also das Maß μ auf $\mathbb{R} = \partial\mathbb{C}^+$ Grenzwert bzw. Randwert der Funktion $\Im\mathcal{R}$ auf $\mathbb{C}^+$. Insbesondere ist also ein Mass durch seine Boreltransformation eindeutig bestimmt.

Um die Notation zu vereinfachen, definieren wir fuer $\varepsilon > 0$ die Funktion

$$p_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty) \;\; p_\varepsilon(x) := \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}.$$

Weiterhin definieren wir fuer eine beschraenkte meßbare Funktion f auf $\mathbb{R}$ und ein beschraenktes Maß μ die Faltung

$$f * \mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \;\; (f*\mu)(x) = \int f(x-t) d\mu(t).$$

Bemerkung - Faltung von Funktionen. Gehoert h zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\lambda)$ und ist $\mu := h\lambda$, so gilt fuer jedes beschraenkte meßbare f

$$\begin{aligned} f*\mu(x) &= f*(h\lambda)(x) \\ &= \int f(x-t)h(t)d\lambda \\ &= (f*h)(x). \end{aligned}$$

Damit ist also die von uns definierte Faltung mit Massen vertraeglich mit der schon bekannten Faltung von Funktionen.

Mit diesen Definitionen gilt dann also

$$\Im\mathcal{R}\mu(x+i\varepsilon) = (p_\varepsilon * \mu)(x).$$

Plan fuer die folgenden Untersuchungen: Wir werden sehen, daß die $\frac{1}{\pi}p_\varepsilon$ sich zu einer 'Punktmasse' in 0 zusammenziehen, also - in gewissem Sinne - gegen δ_0 konvergieren . Entsprechend kann man folgendes erwarten:

- Konvergenz im gemittelten Sinne:

$$p_\varepsilon * \mu \to \delta_0 * \mu = \mu.$$

- Konvergenz im punktweisen Sinne:
$$p_\varepsilon * \mu(x) \sim \int \frac{1}{\lambda(U_\varepsilon(x))} 1_{U_\varepsilon(E)} d\mu = \frac{\mu(U_\varepsilon(E)}{\lambda(U_\varepsilon(E))} \to D\mu(E).$$

Das werden wir im folgenden zeigen. Wir brauchen dazu jeweils noch etwas Vorbereitung.

Wesentliche Eigenschaften der p_ε sammeln wir zunaechst in folgender Proposition.

PROPOSITION (Eigenschaften der p_ε). *Die Funktionen p_ε sind radialsymmetrisch und fuer jedes $t \geq 0$ ist die Niveaumenge $\{x : p_\varepsilon(x) > t\}$ eine Kugel und es gelten folgende Aussagen:*
- *$\int p_\varepsilon d\lambda = \pi$ fuer alle $\varepsilon > 0$. (Normiert)*
- *Fuer jedes $R > 0$ konvergiert $(p_\varepsilon 1_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)})$ gleichmaeßig gegen 0. Insbesondere konvergiert also $(p_\varepsilon(x))$ gegen 0 fuer jedes $x \neq 0$. (Konzentrationseigenschaft - $\|\cdot\|_\infty$.)*
- *$\int_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)} p_\varepsilon d\lambda \to 0,\ \varepsilon \to 0$ fuer jedes $R > 0$. (Konzentrationseigenschaft-Lebesguemaß)*

Beweis. Offenbar gilt $p_\varepsilon(x) = p_\varepsilon(-x)$. Damit sind die Funktionen radialsymmetrisch. Die Aussage zu den Subniveaumenge folgt ebenfalls einfach.

Nun zu den einzelnen Punkten:

Erster Punkt: Eine direkte Rechnung liefert

$$\begin{aligned}
\int p_\varepsilon \, d\lambda &= \int \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} d\lambda(x) \\
&= \int \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{(x/\varepsilon)^2+1}\, d\lambda(x) \\
(x = \varepsilon y) \quad &= \int \frac{1}{y^2+1} d\lambda(y) \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Zweiter Punkt: Offenbar gilt
$$p_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \leq \frac{\varepsilon}{R^2}$$
fuer $x \notin [-R, R]$. Das liefert sofort die Behauptung.

Dritter Punkt: Wie bei der Rechnung im ersten Punkt ergibt sich
$$\int_{(-R,R)} p_\varepsilon(x) d\lambda(x) = \int_{(-R/\varepsilon,R/\varepsilon)} \frac{1}{y^2+1} d\lambda \to \pi.$$

Damit folgt nun aus dem ersten Punkt der dritte Punkt. □

Fuer eine beschraenkte meßbare Funktion f und eine Funktion $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \lambda)$ definieren wir die Faltung
$$f * h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
durch
$$(f*h)(x) := \int h(x-t) f(t) d\lambda(t) = \int h(-t) f(t+x) d\lambda(t) = \int h(t) f(E-t) d\lambda(t).$$

Ende der Vorlesung

LEMMA (Gleichmaeßige Konvergenz $p_\varepsilon * f \to f$). *Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ beschraenkt und gleichmaßig stetig. Dann konvergiert $\frac{1}{\pi} p_\varepsilon * f$ gleichmaeßig gegen f.*

Bemerkung.

- Jede Funktion $f \in C_c(\mathbb{R})$ (und sogar jede Funktion in $C_0(\mathbb{R})$) ist gleichmaeßig stetig und beschraenkt.
- Der Beweis zeigt, daß fuer beliebige meßbare beschraenkte f die Folge $\frac{1}{\pi} p_\varepsilon * f(x)$ gegen $f(x)$ konvergiert in allen Stetigkeitspunkten x von f.
- (Uebung) Tatsaechlich gilt sogar: Es konvergiert $p_\varepsilon * f$ gegen f in $\mathcal{L}^1$ fuer jedes $f \in \mathcal{L}^1$. (Bew: Zeige zunaechst (Fubini), daß p_ε tatsaechlich $\mathcal{L}^1$ nach $\mathcal{L}^1$ abbildet mit Norm $\|p_\varepsilon\| \le \pi$ gleichmaßig in $\varepsilon > 0$. Approximiere nun $f \in \mathcal{L}^1$ durch $g \in C_c(\mathbb{R})$ und nutze obiges Lemma.)

Beweis. Sei $\eta > 0$ beliebig gegeben. (Zu zeigen $|\frac{1}{\pi}(p_\varepsilon * f)(x) - f(x)| \le 2\eta$ gleichmaeßig in x fuer alle genuegend kleinen $\varepsilon > 0$.)

Wir rechnen:

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{1}{\pi}(p_\varepsilon * f)(x) - f(x)\right| \\
= \; & \left|\frac{1}{\pi}\int f(t) p_\varepsilon(x-t) d\lambda(t) - f(x)\right| \quad \text{(Definition } p_\varepsilon * f) \\
= \; & \left|\frac{1}{\pi}\int (f(t) - f(x)) p_\varepsilon(x-t) d\lambda(t)\right| \quad (p_\varepsilon \text{ normiert}) \\
\le \; & \frac{1}{\pi}\int_{(x-\delta,x+\delta)} |f(t)-f(x)| p_\varepsilon(x-t) d\lambda(t) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus(x-\delta,x+\delta)} |f(t)-f(x)| p_\varepsilon(x-t) d\lambda(t) \\
= \; & \frac{1}{\pi}\int_{(-\delta,\delta)} |f(x+t)-f(x)| p_\varepsilon(t) d\lambda(t) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |f(t+x)-f(x)| p_\varepsilon(t) d\lambda(t) \quad \text{(Verschieben)}
\end{aligned}
$$

fuer alle $\delta > 0$.

Da f gleichmaeßig stetig ist, koennen wir nun ein $\delta > 0$ waehlen mit

$$|f(y) - f(y')| \le \eta$$

fuer all y, y' mit $|y' - y| \le \delta$. Damit koennen wir (fuer dieses δ) abschaetzen

$$|\frac{1}{\pi}(p_\varepsilon * f)(x) - f(x)| \le \eta + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} p_\varepsilon(t) d\lambda(t).$$

Dabei haben wir die Normierung der p_ε zur Abschaetzung des ersten Termes verwendet.

Waehlen wir nun ε genuegend klein, so folgt aus der Konzentrationseigenschaft bzgl. des Lebesguemaßes der p_ε, daß der zweite Term kleiner als η wird. Damit folgt insgesamt

$$|\frac{1}{\pi}(p_\varepsilon * f)(x) - f(x)| \le 2\eta$$

fuer alle $x \in \mathbb{R}$ fuer alle genuegend kleinen $\varepsilon > 0$. $\square$

Theorem (Vage Konvergenz der $\Im\mathcal{R}\mu(\cdot+i\varepsilon)\lambda$ gegen μ). *Sei μ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$. Dann konvergieren die Maße $\frac{1}{\pi}\Im(\mathcal{R}\mu)(\cdot+i\varepsilon)\lambda$ vage gegen μ, d.h. es gilt fuer jedes $f \in C_c(\mathbb{R})$*

$$\int f(x)\Im\mathcal{R}\mu(x+i\varepsilon)\lambda(x) \to \int f(t)d\mu(t), \varepsilon \to 0.$$

Bemerkungen.

- Sei X ein lokalkompakter topologischer Haussdorffraum. Dann kann man die Menge der Masse mit den (positiven) stetigen Funktionalen auf $C_c(X)$ identifizieren (nach dem Satz von Riesz). In dieser Interpretation entspricht dann die vage Konvergenz gerade der Konvergenz bzgl. der schwach-$*$-Topologie.
- Unter vager Konvergenz kann Masse verloren gehen, wie man an einfachen Beispielen sieht (z.b. $X = \mathbb{R}$, $\mu_n := \delta_n$. Dann sind alle μ_n Wahrscheinlichkeitsmasse, aber der Grenzwert ist das Nullmass und damit kein Wahrscheinlichkeitsmasse.

Beweis. Das folgt aus dem vorangehenden Lemma und dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int f(x)\Im\mathcal{R}\mu(E+i\varepsilon)d\lambda(x) &= \frac{1}{\pi}\int f(x)\left(\int \frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon^2}d\mu(t)\right)d\lambda(E)\\
\text{(Fubini)} \quad &= \int\left(\frac{1}{\pi}\int f(x)\frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon^2}d\lambda(E)\right)d\mu(t)\\
&= \int \frac{1}{\pi}(p_\varepsilon * f)(t)d\mu(t)\\
\text{(glm. Konv. voriges Lemma)} \quad &\to \int f(t)d\mu(t).
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Als naechstes praesentieren wir noch eine punktweise Aussage ueber Existenz eines gemittelten Grenzwertes. Genauer geht es um Existenz der Grenzwerte der Verteilungsfunktionen. Die Aussage ist (eigentlich) nur eine Variante der vorigen Aussage. Der Beweis ist sogar noch einfacher.

Theorem (Stieltjes Umkehrformel). *Sei μ ein endliches positives Maß auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{R}\mu$ seine Boreltransformation. Dann gilt*

$$\mu((-\infty,s]) = \lim_{\delta\to 0+}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\pi}\int_{(-\infty,s+\delta]}\Im\mathcal{R}\mu(E+i\varepsilon)d\lambda(E)$$

fuer alle $s \in \mathbb{R}$.

Bemerkung. Vage Konvergenz von Massen impliziert im allgemeinen nicht die (punktweise) Konvergenz ihrer Verteilungsfunktionen, wie man an einfachen Beispielen sieht (betrachte z.B. auf $\mathbb{R}$ die Folge der Masse $\delta_{1/n}$.) Um mit diesem Problem umzugehen, wird noch der Grenzwert ueber δ zusaetzlich genommen.

Beweis. Wie schon beim Beweis des Konvergenzsatz handelt es sich im Kern um eine Anwendung des Satzes von Fubini.

Es gilt (s.o.)

$$\Im\mathcal{R}\mu(x+i\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}}\frac{\varepsilon}{(x-t)^2+\varepsilon^2}d\mu(t).$$

Damit folgt fuer jedes $r \in \mathbb{R}$ dann

$$\begin{aligned}
\int_{(-\infty,r]} \Im \mathcal{R}\mu(x+i\varepsilon)dx &= \int_{(-\infty,r]}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{(x-t)^2+\varepsilon^2} d\mu(t)dx \\
\text{(Fubini)} \qquad &= \int_{\mathbb{R}}\int_{(-\infty,r]} \frac{\varepsilon}{(x-t)^2+\varepsilon^2} dx d\mu(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\arctan\left(\frac{r-t}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2}\right) d\mu(t) \\
&\stackrel{\varepsilon\to 0}{\to} \int_{(-\infty,r)} \pi d\mu + \int_{\{r\}} \frac{\pi}{2} d\mu + \int_{(r,\infty)} 0 d\mu \\
&= \pi\mu((-\infty,r)) + \frac{\pi}{2}\mu(\{r\}) \\
&= \frac{\pi}{2}\mu((-\infty,r)) + \frac{\pi}{2}\mu((-\infty,r])
\end{aligned}$$

Hier nutzen wir im vorvorletzten Schritt den Satz von der dominierten Konvergenz. (Offenbar ist der Integrand beschraenkt durch π und konvergiert punktweise gegen π fuer $t < r$ bzw. $\pi/2$ fuer $t = r$ bzw 0 fuer $t > r$.) Setzt man nun $r = s + \delta$ und beachtet

$$\bigcap_{\delta>0}(-\infty, s+\delta) = (-\infty, s] = \bigcap_{\delta>0}(-\infty, s+\delta],$$

so folgt die gewuenschte Aussage einfach. $\square$

Aus jedem der beiden vorangehenden Theoreme ergibt sich folgende Folgerung.

FOLGERUNG. *Die Boreltransformation*

$$\mathcal{R} : \textit{Endliche Masse auf } \mathbb{R} \longrightarrow \textit{Funktionen auf } \mathbb{C}^+, \mu \mapsto \mathcal{R}\mu,$$

ist injektiv.

3. Die Boreltransformation als bijektive Abbildung

In diesem Abschnitt werden wir sehen, daß die Boreltransformation eine bijektive Abbildung zwischen beschraenkten Maßen und gewissen Funktionen auf der oberen Halbebene liefert. Zum Beweis werden wir zeigen, daß die in Frage stehenden Funktionen Randwerte in Form von Maßen haben und, daß die beiden Abbildungen

$$\text{Gewisse Funktionen von } \mathbb{C}^+ \text{ nach } \mathbb{C}^+ \stackrel{\textit{Randwert}}{\longrightarrow} \text{Maß auf } \mathbb{R}$$

und

$$\text{Maß auf } \mathbb{R} \stackrel{\textit{Boreltr.}}{\longrightarrow} \text{Gewisse Funktionen von } \mathbb{C}^+ \text{ nach } \mathbb{C}^+$$

zueinander invers sind. Das ist schon in sich ein bemerkenswertes Resultat. Wir werden darauf aufbauend auch den sogenannten Spektralsatz beweisen. Zu den Betrachtungen sind gewisse Kenntnisse der Funktionentheorie nuetzlich.

Hier ist das Hauptergebnis.

THEOREM (Herglotz). *Sei $f : \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben mit folgenden Eigenschaften:*

- *f ist holomorph,*
- *$\Im f(z) \geq 0$ fuer alle $z \in \mathbb{C}^+$,*
- *$|f(z)\Im z| \leq M$ fuer alle $z \in \mathbb{C}^+$.*

Dann gibt es genau ein positives endliches Maß μ auf $\mathbb{R}$ mit $f = \mathcal{R}\mu$. Es gilt $\mu(\mathbb{R}) \leq M$.

Ende der Vorlesung

Zum Beweis brauchen wir noch eine Hilfsaussage, die auch fuer sich schon von Interesse ist. Tatsaechlich liefert das folgende Lemma gerade in einem Spezialfall, daß Boreltransformation und Randwertbildung zueinenader invers sind.

Lemma (Konsistenzlemma). *Sei f wie im vorangehenden Theorem. Sei v der Imaginaerteil von f. Dann gilt fuer jedes $z = x + iy \in \mathbb{C}^+$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $y > 0$ und alle ε mit $0 < \varepsilon < y$ die Gleichung*

$$v(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y - \varepsilon}{(x-t)^2 + (y-\varepsilon)^2} v(t + i\varepsilon) d\lambda(t).$$

Bemerkungen.

- Aufgrund von $|f(z)\Im z| \leq M$ ist $|v(t + i\varepsilon)| \leq M/\varepsilon$ gleichmaessig in t beschraenkt und damit existiert insbesondere das Integral auf der rechten Seite.
- Der Beweis benoetigt nicht die Voraussetzung des nichtnegativen Imaginaerteil. Tatsaechlich handelt es sich um eine allgemeine Aussage fuer harmonischen Funktionen mit beschraenkten ueberall definierten Randwerten. Diese kann auch mittels eines Maximumprinzip bewiesen werden.
- Fuehrt man die Funktion
  $$v_\varepsilon := \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C}, \;\; v_\varepsilon(z) := v(z + i\varepsilon)$$
  sowie das zugehoerige Randwertmaß auf $\mathbb{R}$ naemlich
  $$\mu_\varepsilon := v_\varepsilon(t) d\lambda(t)$$
  ein, so besagt das Lemma gerade, dass die Funktion v_ε die Boreltransformation von μ_ε ist. Die um $i\varepsilon$ verschobene Funktion ist also in der Tat eine Boreltransformation und zwar die Boreltransformation ihres eigenen Grenzwertes. In diesem Sinne ist die Aussage des Lemma eine Konsistenzaussage.
- Der Beweis des Herglotzschen Satzes besteht im wesentlichen darin, in der Formel des Lemma den Grenzwert $\varepsilon \to 0$ durchzufuehren.

Ende der Vorlesung

Exkurs - Funktionentheorie (Appendix)

Ende der Vorlesung

Beweis. (Lemma). Dieser Beweis nutzt Funktionentheorie. Im ganzen Beweis ist $\varepsilon > 0$ fixiert. Wir notieren es nicht mit.

Wir fuehren eine Reihe von Kurven ein: Sei fuer $r > 0$ die Kurve σ_r gegeben durch

$$\sigma_r : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}^+, \; t \mapsto i\varepsilon + re^{it}.$$

(Das ist gerade der 'obere Halbkreis um $i\varepsilon$.)
Sei weiterhin

$$\varrho_r : [-r,r] \longrightarrow \mathbb{C}^+,\ t \mapsto t + i\varepsilon.$$

(Das ist die kuerzeste Verbindung von $-r+i\varepsilon$ mit $+r+i\varepsilon$.) Sei γ_r die Kurve die durch Zusammensetzen von σ_r und ϱ_r entsteht.

Sei nun $z = x + iy \in \mathbb{C}^+$ beliebig gegeben. Sei $0 < \varepsilon < y$. (Dann liegt also z im Inneren des von γ_r umschlossenen Gebietes und $\overline{z}+2i\varepsilon$ liegt nicht darin.) Dann gilt nach Cauchy-Integral-Formel und Cauchy-Integral-Satz folgendes:

$$\begin{aligned}
f(z) &\overset{CIF}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{1}{\zeta - z} f(\zeta)d\zeta \\
\text{(Trick!)} &\overset{CIS}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - (\overline{z} + 2i\varepsilon)}\right) f(\zeta)d\zeta \\
\text{(Rechnung)} &= \frac{1}{\pi}\int_{\gamma_r} \frac{y-\varepsilon}{(\zeta - z)(\zeta - \overline{z} - 2i\varepsilon)} f(\zeta)d\zeta \\
\text{(Def. } \gamma) &= \frac{1}{\pi}\int_{\sigma_r} \frac{y-\varepsilon}{(\zeta - z)(\zeta - \overline{z} - 2i\varepsilon)} f(\zeta)d\zeta + \frac{1}{\pi}\int_{\varrho_r} \frac{y-\varepsilon}{(\zeta - z)(\zeta - \overline{z} - 2i\varepsilon)} f(\zeta)d\zeta.
\end{aligned}$$

Wir untersuchen nun die beiden Terme fuer $r \to \infty$:

Erster Term: Auf σ_r gilt:

- $|f(\zeta)| \leq \frac{1}{\varepsilon}M$ (da $\Im\zeta \geq \varepsilon$).
- $\left|\frac{y-\varepsilon}{(\zeta-z)(\zeta-\overline{z}-2i\varepsilon)}\right| \leq \frac{C}{r^2}$ (da z fest ist und ζ auf dem Kreisbogen liegt).

Da ein Kurvenintegral immer abgeschaetzt werden kann durch das Produkt aus der Laenger der Kurve und dem Maximum des Betrages der Funktion auf ihr, folgt insgesamt, daß der erste Term gegen 0 konvergiert fuer $r \to \infty$.

Zweiter Term: Direkte Rechnung unter Nutzen von

$$\overline{\zeta} = \zeta - 2i\varepsilon$$

zeigt, daß der zweite Term gerade gleich ist

$$\frac{1}{\pi}\int_{[-r,r]} \frac{y-\varepsilon}{(x-t)^2 + (y-\varepsilon)^2} f(t+i\varepsilon)d\lambda(t).$$

Das konvergiert fuer $r \to \infty$ gegen

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y-\varepsilon}{(x-t)^2 + (y-\varepsilon)^2} f(t+i\varepsilon)d\lambda(t).$$

Aus diesen Betrachtungen und obiger Rechnung folgt also

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y-\varepsilon}{(x-t)^2 + (y-\varepsilon)^2} f(t+i\varepsilon)d\lambda(t).$$

Fuer den Imaginaerteil $v(z) := \Im f(z)$ folgt also

$$v(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y-\varepsilon}{(x-t)^2 + (y-\varepsilon)^2} v(t+i\varepsilon)d\lambda(t).$$

Das ist die gewuenschte Formel. □

Nach diesen Vorbereitungen koennen wir nun zum Beweis des Theorem kommen.

Beweis. (Theorem). Die *Eindeutigkeit* folgt, da aus der Boreltransformation das zugrundeliegende Maß nach Saetzen von oben wiedergewonnen werden kann.

Es ist also eine *Existenzaussage* zu zeigen. Sei v der Imaginaerteil von f und seien $z = x + iy \in \mathbb{C}^+$ beliebig sowie $0 < \varepsilon < y$ gegeben. Mit

$$|v(z)y| \leq |f(z)y| \leq M$$

folgt aus der Darstellung des vorigen Lemma

$$\left| \frac{1}{\pi} \int \frac{(y-\varepsilon)^2}{(x-t)^2 + (y-\varepsilon)^2} v(t+i\varepsilon) d\lambda(t) \right| = |(y-\varepsilon)v(z)| \leq |yv(z)| \leq M.$$

Bildet man nun den Grenzwert $y \to \infty$, so folgt aus dem Lemma von Fatou also

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} v(t+i\varepsilon) dt \leq M.$$

Damit sind also die Maße

$$\mu_\varepsilon := v(\cdot + i\varepsilon)\lambda$$

gleichmaeßig beschraenkt. (Das ist die entscheidende Aussage!)
Wir machen uns zunaechst folgendes klar:

- Konvergiert eine Teilfolge von (μ_ε) vage gegen ein Maß μ, so gilt $\mu(\mathbb{R}) \leq M$.
- Konvergiert eine Teilfolge μ_{ε_n} vage gegen das Maß μ, so konvergiert $\mu_{\varepsilon_n}(\varphi)$ gegen $\mu(\varphi)$ fuer alle $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$.

(Zum ersten Punkt: Sei $N > 0$ beliebig und $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ mit $1_{[-N,N]} \leq \varphi \leq 1$. Dann gilt

$$\mu([-N,N]) \leq \mu(\varphi) = \lim_n \mu_{\varepsilon_n}(\varphi) \leq M.$$

Zum zweiten Punkt: Jede Funktion in $C_0(\mathbb{R})$ kann man in der Supremumnorm beliebig gut durch Funktionen aus $C_c(\mathbb{R})$ approximieren. Damit folgt die gewuenschte Aussage leicht aus einem $\varepsilon/3$ Argument und der gleichmaeßigen Beschraenktheit der Maße.)

Damit koennen wir nun die folgenden beiden Aussagen zeigen:

- Jede Teilfolge von (μ_ε) hat eine vage konvergente Teilfolge.
- Alle vage konvergenten Teilfolgen von (μ_ε) haben denselben Grenzwert μ und es gilt $\Im \mathcal{R}\mu = \Im f$.

Aus diesen beiden Aussagen folgt einfacht, daß die Folge (μ_ε) schon selber konvergiert gegen ein Maß mit endlicher Gesamtmasse. (Evtl. Details.)

Zu den Aussagen:
Die erste Aussage folgt aus der gleichmaessigen Beschraenktheit der involvierten Maße und einem Diagonalfolgenargument. (Waehle eine abzaehlbar dichte Teilmenge $D = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n ...\} \subset C_c(\mathbb{R})$; betrachte $(\mu_{\varepsilon_n}(\varphi_1))$. Das ist eine beschraenkte Folge. Daher gibt es eine beschraenkte Teilfolge ....)

Zur zweiten Aussage: Sei (μ_{ε_n}) konvergent gegen μ. Dann gilt fuer $z = x+iy$ also

$$
\begin{aligned}
\Im\mathcal{R}\mu(z) &= \Im\mathcal{R}\mu(x+iy)\\
&= \int \frac{y}{(t-x)^2+y^2} d\mu(t)\\
\text{(Vage Konvergenz, glm. Beschr.)} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \frac{y}{(t-x)^2+y^2} v(t+i\varepsilon)d\lambda(t)\\
(!) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \frac{(y-\varepsilon)}{(t-x)^2+(y-\varepsilon)^2} v(t+i\varepsilon)d\lambda(t)\\
\text{(Konsistenz Lemma)} &= v(z)\\
&= \Im f(z).
\end{aligned}
$$

Damit ist also der Imaginaerteil der Boreltransformation von μ eindeutig bestimmt (und stimmt mit $\Im f$ ueberin) und damit (wie schon oben diskutiert) ist auch μ eindeutig festgelegt. Das zeigt die Eindeutigkeit des Grenzwertes μ und die Gueltigkeit der Formel $\Im\mathcal{R}\mu = v$.

Es bleibt (!) zu zeigen. Das folgt durch eine direkte Abschaetzung: Sei $q = y-\varepsilon$ und $r = y$ und $s = (E-t)^2$. Dann gilt

$$\left|\frac{q}{s+q^2} - \frac{r}{s+r^2}\right| = |q-r|\frac{|s-qr|}{(s+q^2)(s+r^2)} \leq |q-r|\frac{1}{s+q^2}.$$

Fuer $0 < \varepsilon < y/2$ sieht man leicht, dass der letzte Term (wegen $s > 0$) durch $4\varepsilon/y^2$ abgeschaetzt werden kann.

Wir zeigen nun noch $\mathcal{R}\mu = f$: Eine holomorphe Funktion ist durch ihren Imaginaerteil bis auf eine Konstante bestimmt. Damit gilt aufgrund des schon gezeigten also $\mathcal{R}\mu = f + c$ mit einem $c \in \mathbb{C}$. Mit $|(\Im z)f(z)| \leq M$ und $|(\Im z)\mathcal{R}\mu(z)| \leq M$ folgt nun $c = 0$ und das Theorem ist bewiesen. □

Ende der Vorlesung

4. Mehr zu den Randwerten der Boreltransformation*

In vorigen Theoremen haben wir die 'gemittelte' Konvergenz der $\Im\mathcal{R}\mu$ gezeigt. Wir wenden uns nun der punktweisen Konvergenz zu.[1]

Fuer eine meßbare nichtnegative Funktion $h : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty]$ und $t \geq 0$ definieren wir

$$B_t^h := \{x \in \mathbb{R} : h(x) > t\}.$$

Lemma (Cavalierisches Auschoepfungsprinzip). *Sei μ ein beschraenktes Maß auf $\mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty]$ eine nichtnegative Funktion. Dann gilt*

$$\int_X h(x)d\mu(x) = \int_{[0,\infty)} \mu(B_t^h)d\lambda(t).$$

Zeichnung.

Bemerkung. Man kann obige Formel auch als Definition des Integrals bzgl. μ an den Anfang der Theorie stellen. Das erlaubt weitreichende Verallgemeinerungen:

[1]Dieser Abschnitt ist Bonusmaterial (und das erklaert auch das Sternchen in der Ueberschrift).

- Es ist $t \mapsto \mu(B_t^h)$ offenbar monoton fallend. Daher existiert sogar das Riemann-Integral $\int_0^\infty \mu(B_t^h)dt$ und stimmt mit dem angegebenen Lebesgue-Integral ueberein. Damit kann man also Integrationstheorie bzgl. beliebiger Maße auf das Riemann-Integral zurueckfuehren.
- Sogar wenn $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty)$ nicht σ-additiv ist, sondern lediglich monoton, wird die Funktion $t \mapsto \mu(B_t^h)$ offenbar monoton fallend und es ist dann
$$\int_X h(x)d\mu(x) = \int_0^\infty \mu(B_t^h)dt$$
eine sinnvolle Definition fuer ein Integral. Dieses Integral wird dann i.a. nicht mehr linear sein. Aber es gelten die ueblichen Grenzwertsaetze (de Giorgi).

Beweis. Wir rechnen unter Nutzen des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_X h(x)d\mu(x) &= \int_X \int_0^{h(x)} dt d\mu(x)\\
&= \int_X \int_{[0,\infty)} 1_{[0,h(x))}(t)d\lambda(t)d\mu(x)\\
\text{(Fubini)} \quad &= \int_{[0,\infty)} \int_X 1_{[0,h(x))}(t)d\mu(x)d\lambda(t)\\
(1_{[0,h(x))}(t) = 1_{\{x:h(x)>t\}}) \quad &= \int_{[0,\infty)} \mu(B_t^h)d\lambda(t).
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Erinnerung. Fuer ein (positives) Mass μ auf $\mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{R}$ definiert man
$$D\mu(p) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu(U_\varepsilon(p))}{|U_\varepsilon(p)|}$$
(falls der Grenzwert existiert).

PROPOSITION. *Sei μ ein beschraenktes Maß auf $\mathbb{R}$ und (h_n) eine Folge von meßbaren nichtnegativen Funktionen mit folgenden drei Eigenschaften*[2]*:*

- *Jedes h_n ist radialsymmetrisch und fuer jedes $t \geq 0$ ist $\{x : h_n(x) \geq t\}$ eine Kugel.*
- *Fuer jedes $R > 0$ konvergiert die Folge $(h_n 1_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)})$ punktweise gegen Null und ist gleichmaeßig beschraenkt.*
- *Fuer jedes $R > 0$ konvergiert $\int h_n 1_{(-R,R)} d\lambda$ gegen 1.*

Dann gilt fuer $p \in \mathbb{R}$
$$(h_n * \mu)(p) \to a \in [0,\infty],$$
wenn $D\mu(p) = a$ gilt.

Bemerkung.

- Eine voellig analoge Aussage (mit analogem Beweis) gilt in $\mathbb{R}^{(N)}$.
- Die oben betrachteten Funktionen p_ε haben die (fuer die h_n) gewuenschten Eigenschaften.

[2]Solche Folgen sind auch als δ-Folgen bekannt.

Beweis. Sei $p \in \mathbb{R}$ mit $D\mu(p) = a$ fuer ein $a \in [0,\infty]$ gegeben.
Ohne Einschraenkung $p = 0$ (sonst Verschieben). Ohne Einschraenkung $a \in [0,\infty)$. (Der andere Fall ist sogar noch einfacher zu behandeln.)

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Zu zeigen:

$$|h_n * \mu(p) - a| \le \varepsilon$$

fuer alle genuegend großen n.

Aufgrund von $D\mu(p) = a$ existiert ein $R > 0$ mit

$$\left| \frac{\mu(U_r)}{\lambda(U_r)} - a \right| < \varepsilon$$

fuer alle $0 < r \le R$. (Hier ist U_r die offene Kugel um 0 mit Radius r.) Nun gilt

$$\int h_n \, d\mu = \int_{U_R} h_n \, d\mu + \int_{\mathbb{R}\setminus U_R} h_n \, d\mu.$$

Aufgrund der Endlichkeit von μ und der zweiten Voraussetzung an h_n konvergiert der zweite Term nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gegen 0 fuer $n \to \infty$. Es reicht also den ersten Term zu untersuchen:

Wir definieren nun fuer $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen k_n durch

$$k_n := h_n 1_{U_R}$$

und setzen fuer $t > 0$

$$B_t^{(n)} := B_t^{k_n} = \{x : k_n(x) > t\}.$$

Dann ist $B_t^{(n)}$ eine Kugel (da fuer h_n und damit auch fuer k_n entsprechendes gilt) und in U_R enthalten (da k_n außerhalb von U_R verschwindet). Insbesondere gilt also

$$(*) \quad \left| \frac{\mu(B_t^{(n)})}{\lambda(B_t^{(n)})} - a \right| < \varepsilon$$

fuer alle $t \ge 0$. Damit koennen wir rechnen:

$$\begin{aligned} \int_{U_R} h_n d\mu &= \int k_n d\mu \\ \text{(Cavalieri)} \quad &= \int_{[0,\infty)} \mu(B_t^{(n)}) d\lambda(t) \\ &= \int_{[0,\infty)} \frac{\mu(B_t^{(n)})}{\lambda(B_t^{(n)})} \lambda(B_t^{(n)}) d\lambda(t). \end{aligned}$$

Damit koennen wir den lim sup abschaetzen zu

$$
\begin{aligned}
\limsup_n \int_{U_R} h_n d\mu &= \limsup_n \int_{[0,\infty)} \frac{\mu(B_t^{(N)})}{\lambda(B_t^{(N)})}\lambda(B_t^{(N)})d\lambda(t)\\
(*) \qquad &\leq \limsup_n \int_{[0,\infty)} (a+\varepsilon)\lambda(B_t^{(N)})d\lambda(t)\\
&= (a+\varepsilon)\limsup_n \int_{[0,\infty)} \lambda(B_t^{(N)})d\lambda(t)\\
(\text{Cavalieri (fuer } \lambda) \text{)} \qquad &= (a+\varepsilon)\limsup_n \int k_n d\lambda\\
&= (a+\varepsilon)\limsup_n \int_{U_R} h_n d\lambda\\
&= a+\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Hier wird im letzten Schritt die dritte Eigenschaft der Folge (h_n) genutzt. Voellig analog zeigt man,

$$\liminf_n \int_{U_R} h_n d\mu \geq a-\varepsilon.$$

Insgesamt folgt also

$$a-\varepsilon \leq \liminf_n \int_{U_R} h_n d\mu \leq \limsup_n \int_{U_R} h_n d\mu \leq a+\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die gewuenschte Aussage. $\square$

Als Folgerung aus der vorigen Proposition ergibt sich sofort die folgende Aussage.

Erinnerung - Lebesguezerlegung. Ist μ ein positives Maß auf $\mathbb{R}$ so kann man μ eindeutig zerlegen in

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing},$$

wobei μ_{ac} absolut stetig bzgl. des Lebesguemasses ist, d.h. $\mu_{ac} = f\lambda$ erfuellt, μ_{sing} singulaer bzgl. des Lebesgue-Nullmenge getragen ist (d.h. es eine Lebesguenullmenge W gibt mit $\mu_{sing}(\mathbb{R}\setminus W) = 0$. Weiterhin folgt man mittels der oben einguehrten Ableitung $D\mu$ und dem Lebesgueschen Differentiationssatz, dass man diese Zerlegung wie folgt bechreiben kann:

- Es existiert der Grenzwert $D\mu$ fast ueberall und ist endlich und es gilt $f = D\mu$;
- μ_{sing} ist getragen auf der Menge $W := \{x : D\mu(x) = \infty\}$, d.h. es gilt $(\mu_{sc} + \mu_{pp})(\mathbb{R}\setminus W) = 0$.

Theorem (Punktweiser Grenzwert von $\Im\mathcal{R}\mu$). *Sei μ ein beschraenktes positives Maß auf $\mathbb{R}$ mit Lebesguezerlegung*

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp}$$

und $\mu_{ac} = f\lambda$ und $\mu_{sing} = \mu_{sc} + \mu_{pp}$. Dann gilt:

(ac) *Es konvergiert*

$$\frac{1}{\pi}(\Im \mathcal{R}\mu)(x+i\varepsilon) \to f(x), \varepsilon \to 0,$$

fuer λ *- fast - alle* $x \in \mathbb{R}$.

(sing) *Es ist*

$$T := \{x : \frac{1}{\pi}(\Im \mathcal{R}\mu)(x+i\varepsilon) \to \infty\}$$

eine Lebesguenullmenge und ein Traeger von μ_{sing} *d.h.* $\mu_{sing}(\mathbb{R} \setminus T) = 0$.

(pp) *Fuer jedes* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\mu(\{x\}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \Im \mathcal{R}\mu(x+i\varepsilon).$$

Beweis. Die Aussage zum Punktanteil folgt einfach direkt. Die uebrigen Aussagen folgen aus der vorangehenden Proposition und den oben wiederholten Aussagen zur Lebesguezerlegung und dem Lebesgueschen Differentiationssatz. □

Notation. Wir schreiben $\Im \mathcal{R}\mu(x+i0)$ fuer $\lim_{\varepsilon\to 0} \Im \mathcal{R}\mu(x+i\varepsilon)$ (falls der Grenzwert existiert).

Bemerkung. Tatsaechlich kann man zeigen, daß auch $\lim_{\varepsilon\to 0} \Re \mathcal{R}\mu(x+i\varepsilon)$ fuer λ-fast-alle x existiert. Fuer solche x bezeichnet man dann den Grenzwert mit $\Re \mathcal{R}\mu(x+i0)$. Weiterhin setzt man $\mathcal{R}\mu(x+i0) = \Re \mathcal{R}(x+i0) + i\Im \mathcal{R}(E+i0)$ fuer solche x, in denen sowohl der Realteil als auch der Imaginaerteil einen Grenzwert hat.

Ende der Vorlesung

5. Die Boreltransformation auf den komplexen Maßen

In manchen Situationen ist es sinnvoll, auch die Boreltransformation eines komplexen Masses zu bilden. Ist μ ein komplexes Mass, so gilt $\mu = \nu_1 - \nu_2 + i\nu_3 - i\nu_4$ als Summe von positiven endlichen Maßen ν_j, $j = 1, \ldots, 4$. Dann definiert man $\mathcal{R}\mu$ in der naheligenden Art als

$$\mathcal{R}\mu = \mathcal{R}\nu_1 - \mathcal{R}\nu_2 + i\mathcal{R}\nu_3 - i\mathcal{R}\nu_4.$$

Tatsaechlich kann man fuer alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ definieren

$$\mathcal{R}\mu(z) := \int \frac{1}{t-z} d\mu(t)$$

$$= \int \frac{1}{t-z} d\mu_1(t) - \int \frac{1}{t-z} d\nu_2 + i \int \frac{1}{t-z} d\nu_3(t) - i \int \frac{1}{t-z} d\nu_4.$$

Proposition (Allgemeine Stieltjes Umkehrformel). *Sei* μ *ein komplexes Mass auf* $\mathbb{R}$ *mit Boreltransformation* F. *Dann gilt fuer jedes* $r \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}\left(\mu((-\infty,r)) + \mu((-\infty,r])\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2i} \int_{(-\infty,r]} F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon) dx.$$

Insbesondere ist μ *durch seine Boreltransformation eindeutig bestimmt.*[3]

[3] Denn es gilt $\mu((-\infty,s]) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2}\left(\mu((-\infty,s+\delta)) + \mu((-\infty,s+\delta])\right)$.

Bemerkung. Ist μ eine positives Maß, so gilt fuer seine Boreltransformation offenbar $F(\overline{z}) = \overline{F(z)}$ und damit dann auch

$$\frac{1}{2i}\left(F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon)\right) = \Im F(x+i\varepsilon)$$

und wir erhalten die schon oben bewiesene Stieltjes Umkehrformel.

Beweis. Eine direkte Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}
\int_{(-\infty,r]} F(x+i\varepsilon) - F(x-i\varepsilon)dx &= \int_{(-\infty,r]}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-x-i\varepsilon} - \frac{1}{t-x+i\varepsilon}\right) d\mu dx \\
&= 2i\int_{(-\infty,r]}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon^2} d\mu dx \\
&= 2i\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{(-\infty,r]}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon^2} dx\right) d\mu.
\end{aligned}$$

Nun kann man exakt so wie im weiter oben gegebenen Beweis der Stieltjes Umkehrformel weiterschließen und erhaelt die gewuenschte Behauptung. □

KAPITEL 3

Der Spektralsatz fuer selbstadjungierte Operatoren

In diesem Kapitel lernen wir den grundlegenden Satz der tieferen Theorie selbstadjungierter Operatoren kennen. Der Satz besagt, dass es zu jedem selbstadjungierten Operator T ein projektionswertiges Maß E gibt mit $E(id) = T$. Um das zu beweisen gehen wir auf folgende Art vor. In den ersten zwei Abschnitten geht es um zeigen, wir wie man einem selbstadjungierten Operator seine Spektralmasse zuordnet und dann von den Spektralmassen zu Projektionswerigen Mass kommt

$$T - -- > \text{Spektralmaße von } T \; - -- > \text{projektonswertiges Maß von } T.$$

Im dritten Abschnitt zeigen wir wie man von einem projektionswertigen Mass durch Integrationtheorie zu Operatoren kommt

$$\text{projektionswertiges Maß } E - - - - > E(\Phi).$$

Im vierten Abschnitt setzen wir das zusammen und beweisen den Spektralsatz.

1. Die Spektralmasse eines selbstadjungierten Operators

Sei Wir betrachten eine selbstadjungierten Operator T im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Wie wir weiter oben diskutiert haben gilt also fuer $f \in D(T)$

$$\langle Tf, f\rangle = \langle f, Tf\rangle \in \mathbb{R}.$$

Desweiteren ist $T - z$ fuer jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ bijektiv und damit das Spektrum von T in $\mathbb{R}$ enthalten und fuer $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ haben wir die Abschaetzung

$$\|(T - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\Im z|}.$$

Jeder selbstadjungierte Operator liefert viele Herglotz Funktionen:

Proposition. *Sei T ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $f \in \mathcal{H}$ mit $f \neq 0$ beliebig. Sei*

$$F_f : \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C},\ F_f(z) = \langle f, (T - z)^{-1} f\rangle.$$

Dann gilt:

- *F_f ist holomorph.*
- *$\Im F_f > 0$.*
- *Es gilt $|F_f(z)\Im z| \leq \|f\|^2$ fuer alle $z \in \mathbb{C}^+$.*

Bemerkung. Wir nutzen die Konvention, daß das Skalarprodukt im zweiten Argument linear ist. Andernfalls mueßte man die Funktionen definieren durch $\langle (T - z)^{-1} f, f\rangle$.

Beweis. Der erste Punkt folgt leicht aus der Resolventenformel

$$(T-z)^{-1}-(T-z_0)^{-1}=-(z-z_0)(T-z)^{-1}(T-z_0)^{-1}.$$

Der zweite Punkt ergibt sich aus einer kurzen Rechnung, wie folgt:

$$\begin{aligned}\Im F_f(z) &= \Im\langle f,(T-z)^{-1}f\rangle\\ &= \Im\langle (T-z)(T-z)^{-1}f,(T-z)^{-1}f\rangle\\ &= \Im z\langle (T-z)^{-1}f,(T-z)^{-1}f\rangle\\ &= \Im z\|(T-z)^{-1}f\|^2\\ &> 0.\end{aligned}$$

Hier folgt die dritte Gleichung aus der schon oben angesprochenen Tatsache, daß $\langle (T-a)g,g\rangle$ reell ist fuer alle $a\in\mathbb{R}$ und $g\in D(T)$.
Der dritte Punkt ergibt sich aus der Abschaetzung fuer $\|(T-z)^{-1}\|$ und der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\begin{aligned}|F_f(z)\Im z| &= |\langle f,(T-z)^{-1}f\rangle\Im z|\\ &\leq \|f\|\|(T-z)^{-1}f\||\Im z|\\ &\leq \|f\|^2\|(T-z)^{-1}\|\Im z\\ &\leq \|f\|^2.\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Aus der vorangegangenen Proposition und dem Satz von Herglotz ergibt sich sofort folgende spektaktulaere Aussage.

Theorem (Spektralmaß). *Sei T ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $f\in\mathcal{H}$ beliebig. Dann existiert ein eindeutiges positives beschraenktes Maß μ_f^T auf $\mathbb{R}$ mit*

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{t-z}d\mu_f^T(t)=\langle f,(T-z)^{-1}f\rangle$$

fuer alle $z\in\mathbb{C}^+$. Es gilt $\mu_f^T(\mathbb{R})\leq\|f\|^2$.

Bemerkung. Fuer $f=0$ erhaelt man natuerlich $\mu_f=0$.

Definition (Spektralmass). *Das Maß μ_f^T aus dem vorangehenden Theorem heißt Spektralmaß zu f von T.*

Bemerkung. Die Spektralmasse sind das grundlegende Objekt der Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren. Tatsaechlich kann man alle Fragen der Spektraltheorie auffassen als Fragen zu Eigenschaften der Spektralmasse.

Notation. Im folgenden werden wir, wenn keine Gefahr eines Missverstaendnis besteht, meist μ_f statt μ_f^T schreiben.

Fuer die weitergehenden Betrachtungen erweist es sich als nuetzlich, die Abbildung μ zu einer sesquilinearen Abbildung fortzusetzen. Um das durchzufuehren werden wir **Polarisation** benutzen. Daran erinnern wir zunaechst: Seien V und W Vektorraeume ueber den komplexen Zahlen. Sei $F:V\times V\longrightarrow W$ eine sesquilineare Abbildung (also linear im zweiten Argument und antilinear im ersten Argument). Setzt man nun $F(f) := F(f,f)$, so zeigt eine direkte Rechung (es stimmt tatsaechlich)

$$F(f,g) = \frac{1}{4}(F(f+g) - F(f-g) + iF(f-ig) - iF(f+ig)).$$

Proposition (Sesquilinearform der Spektralmaße). *Sei T eine selbstadjungierter Operator und μ die zugehoerige Abbildung von $\mathcal{H}$ in die beschraenkten positiven Maße. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung (die wir mit dem gleichen Symbol bezeichen)*

$$\mu : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \textit{komplexe Masse auf } \mathbb{R},$$

die linear im zweiten und antilinear im ersten Argument ist und $\mu_{f,f} = \mu_f$ fuer alle $f \in \mathcal{H}$ erfuellt. Fuer diese Abbildung gilt

$$\int \frac{1}{t-z} d\mu_{f,g}(t) = \langle f, (T-z)^{-1} g\rangle$$

und

$$|\mu_{f,g}|(\mathbb{R}) \leq \|f\|\|g\|$$

fuer alle $f, g \in \mathcal{H}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Beweis. Die *Eindeutigkeit* einer solchen Abbildung folgt sofort aus Polarisation.
Um *Existenz* zu zeigen, definieren wir die Abbildung

$$\widetilde{\mu} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \text{komplexe Masse auf } \mathbb{R}$$

durch Polarisation d.h. via

$$\widetilde{\mu}_{f,g} := \frac{1}{4}(\mu_{f+g} - \mu_{f-g} + i\mu_{f-ig} - i\mu_{f+ig}).$$

Wir zeigen nun, dass $\widetilde{\mu}$ die gewuenschten Eigenschaften hat: Zunaechst gilt nach Definition von $\mu_{f,g}$, und den charakteristischen Eigenschaften des Spektralmaßes und Polarisation fuer das Skalarprodukt fuer alle $z \in \mathbb{C}^+$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t-z} d\widetilde{\mu}_{f,g} &= \frac{1}{4}\left(\mathcal{R}\mu_{f+g}(z) - \mathcal{R}\mu_{f-g}(z) + i\mu_{f-ig}(z) - i\mathcal{R}\mu_{f+ig}(z)\right) \\ \text{(Spektralmass)} \quad &= \langle (f+g), (T-z)^{-1}(f+g)\rangle - \langle (f-g), (T-z)^{-1}(f-g)\rangle \\ &+ i\langle (f-ig), (T-z)^{-1}(f-ig)\rangle - i\rangle (f-ig), (T-z)^{-1}(f-ig)\rangle \\ \text{(Polarisation)} \quad &= \langle f, (T-z)^{-1} g\rangle. \end{aligned}$$

Damit erfuellt die Abbildung eine der beiden in der letzten Aussage behaupteten Eigenschaften, naemlich

$$(*) \quad \int \frac{1}{t-z} d\widetilde{\mu}_{f,g} = \langle f, (T-z)^{-1} g\rangle$$

fuer alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Ende der Vorlesung

Mit $(*)$ folgt der verbleibende Teil der Existenzaussage nun aus der Injektivitaet der Boreltransformation:
Beh: Es gilt $\widetilde{\mu}_{f,f} = \mu_f$.
Bew. Die jeweiligen Boreltransformationen erfuellten

$$\mathcal{R}\widetilde{\mu}_{f,f}(z) \overset{(*)}{=} \langle f, (T-z)^{-1} f\rangle = \mathcal{R}\mu(z)$$

fuer alle $z \in \mathbb{C}^+$ und die Injektivitaet der Boreltransformation liefert die gewuenschte Aussage.

Beh: Es ist $\widetilde{\mu}$ linear im zweiten Argument und antilinear im ersten Argument. Bew. Wir zeigen $\widetilde{\mu}_{f,g+h} = \widetilde{\mu}_{f,g} + \widetilde{\mu}_{f,h}$ fuer alle $f, g, h \in \mathcal{H}$. (Die uebrigen Aussagen folgen auf ganz aehnliche Art.) Wieder betrachten wir die entsprechenden Boreltransformierten und finden fuer alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{t-z} d\widetilde{\mu}_{f,g+h} &\overset{*}{=} \langle f, (T-z)^{-1}(g+h)\rangle \\
&= \langle f, (T-z)^{-1}g\rangle + \langle f, (T-z)^{-1}h\rangle \\
(*) \quad &= \int \frac{1}{t-z} d\widetilde{\mu}_{f,g} + \int \frac{1}{t-z} d\widetilde{\mu}_{f,h} \\
&= \frac{1}{t-z} d(\widetilde{\mu}_{f,g} + \widetilde{\mu}_{f,h})
\end{aligned}$$

Aus der Injektivitaet der Boreltransformation folgt die gewuenschte Aussage.

Damit hat also $\widetilde{\mu}$ die genannte Eigenschaften.

Zur *letzten Aussage:* Der erste Teil der letzte Aussage wurde schon im Beweis der Existenz gezeigt. Wir kommen nun zum zweiten Teil der Aussage. Zu jeder messbaren Teilmenge A von $\mathbb{R}$ definieren wir dann

$$s_A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}, s_A(f,g) := \mu_{f,g}(A).$$

Aufgrund der Eigenschaften von μ ist dann s_A linear im zweiten Argument und antilinear im ersten Argument und nichtnegativ auf der Diagonalen. Damit ist s_A ein Semiskalarprodukt. Da fuer festes messbares A die Abbildung s_A ein Semiskalarprodukt ist, gilt nach Cauchy-Schwarz Ungleichung dann

$$|s_A(f,g)| \leq s_A(f,f)^{1/2} s_A(g,g)^{1/2} = \mu_f(A)^{1/2} \mu_g^{1/2}(A).$$

Damit folgt fuer jede Folge disjunkter messbarer Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$, dann

$$\begin{aligned}
\sum_n |s_{A_n}(f,g)| &\leq \sum_n \mu_f(A_n)^{1/2} \mu_g(A_n)^{1/2} \\
(CSI) \quad &\leq \left(\sum_n \mu_f(A_n)\right)^{1/2} \left(\sum_n \mu_g(A_n)\right)^{1/2} \\
&\leq \mu_f(\mathbb{R})^{1/2} \mu_g(\mathbb{R})^{1/2} \\
&\leq \|f\| \|g\|.
\end{aligned}$$

Das liefert die Aussage ueber $|\mu_{f,g}|$. □

Bemerkung*. Ein alternativer Existenzbeweis kann auf den Satz von Jordan / von Neumann aufgebaut werden. Die Abbildung $\mu : \mathcal{H} \longrightarrow$ endliche positive Masse, $f \mapsto \mu_f$, erfuellt die Parallelogrammidentitaet

$$\mu_{f+g} + \mu_{f-g} = 2(\mu_f + \mu_g)$$

(da beide Seiten die gleiche Boreltransformation haben). Damit erfuellt dann fuer jedes messbare $A \subset \mathbb{R}$ die Abbildung

$$s_A : \mathcal{H} \longrightarrow [0, \infty), s_A(f) := \mu_f(A),$$

die Parellelogrammidentitaet und ist nichtnegativ mit

$$s_A(f) = \mu_f(A) \leq \mu_f(\mathbb{R}) \leq \|f\|^2.$$

Nach dem Satz von Jordan / von Neumann gibt es dann also ein eindeutiges (durch Polarisation gewonnenes) Semiskalarprodukt $s_A(\cdot,\cdot)$, dessen Diagonale gerade s_A ist. Dann kann man

$$\mu_{f,g}(A) := s_A(f,g)$$

setzen und zeigen, dass die gewuenschten Eigenschaften erfuellt sind.

Wir beenden diesen Abschnitt mit der Diskussion zweier zusaetzlicher Eigenschaften des Spektralmaß.

Proposition (Gesamtmasse Spektralmaß). *Es gilt* $\mu_f(\mathbb{R}) = \|f\|^2$.

Beweis. Wir zeigen zunaechst eine Hilfsbehauptung, die auch an anderer Stelle von Interesse sein kann:

Beh: Fuer jedes $f \in \mathcal{H}$ gilt $-ia(T-ia)^{-1}f \to f$, $a \to \infty$.
Bew. Der Operator $S_a := -ia(T-ia)^{-1}$ ist offenbar beschraenkt mit $\|S_a\| \leq 1$. Damit reicht es also die Konvergenz auf einer dichten Teilmenge zu zeigen. Sei $f \in D(T)$. Dann folgt mit $Tf = (T-ia)f + iaf$ also

$$\|f + ia(T-ia)^{-1}f\| = \|(T-ia)^{-1}Tf\| \leq \frac{1}{a}\|Tf\| \to 0, a \to \infty.$$

Das liefert die gewuenschte Aussage
Wir betrachten nun fuer $f \in \mathcal{H}$ den Ausdruck $a\Im\mathcal{R}\mu_f(ia)$ und berechnen seinen Grenzwert fuer $a \to \infty$ auf die folgenden zwei Arten

$$a\Im\mathcal{R}\mu_f(ia) = \int \frac{a^2}{x^2+a^2} d\mu_f(x) \to \mu_f(\mathbb{R}), a \to \infty$$

sowie

$$\begin{aligned}
a\Im\mathcal{R}\mu_f(ia) &= a\Im\langle f, (T-ia)^{-1}f\rangle \\
&= a\frac{1}{2i}\langle f, ((T-ia)^{-1} - (T+ia)^{-1})f\rangle \\
\text{(Resolventenformel)} \quad &= a\frac{1}{2i}\langle f, 2ia(T+ia)^{-1}(T-ia)^{-1}f\rangle \\
&= \|a(T-ia)^{-1}f\|^2 \\
\text{(Hilfsbehauptung)} \quad &\to \|f\|^2.
\end{aligned}$$

Da die beiden Grenzwerte gleich sein muessen, ergibt sich

$$\mu_f(\mathbb{R}) = \|f\|^2$$

und das ist die gewuenschte Aussage. □

Proposition (Traeger des Spektralmaßes). *Es gilt*

$$\mu_f(\varrho(T) \cap \mathbb{R}) = 0.$$

Insbesondere ist das Spektralmass auf dem Spektrum von T getragen, d.h. es gilt

$$supp(\mu_f) := \{x \in \mathbb{R} : \mu(x-\varepsilon, x+\varepsilon) > 0 \textit{ fuer alle } \varepsilon > 0\} \subset \sigma(T).$$

Beweis. Zur ersten Aussage: Sei $\lambda \in \varrho(T) \cap \mathbb{R}$ gegeben. Da $\varrho(T)$ offen ist, gibt es ein offenes Interval I mit rationalen Endpunkten und

$$\lambda \in I \subset \varrho(T).$$

Es reicht nun zu zeigen $\mu_f(I) = 0$. (Denn man kann dann anschließend die gesamte Resolventenmenge als abzaehlbare Vereinigung solcher Intervalle schreiben.) Tatsaechlich reicht es natuerlich $\mu_f(J) = 0$ fuer jedes offene Teilinterval J von I zu zeigen, dass echt positiven Abstand zum Spektrum hat. Sei nun J ein solches Teilinterval. Dann ist die Funktion $z \mapsto \|(T - z)^{-1} f\|^2$ auf einer Umgebung von J beschraenkt (da die Resolvente stetig ist). Sei nun $F_f(z) = \langle f, (T-z)^{-1} f\rangle$. Dann gilt (s.o.)

$$\Im F_f(z) = \Im z \|(T-z)^{-1} f\|^2.$$

Damit konvergiert $\Im F_f(\cdot + i\varepsilon)$ auf J gleichmaessig gegen 0 (da $\Im z = \varepsilon$ gegen 0 konvergiert und $\|(T-z)^{-1} f\|^2$ nach dem oben diskutierten beschraenkt bleibt). Daher ist dann (Stonesche Formel)

$$t \mapsto \mu_f((-\infty, t]) = \lim_{\delta \to 0} \lim_{\varepsilon \to} \int_{(-\infty, t+\delta]} \Im F_f(x + i\varepsilon) dx$$

folgt auf J konstant. Das liefert dann das gewuenschte

$$\mu_f(J) = 0.$$

Das 'Insbesondere' folgt nun sofort aus der ersten Aussage, da $\varrho(T)$ offen ist. □

2. Von den Spektralmaßen zum projektionswertigen Maß

Im letzten Abschnitt haben wir jedem selbstadjungierten Operator T eine sesquilineare Form

$$\mu : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \text{komplexe Maße auf } \mathbb{R}$$

zugeordnet. In diesem Abschnitt zeigen wir Existenz (und Eindeutigkeit) einer Abbildung

$$E_T : \text{Meßbare Mengen von } \mathbb{R} \longrightarrow \text{Projektionen auf } \mathcal{H},$$

mit

$$\mu_{f,g}(A) = \langle f, E_T(A) g\rangle$$

fuer alle $f, g \in \mathcal{H}$ und $A \subset \mathbb{R}$ meßbar. Die Abbildung E_T kann man als ein 'projektionswertiges Mass' verstehen. Dieser Gesichtspunkt wird im folgenden Abschnitt vertieft. Wir werden zunaechst zeigen, wie man fuer eine beschraenkte Funktion Φ einen Operator $\Phi(T)$ definieren kann. Das ist als *beschraenkter Spektralkalkuel* bekannt. Anschliessend setzen wir dann $E_T(A) := 1_A(T)$. Im ganzen Abschnitt betrachten wir einen selbstadjungierten Operator T auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ als gegeben.

Proposition (Beschraenkte Funktionen von T). *Zu jeder beschraenkten meßbaren Funktion $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert ein eindeutiger beschraenkter Operator $\Phi(T)$ auf dem Hilbertraum mit*

$$\langle f, \Phi(T) f\rangle = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t) d\mu_f(t)$$

fuer alle $f \in \mathcal{H}$. Dieser Operator erfuellt

$$\langle f, \Phi(T)g\rangle = \int \Phi(t)d\mu_{f,g}(t).$$

Bemerkung. Da alle Maße μ_f auf $\sigma(T)$ getragen sind, spielen die Werte von Φ auf $\mathbb{R} \setminus \sigma(T)$ keine Rolle. Wir koennten also ebenso gut auch gleich uns nur auf beschraenkte messbare Funktionen auf $\sigma(T)$ beschraenken.

Beweis. Die *Eindeutigkeit* folgt direkt aus Polarisation. Um *Existenz* zu zeigen, betrachten wir den Fall $\Phi \geq 0$. (Der allgemeine Fall folgt dann durch Bilden geeigneter Linearkombinationen.) Die Abbildung

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (f, g) \mapsto \int \Phi(t)d\mu_{f,g}(t) =: Q(f, g)$$

ist linear im zweiten Argument und antilinear im ersten Argument und nichtnegativ auf der Diagonalen, also eine Semiskalarprodukt. Insbesondere erfuellt sie die Cauchy-Schwarz Ungleichung. Weiterhin gilt auf der Diagonalen offenbar

$$Q(f, f) = \int \Phi(t)d\mu_f(t) \leq \|\Phi\|_\infty \|f\|^2.$$

Damit folgt dann aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$|Q(f, g)| \leq Q(f, f)^{1/2} Q(g, g)^{1/2} \leq \|\Phi\|_\infty \|f\| \|g\|$$

fuer alle $f, g \in \mathcal{H}$. Damit gibt es dann also einen (eindeutigen) linearen Operator beschränkten Operator S mit $Q(f, g) = \langle f, Sg\rangle$. Wir setzten $\Phi(T) := S$.

Die letzte Aussage wurde (bei der Definition von Q) mitbewiesen. □

Bemerkung - Definition der Resolvente. Fuer $\Phi(t) = \frac{1}{t-z}$ gilt $\Phi(T) = (T-z)^{-1}$. (Denn es gilt nach Definition von $\Phi(T)$ und μ_f dann $\langle f, \Phi(T)f\rangle = \int \Phi d\mu_f = \langle f, (T-z)^{-1}f\rangle$ fuer all $f \in \mathcal{H}$. Damit stimmen dann $\Phi(T)$ und $(T-z)^{-1}$ auf der Diagonalen (und damit dann auch ueberall) ueberein.)

Wir werden nun die Abbildung

$$\text{Beschraenkte meßbare Funktionen} \longrightarrow \text{beschraenkte Operatoren}$$

$$\Phi \mapsto \Phi(T),$$

naeher untersuchen. Dabei wird sich zeigen, dass diese Abbildung die gaengigen Operationen respektiert.

Aus der vorangehenden Proposition ergeben sich einfach ein paar Eigenschaften.

LEMMA. *Es gilt:*

- $1(T) = I$,
- $\Phi(T)^* = \overline{\Phi}(T)$,
- $\Phi(T) + \Psi(T) = (\Phi + \Psi)(T)$,

Beweis. Das sind einfache Konsequenzen der vorigen Proposition:

Zum ersten Punkt: Es gilt nach Definition

$$\langle f, 1(T)f\rangle = \int 1 d\mu_f = \mu_f(\mathbb{R}) \stackrel{s.o}{=} \langle f, f\rangle = \langle f, If\rangle.$$

Damit folgt aus der Eindeutigkeitsaussage der Proposition die gewuenschte Behauptung.

Zum zweiten Punkt: Es gilt

$$\langle f, \Phi^*(T)f\rangle = \langle \Phi(T)f, f\rangle = \overline{\langle f, \Phi(T)f\rangle} = \overline{\int \Phi d\mu_f} = \int \overline{\Phi} d\mu_f = \langle f, \overline{\Phi}(T)f\rangle.$$

Aus der Eindeutigkeitsaussage der Proposition folgt dann der zweite Punkt. Zum dritten Punkt: Das folgt analog.

□

Wir halten auch noch folgende bemerkenswerte Eigenschaft fest.

LEMMA (Dichte von $\mu_{f,\Phi(T)g}$). *Seien $f, g \in \mathcal{H}$ gegeben. Fuer alle messbaren beschraenkten Φ gilt*

$$\mu_{f,\Phi(T)g} = \Phi\mu_{f,g}.$$

Beweis. Wir zeigen zunaechst (eine Variante der) Aussage fuer $\Phi = \frac{1}{\cdot - w}$, d.h. wir zeigen

$$\mu_{(T-\overline{w})^{-1}f,g} = \frac{1}{t-w}\mu_{f,g}.$$

Dazu zeigen wir, dass die Boreltransformation der linken Seite gleich der Boreltransformation der rechten Seite ist. (Dann folgt die Aussage aus der Eindeutigkeit der Boreltransformation.) Fuer $z \neq w$ gilt

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{t-z} d\mu_{(T-\overline{w})^{-1}f,g}(t) &= \langle f, (T-w)^{-1}(T-z)^{-1}g\rangle \\
&= \frac{1}{z-w}\langle f, ((T-z)^{-1} - (T-w)^{-1})g \\
&= \frac{1}{z-w}\int \frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-w} d\mu_{f,g} \\
&= \int \frac{1}{(t-z)}\frac{1}{(t-w)} d\mu_{f,g}.
\end{aligned}$$

Damit stimmen also die Boreltransformationen von $\mu_{(T-\overline{w})^{-1}f,g}$ und von $\frac{1}{(t-w)}d\mu_{f,g}$ in allen $z \neq w$ ueberein. Damit stimmen sie dann aufgrund der Holomorphie auch fuer $z = w$ ueberin und es folgt die Gleicheit der zugrundeliegenden Maße aus der Injektivitaet der Boreltransformation. Wir betrachten nun ein beliebiges beschraenktes messbare Φ. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{t-z} d\mu_{f,\Phi(T)g} &= \langle f, (T-z)^{-1}\Phi(T)g\rangle \\
&= \langle (T-\overline{z})^{-1}f, \Phi(T)g\rangle \\
\text{(Definition } \Phi(T)) \quad &= \int \Phi(s) d\mu_{(T-\overline{z})^{-1}f,g} \\
\text{(Vorueberlegung)} \quad &= \int \Phi(s)\frac{1}{t-z} d\mu_{f,g} \\
&= \int \frac{1}{t-z}\Phi(s) d\mu_{f,g}.
\end{aligned}$$

Damit stimmen die Boreltransformationen von $\mu_{f,\Phi(T)g}$ und $\Phi\mu_{f,g}$ ueberein und die gewuenschte Aussage folgt □

Die Abbildung ist auch mit Multiplikation vertraeglich.

LEMMA (Multiplikativitaet). *Es gilt* $\Phi(T)\Psi(T) = (\Phi\Psi)(T)$. *Insbesondere gilt auch* $\Phi(T)\Psi(T) = \Psi(T)\Phi(T)$.

Beweis. Das folgt leicht aus dem Lemma zur Dichte. Es gilt naemlich

$$\langle f, \Phi(T)\Psi(T)f\rangle = \int \Phi d\mu_{f,\Psi(T)g} = \int \Phi\Psi d\mu_{f,g} = \langle f, (\Phi\Psi)(T)g\rangle.$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung (Uebung). Man kann sich leicht auch noch folgendes klarmachen

$$\mu_{f,\Phi(T)g} = \mu_{\overline{\Phi}(T)f,g}.$$

(Denn es gilt fuer die Boreltransformationen

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t-z} d\mu_{\overline{\Phi}(T)f,g} &= \langle \overline{\Phi}(T)f, (T-z)^{-1}g\rangle \\ &= \langle f, \Phi(T)(T-z)^{-1}g\rangle \\ &= \langle f, (T-z)^{-1}\Phi(T)g\rangle \\ &= \int \frac{1}{t-z} d\mu_{f,g}. \end{aligned}$$

Das zeigt die gewuenschte Aussage.)

Die Abbildung hat auch eine Stetigkeitseigenschaft.

LEMMA (Stetigkeit). *Ist* $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *messbar und beschraenkt und ist* $\Phi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *messbare beschraenkte Funktionen mit*

- $\Phi_n(x) \to \Phi(x)$ *fuer alle* $x \in \mathbb{R}$,
- $\sup_n \|\Phi_n\|_\infty < \infty$,

so gilt

$$\Phi_n(T)f \to \Phi(T)f$$

fuer alle $f \in \mathcal{H}$.

Bemerkung. Die oben gegebene Konvergenz ist auch als starke Konvergenz der $\Phi_n(T)$ gegen $\Phi(T)$ bekannt. Wir werden spaeter auf dieses Konzept der Konvergenz zurueckkommen.

Beweis. Wir rechnen unter Nutzen der schon bewiesenen Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \|(\Phi_n(T) - \Phi(T))f\|^2 &= \langle (\Phi_n(T) - \Phi(T))f, (\Phi_n(T) - \Phi(T))f\rangle \\ &= \langle f, |\Phi_n - \Phi|^2(T)f\rangle \\ &= \int |\Phi_n(x) - \Phi(x)|^2 d\mu_f(x). \end{aligned}$$

Nun folgt die Aussage aus der Satz ueber dominierte Konvergenz. □

Bemerkung*. Man kann die Multiplikativitaet der Abbildung auch aus der Stetigkeitseigenschaft herleiten: Dazu betrachtet man zunaechst bei festem $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die Menge $\mathcal{A}_z$ der beschraenkten messbaren Funktionen Φ mit

$$\Phi(T)(T-z)^{-1} = (T-z)^{-1}\Phi = (\Phi\frac{1}{\cdot - z}(T)).$$

Nach der Resolventenformel (vgl. Beweis des Lemmas zur Dichte) gehoeren alle Funktionen der Form $\frac{1}{t-w}$ mit $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $w \neq z$ zu dieser Menge. Nach Stone / Weierstrass und der Stetigkeit der Abbildung enthaelt dann $\mathcal{A}_z$ alle stetigen Funktionen, die im unendlichen verschwinden. Nach einem monotonene Klassenargument und der Stetigkeitseigenschaften der Abbildung enthaelt dann $\mathcal{A}_z$ alle messbaren beschraenkten Funktionen. Nun drehen wir den Spiess um und betrachten fuer festes messbares beschraenktes Φ die Menge derjenigen messbaren beschraenkte Funktionen Ψ mit

$$\Psi(T)\Phi(T) = \Phi(T)\Psi(T) = (\Psi\Phi)(T).$$

Dann liefert eine aehnliche Begruendung, dass wir alle messbaren beschraenkten Ψ einsezten duerfen.

Wir beginnen mit einer **Erinnerung:** Ein beschraenker ueberall definierter Operator P im Hilbertraum ist genau dann eine Projektion, wenn $P = P^* = P^2$ gilt. Sind P und Q Projektionen, so ist $P+Q$ genau dann eine Projektion von gilt $PQ = 0 = QP$ (siehe Appendix fuer weitere Details).

THEOREM (Projektionswertiges Mass zu T). *Zu jedem selbstadjungierten Operator T im Hilbertraum $\mathcal{H}$ gibt es eine eindeutige Abbildung*

$$E_T : \textit{Meßbare Mengen von } \mathbb{R} \longrightarrow \textit{Projektionen auf } \mathcal{H}$$

mit $\mu_{f,g}(A) = \langle f, E_T(A)g\rangle$ fuer alle $f, g \in \mathcal{H}$ und $A \subset \mathbb{R}$ meßbar. Es gilt $E_T(A) = 1_A(T)$ fuer alle $A \subset \mathbb{R}$ meßbar. Die Abbildung E_T hat folgende Eigenschaften:

- *Es gilt $E_T(\emptyset) = 0$.*
- *Sind (A_n) paarweise disjunkte messbare Mengen in $\mathbb{R}$ so gilt*

$$E_T(\cup A_n)f = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{N} E_T(A_n)f$$

  fuer jedes $f \in \mathcal{H}$.
- *$E_T(\mathbb{R}) = I$.*

Bemerkung. Da $E_T(A)$ eine Projektion ist gilt natuerlich $\langle f, E_T(A)g\rangle = \langle E_T(A)f, E_T(A)g\rangle$ und insbesondere $\langle f, E_T(A)f\rangle = \|E_T(A)f\|^2$.

Beweis. Die *Eindeutigkeit* einer solchen Abbildung ist klar. Um die *Existenz* zu zeigen, definieren wir fuer eine meßbare Teilmenge A von $\mathbb{R}$

$$E_T(A) := 1_A(T).$$

Nach dem Vorangehenden hat $P := 1_A(T)$ die folgenden Eigenschaften:

- $P^* = \overline{1_A}(T) = 1_A(T) = P$ und
- $P^2 = 1_A(T)1_A(T) = (1_A 1_A)(T) = 1_A(T) = P$.

Damit ist dann P also eine orthogonale Projektion. Nach Definition gilt dann

$$\langle f, E_T(A)g\rangle = \langle f, 1_A(T)g\rangle = \int 1_A d\mu_{f,g} = \mu_{f,g}(A).$$

Damit hat E_T also die gewuenschte Eigenschaft.

Wir zeigen die drei genannten Eigenschaften: Offenbar gilt

$$E_T(\emptyset) = 1_\emptyset(T) = 0(T) = 0.$$

Weiterhin rechnet man sofort nach

$$\begin{aligned} E_T(\cup_n A_n)f &= 1_{\cup_n A_n}(T)f \\ \text{(Stetigkeit)} &= \lim_{N\to\infty} 1_{\cup_{n=1}^N A_n}(T)f \\ \text{(Additivitaet)} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N 1_{A_n}(T)f \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N E_T(A_n)f. \end{aligned}$$

Es gilt $E_T(\mathbb{R}) = I$: Eine direkte Rechnung zeigt

$$E_T(\mathbb{R}) = 1_{\mathbb{R}}(T) = 1(T) = I.$$

□

Die drei in den obigen Punkten aufgelisteten Eigenschaften der Abbildung E_T besagen, dass man E_T als ein projektinswertiges Maß verstehen kann. Dieses Konzept werden wir im folgenden Abschnitt genau definieren und weiter untersuchen.

3. Integration: Von projektionswertigen Maßen zu Operatoren

Im vorigen Abschnitt haben wir - unter anderem - zu jedem selbstadjungierten Operator ein projektionswertiges Maß assoziiert. In diesem Abschnitt gehen wir von einem allgemeinen projektionswertigen Mass E aus und entwickeln dafuer eine 'Integrationstheorie', d.h. wir zeigen wie man fuer beliebige meßbare Funktionene Φ den Ausdruck

$$\int \Phi dE$$

als Operator verstehen kann. Diese Prozedur ist auch als *Spektralkalkuel* bekannt. Es wird insbesondere darum gehen, den Definitionsbereich dieses Operators zu verstehen.

Im folgenden werden immer wieder *starker Konvergenz* von Operatoren begegenen: Sind (B_n) und B beschraenkte ueberall definierte Operatoren auf dem Hilbertraum, so heisst B_n *stark konvergent* gegen B oder auch *konvergent im starken Sinne* gegen B, wenn gilt

$$B_n f \to Bf$$

fuer alle $f \in \mathcal{H}$. Dann heisst B der *starke Grenzwert* der B_n. Entsprechend gilt fuer beschraenkte Operatoren die Gleichung

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

im Sinne starker Konvergenz, wenn fuer jedes $f \in \mathcal{H}$ gilt

$$Bf = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N B_n f,$$

(also die Operatoren $\sum_{n=1}^N B_n$ stark gegen B konvergieren.

Definition (Projektionswertiges Maß). *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Abbildung*

$$E : \textit{Meßbare Mengen von } \mathbb{R} \longrightarrow \textit{Projektionen auf } \mathcal{H}$$

projektionswertiges Maß, wenn gilt

- $E(\emptyset) = 0$;
- $E(\cup_n A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(A_n)$ *im Sinne starker Konvergenz fuer jedes Familie meßbarer paarweise disjunkter Teilmengen* (A_n) *von* $\mathbb{R}$.

sowie

- $E(\mathbb{R}) = I$.

Bemerkung. Die ersten beiden Eigenschaften entsprechen genau den definierenden Eigenschaften eines Maßes. Die dritte Eigenschaft hat keine direkte Entsprechung. Man kann sie als Konvention sehen: Wenn ein E die ersten beiden Eigenschaften erfuellt, kann man durch Uebergang zum Hilbertraum $\mathcal{H}' := E(\mathbb{R})\mathcal{H}$ und Einschraenken von E auf diesen Hilbertraum die dritte Eigenschaft sicherstellen.

Beispiel - projektionswertiges Maß eines selbstadjungierten Operator. Ist T ein selbstadjungierter Operator, so ist - wie im letzten Theorem des vorigen Abschnittes gezeigt - die Abbildung E_T mit $E_T(A) = 1_A(T)$ ein projektionswertiges Maß (und in diesem Sinne, ist dann auch der dort gegebene Name 'Projektionswertiges Maß von T' gerechtfertigt :-) Der Spektralsatz aus dem folgenden Abschnitt liefert- unter anderem - , dass jedes projektionswertige Maß E gerade die Form E_T hat mit einem eindeutig bestimmten selbstadjungierten Operator T.

Proposition (Einfache Eigenschaften). *Sei E ein projektionswertiges Maß in $\mathcal{H}$. Dann gilt*

(a) $E(A \cup B) = E(A) + E(B)$ *und* $E(A)E(B) = 0$ *fuer alle messbaren* $A, B \subset \mathbb{R}$ *mit* $A \cap B = \emptyset$.
(b) $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ *fuer alle messbaren* $A, B \subset \mathbb{R}$.
(c) *Sind A und B messbare Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $\subset B$ so gilt* $E(A) \leq E(B)$ *(d.h.* $\langle f, E(A)f\rangle \leq \langle f, E(B)f\rangle$ *fuer alle* $f \in \mathcal{H}$*).*
(d) *Sind (A_n) messbare aufsteigende Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $A = \cup A_n$ so gilt, so ist $E(A)$ der starke Grenzwert der $E(A_n)$.*
(e) *Sind (A_n) messbare absteigende Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $A = \cap A_n$ so gilt, so ist $E(A)$ der starke Grenzwert der $E(A_n)$.*

Beweis. (a) Sind A und B messbare disjunkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ so erhaelt man aus den definierenden Eigenschaften mit $A_1 = A$, $A_2 = B$ und $A_n = \emptyset$ fuer $n \geq 3$ sofort

$$E(A \cup B) = E(A) + E(B).$$

Insbesondere ist also $E(A) + E(B)$ eine Projektion. Damit gilt also dann

$$E(A)E(B) = 0 = E(B)E(A).$$

(b) Sei $A_1 := A \setminus (A \cap B)$ und $B_1 := B \setminus (A \cap B)$. Dann sind A_1, $A \cap B$ und B_1 paarweise disjunkt. Damit folgt aus dem schon gezeigten

$$E(A) = E(A_1) + E(A \cap B) \text{ und } E(B) = E(B_1) + E(A \cap B)$$

und

$$E(A_1)E(B_1) = 0 = E(B_1)E(A_1)$$

sowie

$$E(A \cap B)E(B_1) = 0 = E(A_1)E(A \cap B).$$

Damit ergibt sich dann

$$E(A)E(B) = (E(A_1)+E(A\cap B))(E(B_1)+E(A\cap B)) = E(A\cap B)E(A\cap B) = E(A\cap B).$$

(c) Gilt nun $A \subset B$ so folgt $B = A \cup (B \setminus A)$ mit disjunkten Menge A und $B \setminus A$ und aus dem vorangehenden folgt $E(A) \leq E(B)$.

(d) Setze $B_1 := A_1$ und $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ fuer $n \geq 2$. Dann sind die B_n paarweise disjunkt (da die A_n aufsteigend sind) mit

$$\cup_{n=1}^N B_n = A_N \text{ und } A = \cup_n B_n.$$

Damit folgt aus dem schon gezeigten

$$E(A)f = \lim_N \sum_{n=1}^N E(B_n)f = \lim_N E(A_N)f.$$

(e) Das kann aehnlich wie (d) gezeigt werden. □

Bemerkung - Verteilungsfunktion und Spektralschar. Zu jedem projektionswertigen Maß E gehoert die Verteilungsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \text{Projektionen}, t \mapsto E((-\infty, t]) =: E_t.$$

Die Familie der E_t, $t \in \mathbb{R}$, hat die folgenden Eigenschaften (wie leicht aus den entsprechenden Eigenschaften des projektionswertigen Maß folgt):

- Es gilt $E_s \leq E_t$ (d.h. $\langle f, E_s f\rangle \leq \langle f, E_t f\rangle$ fuer alle $f \in \mathcal{H}$) fuer alle $s \leq t$.
- $E_t E_s = E_{\min\{t,s\}}$ fuer alle $t, s \in \mathbb{R}$.
- $E_s f \to E_t f$ fuer $s \to t+$ und jedes $f \in \mathcal{H}$.
- $E_t f \to f$, $t \to \infty$, fuer jedes $f \in \mathcal{H}$.
- $E_t f \to 0$, $t \to -\infty$, fuer jedes $f \in \mathcal{H}$.

Umgekehrt kann man (mit etwas Muehe) auch zeigen, dass zu jeder Familie von Projektionen $E_t, t \in \mathbb{R}$, mit den angegebenen Eigenschaften eine eindeutige Spektralschar E existiert mit $E_t = E((-\infty, t])$. In manchen Quellen wird daher auch eine solche Familie E_t an den Anfang der Theorie gestellt. Sie wird als *Spektalschar* bezeichnet.

Ende der Vorlesung

Jedes projektionswertige Maß liefert eine sesquilineare Abbildung mit Werten in den komplexen Maßen. (Das ist im wesentlichen die Umkehrung des im vorigen Abschnitt gemachten Verfahrens. Dort haben wir zu der Familie der Spektralmaße ein projektionswertiges Maß assoziiert. Hier gehen wir den - wesentlich einfacheren - umgekehrten Weg.)

Proposition (Assoziierte komplexe Maße). *Sei E ein projektionswertiges Maß auf $\mathcal{H}$. Dann ist fuer alle $f, g \in \mathcal{H}$ die Abbildung*

$$\mu_{f,g}^E : \textit{meßbare Teilmengen von } \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \mu_{f,g}^E(A) := \langle f, E(A)g\rangle,$$

ein komplexes Maß mit

$$|\mu^E_{f,g}|(\mathbb{R}) \leq \|f\|\|g\|$$

und die Abbildung

$$\mu := \mu^E : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \textit{komplexe Masse auf}\, \mathbb{R}, \mu^E_{f,g} := \langle f, E(\cdot)g\rangle,$$

ist linear im zweiten Argument und antilinear im ersten Argument.

Beweis. Bis auf die Ungleichung fuer $|\mu_{f,g}|$ folgt alles sofort aus den Definitionen. Wir zeigen die Ungleichung[1]: Seien (A_n) paareweise disjunkte meßbare Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $\cup A_n = \mathbb{R}$. Dann gilt also $\sum_n E(A_n) = I$ und das liefert

$$\begin{aligned}
\sum_n |\mu^E_{f,g}(A_n)| &= \sum_n |\langle E(A_n)f, E(A_n)g\rangle| \\
&\leq \sum_n \|E(A_n)f\|\|E(A_n)g\| \\
&\leq \left(\sum_n \|E(A_n)f\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_n \|E(A_n)g\|^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_n \langle f, E(A_n)f\rangle\right)^{1/2} \left(\sum_n \langle g, E(A_n)g\rangle\right)^{1/2} \\
&= \|f\|\|g\|.
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Notation. Wir schreiben im folgenden meist μ statt μ^E, wenn keine Moeglichkeit fuer Mißverstaendnisse besteht. Auch setzen wir $\mu_f := \mu_{f,f}$.

Nach dieser Vorbereitung wenden wir uns nun der Integrationstheorie des projektionswertigen Masses E zu. Dabei geht es darum, den Operator

$$E(\Phi) := \int \Phi(t) dE(t)$$

fuer beliebige meßbare Funktionen Φ auf $\mathbb{R}$ zu definieren. Wir werden das aehnlich wie bei der Integrationstheorie bzgl. positiver Maße

- zunaechst fuer Elementarfunktionen durchfuehren und dann zu beschraenkten messbaren Funktionen uebergehen,
- und dann schliesslich allgemeiner messbare Funktionen mittels eines Grenzueberganges behandeln.

Die Betrachtungen sind in gewisser Weise aehnlich zu Ueberlegungen im vorigen Abschnitt. Anders als dort haben wir aber hier von anfang an die folgende Multiplikativitaet

$$E(A)E(B) = E(A \cap B)$$

zur Verfuegung und das macht manches etwas einfacher.

[1]Einen ganz aehnlichen Schluss haben wir schon weiter oben bei der Abschaetzung der Spektralmaße gemacht.

LEMMA (Beschraenkter Spektralkalkuel fuer E). *Sei E ein projektionswertiges Maß im Hilbertraum. Dann existiert zu jeder beschraenkten meßbaren Funktion $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein eindeutiger beschraenkter Operator $E(\Phi)$ auf dem Hilbertraum mit*

$$\langle f, E(\Phi)f\rangle = \int_{\mathbb{R}} \Phi(t)d\mu_{f,f}(t)$$

fuer alle $f \in \mathcal{H}$. Die Abbildung

E : *beschraenkte messbare Funktionen auf* $\mathbb{R} \longrightarrow$ *beschraenkte Operatoren auf* $\mathcal{H}$

hat die folgenden Eigenschaften:

- $E(1) = I$,
- $E(\Phi + \alpha\Psi) = E(\Phi) + \alpha E(\Psi)$,
- $E(\Phi)^* = E(\overline{\Phi})$,
- $E(\Phi\Psi) = E(\Phi)E(\Psi)$,

sowie

$$\langle E(\Phi)f, E(\Psi)g\rangle = \int \overline{\Phi}\Psi d\mu_{f,g}$$

fuer alle meßbaren beschraenkten $\Phi, \Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ und alle $f, g \in \mathcal{H}$.

Bemerkung. Definiert man den Traeger von E durch

$$\operatorname{supp}(E) := \{x : E(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq 0 \text{ fuer alle } \varepsilon > 0\},$$

so sieht man leicht, dass alle $\mu_{f,g}$ auf $\operatorname{supp}(E)$ getragen sind. Man koennte also auch hier sich auf Φ einschraenken, die auf dem Traeger von E definiert sind.

Beweis. Wir zeigen zunaechst *Eindeutigkeit*: Ist E eine solche Abbildung, so folgt mittels Polarisation

$$\langle f, E(\Phi)g\rangle = \int \Phi d\mu_{f,g}$$

fuer alle $f, g \in \mathcal{H}$. Damit ist $E(\Phi)$ aber eindeutig bestimmt.

Wir zeigen nun *Existenz* und werden im Zuge des Existenzbeweises auch die anderen angegebenen Eigenschaften der Abbildung E beweisen:
Ist $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Elementarfunktion, d.h. $\Phi = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j 1_{A_j}$ mit $A_1, \ldots, A_N \subset \mathbb{R}$ meßbar und $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{C}$ beliebig, so definiert man

$$E(\Phi) := \sum_{j=1}^{N} \alpha_j E(A_j).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle f, E(\Phi)g\rangle &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \langle f, E(A_j)g\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \mu_{f,g}(A_j) \\ &= \int \Phi d\mu_{f,g}\end{aligned}$$

fuer alle $f, g \in \mathcal{H}$. Das zeigt insbesondere, dass die Definition nicht davon abhaengt wir man Φ als Elementarfunktion darstellt (da die rechte Seite nur von Φ abhaengt). Fuer die Abbildung

$$E : \text{Elementare Funktionen} \longrightarrow \text{beschraenkte Operatoren}, \Phi \mapsto E(\Phi),$$

rechnet man sofort die folgenden Eigenschaften nach:

- E ist linear, d.h. $E(\Phi + \alpha\Psi) = E(\Phi) + \alpha E(\Psi)$.
- E ist multiplikativ, d.h. $E(\Phi\Psi) = E(\Phi)E(\Psi)$.
- $E(\Phi)^* = E(\overline{\Phi})$.
- $E(1) = I$.

Weiterhin gilt, wie man ebenfalls mit einer direkten Rechnung sieht,

$$\langle E(\Phi)f, E(\Psi)g\rangle = \int \overline{\Phi}\Psi d\mu_{f,g}.$$

(In der Tat folgt das sofort aus

$$\langle E(B)f, E(A)g\rangle = \langle f, E(B)E(A)g\rangle = \langle f, E(A \cap B)g\rangle = \int 1_{A\cap B} d\mu_{f,g}$$

und der Linearitaet von E.) Damit erhaelt man insbesondere die Abschaetzung

$$\|E(\Phi)f\|^2 = \langle E(\Phi)f, E(\Phi)f\rangle = \int |\Phi|^2 d\mu_{f,f} \leq \|\Phi\|_\infty^2 \mu_{f,f}(\mathbb{R}) \leq \|\Phi|_\infty^2 \|f\|^2.$$

Es ist also E eine beschraenkte lineare Abbildung auf dem Raum der Elementarfunktionen mit der Supremumnorm. Tatsaechlich ist die Norm von E kleiner oder gleich Eins.
Da die Elementarfunktionen dicht sind (bzgl. der Supremumsnorm) im Banachraum aller beschraenkten messbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$, kann man dann E zu einer Abbildung auf diesem Banachraum fortsetzen. Wir bezeichnen diese Fortsetzung wieder mit E. Die genannten Eigenschaften uebertragen sich durch Grenzwertbildung auch auf die Fortsetzung. □

Die Maße $\mu_{E(\Phi)f}$ haben eine Dichte bzgl. μ_f und das wird in mancherlei Zusammenhang praktisch sein.

Folgerung (Dichte von $\mu_{E(\Phi)f}$). *Sei E ein projektionswertiges Maß. Dann gilt fuer jedes beschraenkte $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$*

$$\mu_{E(\Phi)f} = |\Phi|^2 \mu_f$$

fuer alle $f \in \mathcal{H}$.

Beweis. Fuer alle messbare $A \subset \mathbb{R}$ gilt unter Nutzen der gerade bewiesenen Eigenschaften von E

$$\begin{aligned} \int 1_A d\mu_{E(\Phi)f} &= \langle E(\Phi)f, E(1_A)E(\Phi)f\rangle \\ &= \langle f, E(\overline{\Phi})E(1_A)E(\Phi)f\rangle \\ &= \langle f, E(|\Phi|^2 1_A)f\rangle \\ &= \int 1_A |\Phi|^2 d\mu_f. \end{aligned}$$

Das liefert die gewuenschte Aussage. □

Notation. Man schreibt auch

$$\int \Phi(t) dE(t)$$

statt $E(\Phi)$ und nennt die Abbildung E *beschraenkten Spektralkalkuel.*

Wir werden uns nun beliebigen meßbaren Funktionenen zuwenden. Genauer ist es unser Ziel $E(\Phi)f$ fuer ein beliebiges messbares $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ und geeignete $f \in \mathcal{H}$ zu definieren. Fuer das weitere Vorgehen ist nun die fuer alle beschraenkten messbaren $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ oben gezeigte Gleichung

$$(\clubsuit) \quad \|E(\Psi)f\|^2 = \int |\Psi|^2 d\mu_f$$

von grosser Bedeutung. Sie legt zunaechst einmal nahe, als Definitionsbereich von $E(\Phi)$ die Menge

$$D_\Phi := \{f \in \mathcal{H} : \int |\Phi|^2 d\mu_f < \infty\} = \{\Phi \in L^2(\mathbb{R}, \mu_f)\}$$

zu waehlen.
Wir setzen weiterhin

$$U_n^\Phi := \{x \in \mathbb{R} : |\Phi(x)| \leq n\}.$$

Lemma (Definition $E(\Phi)$). *Sei $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ meßbar. Dann ist D_Φ ein dichter Unterraum von $\mathcal{H}$. Setzt man $\widetilde{\Phi}_n := 1_{U_n^\Phi} \Phi$, so ist $(E(\widetilde{\Phi}_n)f)$ fuer jedes $f \in D_\Phi$ eine Cauchy-Folge und die Abbildung*

$$E(\Phi) : D_\Phi \longrightarrow \mathcal{H}, f \mapsto \lim_N E(\widetilde{\Phi}_n)f,$$

ist ein linearer Operator. Weiterhin gilt fuer alle $f \in D_\Phi$

$$\|E(\Phi)f\|^2 = \int |\Phi|^2 d\mu_f.$$

Beweis. Wir zeigen zunaechst, dass D_Φ ein Unterraum ist. Offenbar gehoert mit f auch λf zu D_Φ fuer jedes $\lambda \in \mathbb{C}$. Weiterhin gilt fuer beliebige $f, g \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \mu_{f+g} &= \langle (f+g), E(\cdot)(f+g) \rangle \\ &= \|E(\cdot)(f+g)\|^2 \\ &= \|E(\cdot)f + E(\cdot)g\|^2 \\ &\leq 2\|E(\cdot)f\|^2 + 2\|E(\cdot)g\|^2 \\ &= 2\mu_f + 2\mu_g. \end{aligned}$$

Damit folgt dann sofort, dass mit $f, g \in D_\Phi$ auch $f + g$ zu D_Φ gehoert.

Wir zeigen nun, dass $E(\widetilde{\Phi}_n)f$ eine Cauchy-Folge ist fuer jedes $f \in D_\Phi$: Nach Konstruktion von $\widetilde{\Phi}_n$ gilt $\|\widetilde{\Phi}_n| \leq \min\{n, |\Phi|\}$ und $\widetilde{\Phi}_n$ konvergiert punktweise gegen Φ. Damit konvergiert dann $\widetilde{\Phi}_n$ gegen Φ in $L^2(\mathbb{R}, \mu_f)$ fuer jedes $f \in D_\Phi$. Damit folgt aus $(\clubsuit)$, dass $(E(\widetilde{\Phi}_n)f)$ eine Cauchy-Folge ist.

Offenbar gilt

$$E(\widetilde{\Phi}_n)(f + \lambda g) = E(\widetilde{\Phi}_n)f + \lambda E(\widetilde{\Phi}_n)g$$

und die Linearitaet von $E(\Phi)$ folgt.

Es bleibt zu zeigen, dass D_Φ dicht ist: Sei $f \in \mathcal{H}$ beliebig. Dann gilt mit $f_n := E(1_{U_n^\Phi})f$ nach dem Dichtelemma

$$\int |\Phi|^2 d\mu_{f_n} = \int |\Phi|^2 1_{U_n^\Phi} d\mu_f < \infty$$

also $f_n \in D_\Phi$ sowie $f_n \to f$ wegen

$$\|f - f_n\|^2 = \|E(1)f - E(1_{U_n^\Phi})f\|^2 \overset{(\clubsuit)}{=} \int |1 - 1_{U_n^\Phi}|^2 d\mu_f \to 0, n \to \infty,$$

wobei wir im letzten Schritt den Satz von der dominierten Konvergenz nutzen.

Die letzte Aussage ist klar nach der Definition und dem Satz von der monotonen Konvergenz. □

Bemerkungen.

- Es ist nicht schwer zu sehen, dass $E(\Phi)f = \lim_n E(\Phi_n)f$ fuer *jede* Folge (Φ_n) beschraenkter messbarer Funktionen mit $\Phi_n \to \Phi$ in $L^2(\mathbb{R}, \mu_f)$.
- Man kann es auch so verstehen, dass die Gleichung

  $$\|E(\Phi)f\|^2 = \int |\Phi|^2 d\mu_f$$

  fuer alle $f \in \mathcal{H}$ gilt in dem Sinne, dass die eine Seite genau dann existiert, wenn die andere Seite existiert und, dass in diesem Fall beide Seiten den gleichen Wert haben.

Erinnerung. Ein dicht definierter Operator T im Hilbertraum heisst normal, wenn $D(T) = D(T^*)$ und $\|Tf\| = \|T^*f\|$ fuer alle $f \in D(T)$ gilt.

THEOREM (Integration unbeschraenkter Funktionen). *Sei E ein projektionswertiges Maß und $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine messbare Funktion. Dann gilt $E(\Phi)^* = E(\overline{\Phi})$. Insbesondere ist $E(\Phi)$ normal. Ist Φ reellwertig, so ist $E(\Phi)$ sogar selbstadjungiert.*

Beweis. Offenbar gilt $D(E(\Phi)) = D(E(\overline{\Phi})) =: D$ und

$$\|E(\Phi)f\| \overset{(\clubsuit)}{=} \int |\Phi|^2 d\mu_f \overset{(\clubsuit)}{=} \|E(\overline{\Phi})f\|$$

fuer $f \in D$. Es bleibt $E(\Phi)^* = E(\overline{\Phi})$ zu zeigen. Sei dazu $\widetilde{\Phi}_n$ wie oben. Dann gilt $\widetilde{\overline{\Phi}}_n = \overline{\widetilde{\Phi}_n}$. Damit folgt fuer alle $f, g \in D$

$$\langle f, E(\Phi)g\rangle = \lim_n \langle f, E(\widetilde{\Phi}_n)g\rangle = \lim_n \langle E(\overline{\widetilde{\Phi}_n})f, g\rangle = \langle E(\overline{\Phi})f, g\rangle.$$

Das zeigt $E(\overline{\Phi}) \subset E(\Phi)^*$.
Es bleibt $D(E(\Phi)^*) \subset D(E(\overline{\Phi}))$ zu zeigen. Sei $f \in D(E(\Phi)^*)$ beliebig. Dann gibt es also ein $g \in \mathcal{H}$ mit

$$(*) \;\; \langle g, h\rangle = \langle f, E(\Phi)h\rangle$$

fuer alle $h \in D(E(\Phi))$. Damit folgt dann fuer alle $h \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
\langle E(\overline{\widetilde{\Phi}_n} f, h\rangle &= \langle f, E(\widetilde{\Phi}_n)h\rangle \\
&= \langle f, E(\Phi 1_{U_n})h\rangle \\
(!) \quad &= \langle f, E(\Phi)E(1_{U_n})h\rangle \\
(*) \quad &= \langle g, E(1_{U_n})h\rangle \\
&= \langle E(1_{U_n})g, h\rangle.
\end{aligned}$$

(Hier folgt (!) aus

$E(\Phi)(E(1_{U_n})h) = \lim_m E(\Phi 1_{U_m})(E(1_{U_n})h) = \lim_m E(\Phi 1_{U_m} 1_{U_n})) = E(\Phi 1_{U_n})h.$)

Da $h \in \mathcal{H}$ beliebig ist, folgt durch Vergleich von linker und rechter Seite dann

$$E(\overline{\widetilde{\Phi}_n})f = E(1_{U_n})g.$$

Das liefert dann unter Nutzen des Satzes von der monotonen Konvergenz im ersten Schritt

$$\begin{aligned}
\int |\overline{\Phi}|^2 d\mu_f &= \lim_n \int |\overline{\widetilde{\Phi}_n}|^2 d\mu_f \\
&\overset{(\clubsuit)}{=} \lim_n \|E(\overline{\widetilde{\Phi}_n})f\|^2 \\
&= \lim_n \|E(1_{U_n} g\|^2 \\
&\overset{(\clubsuit)}{=} \lim_n \int 1_{U_n} d\mu_g \\
&= \|g\|^2 \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Damit gilt also $\overline{\Phi} \in L^2(\mathbb{R}, \mu_f)$ d.h. $f \in D(E(\overline{\Phi}))$. □

Ende der Vorlesung

Der vorangehende Satz erlaubt es uns, zu jedem projektionswertigen Maß E den selbstadjungierten Operator $E(id)$ zu definieren (und das ist der Hauptsinn der vorangehenden Ueberlegungen). Diesen Operator werden wir nun kurz untersuchen.

Wie man es erwarten mag ist die Resolvente dieses Operators ist durch die Anwendung von E auf die Funktion $1/(\cdot - z)$ geben.

LEMMA (Resolvente von $E(id)$). *Sei E ein projektionswertiges Maß. Dann gilt fuer jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*

$$(E(id) - z)^{-1} = E(\Phi_z)$$

fuer $\Phi_z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \Phi_z(t) = \frac{1}{t-z}$.

Beweis. Wir setzen $T := E(id)$ und zeigen

$$(T - z)E(\Phi_z) = I \text{ und } E(\Phi_z)(T - z) = I_{D(T)}.$$

(Dann folgt $(T - z)^{-1} = E(\Phi_z)$.)

Es gilt $(T - z)E(\Phi_z) = I$: Wir zeigen zunaechst, dass $E(\Phi_z)f$ zu $D(T)$ gehoert fuer jedes $f \in \mathcal{H}$. Dazu muessen wir untersuchen, ob $id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zu $L^2(\mathbb{R}, \mu_{E(\Phi_z)f})$ gehoert. Nach der Folgerung zur Dichte gilt $\mu_{E(\Phi_z)}f =$

$|\Phi_z|^2\mu_f$. Da offenbar $|id|^2|\Phi_z|^2$ eine beschraenkte Funktion ist und μ_f ein beschraenktes Maß, folgt damit das gewuenschte $id \in L^2(\mathbb{R}, \mu_{E(\Phi_z)f})$. Sei $(\widetilde{id}_n)$ die oben definierte Folge (zu id). Dann gilt

$$\begin{aligned}(E(id)-z)E(\Phi_z)f &= \lim_n (E(\widetilde{id}_n)-z)E(\Phi_z)f \\ &= \lim_n E((\widetilde{id}_n - z)\Phi_z)f \\ \text{(dominierte Konvergenz)} \quad &= E(1)f \\ &= f.\end{aligned}$$

Das ist gerade die gewuenschte Aussage.

Es gilt $E(\Phi_z)(T-z) = I_{D(T)}$: Da Φ_z beschraenkt ist, ist $E(\Phi_z)$ ein beschraenkter Operator. Damit ist also $E(\Phi_z)(T-z)$ gerade auf $D(T)$ definiert. Fuer $f \in D(T)$ berechnen wir

$$\begin{aligned}E(\Phi_z)(E(id)-z)f &= \lim_n E(\Phi_z)(E(\widetilde{id}_n)-z)f \\ &= \lim_n E(\Phi_z(\widetilde{id}_n - z))f \\ \text{(dominierte Konvergenz)} \quad &= E(1)f \\ &= f.\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Wir koennen auch eine Aussage machen zum Ort des Spektrums von $E(id)$. Dazu definieren wir den *Traeger* eines projektionswertiges Maß E durch

$$\operatorname{supp}(E) := \{s \in \mathbb{R} : E((s-\varepsilon, s+\varepsilon)) > 0 \text{ fuer alle } \varepsilon > 0\}.$$

Man beachte, dass diese Definition ganz analog zur Definition des Traegers eines positiven Maßes auf einem topologischen Raum ist. Offenbar ist das Komplement von $\operatorname{supp}(E)$ offen, also $\operatorname{supp}(E)$ abgeschlossen.

THEOREM (Spektrum via Spektralschar). *Sei E ein projektionswertiges Maß und $T = E(id)$. Dann gilt*

$$\sigma(T) = supp(E).$$

Insbesondere gilt $E(\varrho(T)) = 0$.

Beweis. Wir zeigen zunaechst, dass fuer $s \in \mathbb{R}$ und $C > 0$ die folgenden beiden Aussagen aequivalent sind:

- Es gilt $\|(T-s)f\| \geq C\|f\|$ fuer alle $f \in D(T)$.
- Es gilt $E(I) = 0$ fuer $I = (s-C, s+C)$.

Erste Aussage impliziert zweite Aussage: Sei f beliebig aus dem Hilbertraum. Dann gehoert $g := E(I)f$ zum Definitionsbereich von T (da

$$\int |id|^2 d\mu_{E(I)f} = \int |id|^2 1_I d\mu_f < \infty$$

gilt.) Zu zeigen: $g = 0$ d.h.

$$0 = \|g\|^2 = \int 1_I d\mu_f.$$

Angenommen nein. Dann koennen wir rechnen

$$\begin{aligned} C^2\|g\| &= \|(T-s)g\|^2 \\ \text{(s.o.)} &= \int (t-s)^2 d\mu_g \\ &= \int (t-s)^2 1_I(t) d\mu_f(t) \\ &< C^2 \int 1_I(t) d\mu_f(t) \\ &= C^2\|g\|^2. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch.

Zweite Aussage impliziert erste Aussage: Das folgt mit aehnlicher Rechnung: Fuer $f \in D(T)$ gilt wegen $E(I) = 0$ naemlich $\mu_f(I) = 0$ und damit folgt

$$\begin{aligned} \|(T-s)f\|^2 &= \int (t-s)^2 d\mu_f \\ &= \int (t-s)^2 1_{\mathbb{R}\setminus I}(t) d\mu_f(t) \\ &\geq C^2 \int 1_{\mathbb{R}\setminus I} d\mu_f(t) \\ &= C^2\|f\|^2. \end{aligned}$$

Wir wissen schon, dass die Resolventenmenge eines selbstadjungierten T gerade gegeben ist durch diejenigen $s \in \mathbb{R}$, fuer die es ein $c = c(s) > 0$ gibt mit

$$\|(T-s)f\| \geq c\|f\|$$

fuer alle $f \in D(T)$.

Nimmt man diese beiden Aussagen zusammen, so folgt sofort die gewuenschte Behauptung $\sigma(T) = \operatorname{supp}(E)$.

Zur letzten Aussage: Betrachte die Menge $\mathcal{I}$ aller offenen Intervalle $I = (a, b)$ mit rationalen Endpunkten $a < b$ und $I \subset \varrho(T)$ mit $E(I) = 0$. Dann ist $\mathcal{I}$ abzaehlbar und - wegen $\sigma(T) = \operatorname{supp}(E)$ - gilt $\varrho(T) = \cup_{I\in\mathcal{I}} I$. Dann gilt aber fuer jedes $f \in \mathcal{H}$

$$0 \leq \langle f, E(\varrho(T))f\rangle = \mu_f(\varrho(T)) \leq \sum_I \mu_f(I) = \sum_I \langle f, E(I)f\rangle = 0.$$

Da $f \in \mathcal{H}$ beliebig war, folgt $E(\varrho(T)) = 0$. $\square$

4. Der Spektralsatz

In den vorangehenden Abschnitten haben wir

- ausgehende von einem selbstadjungierten Operator T Spektralmasse μ_f^T, Operatoren $\Phi(T)$ und insbesondere das projektionswertige Maß E_T, sowie
- ausgehend von einem projektionswertigen Maß E Maße μ_f^E und Operatoren $E(\Phi)$ definiert.

In diesem Abschnitt fuehren wir diese Betrachtungender der vorangehenden Abschnitte zusammen und erhalten den Spektralsatz.

Lemma (Zusammenhang Spektralscharen und selbstadjungierte Operatoren). *Sei E ein projektionswertiges Maß und T ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann sind aequivaelent:*

(i) $T = E(id)$
(ii) *Es gilt* $(T-z)^{-1} = E(\Phi_z)$ *fuer alle* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *fuer* $\Phi_z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \Phi_z(t) = \frac{1}{t-z}$.
(iii) *Es gilt* $\mu_f^T = \mu_f^E$ *fuer alle* $f \in \mathcal{H}$.
(iv) $E_T = E$.

In diesem Fall gilt $\Phi(T) = E(\Phi)$ *fuer alle beschraenkten meßbaren* T.

Bemerkung. Das Lemma zeigt eine genau Korrespondenz von Groessen, die von T abhaengen zu Groessen, die von E abhaengen.

Beweis. Die Aequivalenz von (i) und (ii) folgt aus der im vorigen Abschnitt gezeigten Berechnung von (Φ_z) als $(E(id) - z)^{-1}$.
Wir zeigen nun die Aequivalenz von (ii) und (iii): Da beschraenkte Maße eindeutig durch ihre Boreltransformation bestimmt sind, gilt $\mu_f^E = \mu_f^T$ genau dann, wenn ihre Boreltransformationen uebereinstimmen, also

$$\int \Phi_z(t) d\mu_f^E = \int \Phi_z(t) d\mu_f^T$$

fuer alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt. Nach Definition ist das genau dann der Fall, wenn

$$\langle f, E(\Phi_z) f \rangle = \langle f, (T-z)^{-1} f \rangle$$

fuer alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt. Mit Polarisation sieht man leicht, dass dies zu

$$E(\Phi_z) = (T-z)^{-1}$$

aquivaelent ist. Das zeigt die genannte Aequivalenz.
Zur Aequivalenz von (iii) und (iv): Es gilt $E_T = E$ genau dann, wenn $\langle f, E_T(A) f \rangle = \langle f, E(A) f \rangle$ gilt fuer alle $f \in \mathcal{H}$ und $A \subset \mathbb{R}$ meßbar. Das ist aber genau dann der Fall, wenn $\mu_f^T = \mu_f^E$ gilt.
Zur letzten Aussage: Es ist $\Phi(T)$ der eindeutige beschraenkte Operator mit

$$\langle f, \Phi(T) f \rangle = \int \Phi d\mu_f^T$$

und $E(\Phi)$ der eindeutige beschraenkte Operator mit

$$\langle f, E(\Phi) f \rangle = \int \Phi d\mu_f^E$$

(jeweils fuer alle f aus dem Hilbertraum). Wege $\mu_f^E = \mu_f^T$ (siehe (iii)) folgt dann die gewuenschte Aussage. □

Theorem (Der Spektralsatz). *Zu jedem selbstadjungierten Operator T gibt es genau ein projektionswertiges Maß E mit*

$$T = E(id) = \int t dE(t).$$

Dieses projektionwertige Maß ist gegeben durch E_T.

Beweis. Nach dem vorangehenden Lemma gilt $T = E(id)$ genau dann, wenn $E = E_T$. Das zeigt Existenz und Eindeutigkeit (und explizite Beschreibung von E als E_T). □

Aus der Beschreibung des Spektrums im vorigen Abschnitt ergibt sich sofort die Folgerung.

FOLGERUNG. *Sei T ein selbstadjungierter Operator. Dann gilt*

$$\sigma(T) = supp(E_T).$$

Beispiel - Multiplikationsoperator. Sei $(X, \mathcal{B}, m)$ ein Maßraum (ohne Atome unendlicher Masse). Sei $\psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ meßbar und M_ψ der zugehoerige maximale Operator der Multiplikation mit ψ. Dann ist M_ψ selbstadjungiert. Wir identifizieren das zugrundeliegende projektionswertige Maß zu M_ψ. Im Prinzip koennen wir die Spektralmaße aus der Stoneschen Formel ausrechnen (und das ist eine gute Uebung). Hier gehen wir einen anderen Weg und praesentieren ein projektionswertiges Maß und zeigen, dass es die gewuenschten Eigenschaften hat.
Sei

$$E : \text{Meßbare Teilmengen von } \mathbb{R} \longrightarrow \text{ Projektionen in } L^2(X, m)$$

definiert durch

$$E(A) := 1_A \circ \psi = 1_{\psi^{-1}(A)}.$$

(Um die Notation zu vereinfachen, identifizieren wir hier die Funktion $1_A \circ \psi$ mit dem Operator der Multiplikation mit dieser Funktion.) Dann ist (offenbar) E ein projektionswertiges Maß. Fuer die zugehoerigen Maße μ_f gilt

$$\mu_f(A) = \langle f, E(A)f\rangle = \int 1_A \circ \psi |f|^2 dm.$$

Dann sieht man fuer beschraenkte meßbare bzw. nichtnegative meßbare $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ durch entsprechenden Grenzuebergang dann

$$\int \Phi d\mu_f = \int \Phi \circ \psi |f|^2 dm.$$

Insbesondere folgt fuer beschraenkte meßbare $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ also

$$\langle f, E(\Phi)f\rangle = \int \Phi d\mu_f = \int \Phi \circ \psi |f|^2 dm = \langle f, M_{\Phi\circ\psi} f\rangle.$$

Damit folgt nach Polarisation

$$E(\Phi) = M_{\Phi\circ\psi}.$$

(Man beachte, dass beide Seiten beschraenkte Operatoren sind.)
Damit koennen wir nun $E(id)$ berechnen:

$$D(E(id)) = \{f : \int |id|^2 d\mu_f < \infty\} = \{f : |\psi f|^2 dm < \infty\} = D(M_\psi)$$

und

$$E(id)f = \lim_n E(\widetilde{id}_n)f = \lim_n (\widetilde{id}_n \circ \psi \cdot f) = \psi f = M_\psi f.$$

Damit gilt also (aufgrund der Eindeutigkeitsaussage im Spektralsatz) $E = E_{M_\psi}$.

Ende der Vorlesung

Wir betrachten nun noch zwei Spezialfaelle:

M_{id} in $L^2(\mathbb{R},\mu)$. Die Spektralschar von M_{id} in $L^2(\mathbb{R},\mu)$ ist gerade gegeben durch

$$E(t) = 1_{(-\infty,t]}.$$

T mit reinem Punktspektrum. Sei T ein selbtadjungierter Operator im Hilbertraum. Es gebe eine Orthonormalbasies e_j, $j \in J$, und $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j \in J$, mit $e_j \in D(T)$ und $Te_j = \lambda_j e_j$.
Wie man sich leicht klarmacht, ist dann

$$U : \ell^2(J) \longrightarrow \mathcal{H}, (c_j) \mapsto \sum_j c_j e_j,$$

unitaer mit

$$T = UM_\lambda U^*,$$

wobei M_λ der Operator der Multiplikation mit $\lambda : J \longrightarrow \mathbb{R}, j \mapsto \lambda_j$ ist. Damit ist dann das Projektionswertige Maß E_T zu T gebeben durch

$$E_T = UE_{M_\lambda}U^*$$

mit dem projektionswertigen Maß E_{M_λ} von M_λ. Wie wir schon wissen, ist dieses gegeben durch

$$E_{M_\lambda}(A) = 1_A \circ \lambda.$$

Damit ist das projektionswertige Maß von T gegeben durch

$$E_T(A) := \text{Projektion auf } \overline{Lin\{e_j : \lambda_j \in A\}}.$$

5. Der Spektraldarstellungsatz

In diesem Abschnitt diskutieren wir einen alternativen Blickpunkt auf das Geschehen der vorangehenden Abschnitte. Das wird insbesondere zeigen, dass jeder selbstadjungierter Operator ein Multiplikationsoperator ist. Das liefert eine abstrakte Form der aus der linearen Algebra bekannten Diagonalisierung einer symmetrische Matrix. Der entsprechende Sachverhalt ist als *Spektraldarstellungssatz* bekannt.

Sei ein selbstadjungierter Operator T im Hilbertraum $\mathcal{H}$ gegeben und E das nach dem Spektralsatz existierende eindeutige projektionswertige Maß mit $T = E(id)$. Dann gilt also

$$\Phi(T) = E(\Phi).$$

Ebenso gilt fuer alle meßbaren $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\langle f, \Phi(T)f\rangle = \int \Phi d\mu_f$$

und

$$\|\Phi(T)f\|^2 = \int |\Phi|^2 d\mu_f$$

fuer alle $f \in D(\Phi(T))$. (Tatsaechlich kann man der zweiten Formel auch fuer alle f Sinn geben, dass naemlich die eine Seite genau dann existiert, wenn die andere Seite existiert.) Wir beginnen nun mit einer einfachen Folgerung der letzten Gleichung.

PROPOSITION. *Sei $f \in \mathcal{H}$. Dann ist die Abbildung*

$$U_f : L^2(\mathbb{R}, \mu_f) \longrightarrow \mathcal{H}, \Psi \mapsto \Psi(T)f,$$

wohldefiniert, linear und isometrisch.

Beweis. Sei $\Psi = \Phi$ in $L^2(\mathbb{R}, \mu_f)$. Dann gilt

$$\|\Phi(T)f - \Psi(T)f\|^2 = \int |\Phi - \Psi|^2 d\mu_f = 0$$

und es folgt $\Phi(T)f = \Psi(T)f$. Damit ist die Abbildung wohldefiniert. Ganz aehnlich sieht man, dass die Abbildung isometrich ist Offenbar ist die Abbildung linear. □

Bemerkung. Es gilt $U_f 1 = f$ und $U_f(\frac{1}{t-z}) = (T-z)^{-1}f$ fuer alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Damit definiert man den *zyklischen Unterraum zu $f \in \mathcal{H}$* als

$$\mathcal{H}_f := U_f(L^2(\mathbb{R}, \mu_f)) = \{\Phi(T)f : \Phi \in L^2(\mathbb{R}, \mu_f).$$

Da U isometrisch und $L^2(\mathbb{R}, \mu_f)$ vollstaendig ist, ist $\mathcal{H}_f$ vollstaendig, also ein abgeschlossenener Teilraum von $\mathcal{H}$. Die Abbildung

$$L^2(\mathbb{R}, \mu_f) \longrightarrow \mathcal{H}_f, \Phi \mapsto U_f\Phi,$$

ist unitaer. Wir werden sie meist ebenfalls mit U_f bezeichnen.

Bemerkung. Da U_f unitaer ist, so ist fuer jeden dichten Unterraum D von $L^2(\mathbb{R}, \mu_f)$ dann $U_f D$ ein dichter Unterraum von $\mathcal{H}_f$. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_f &= \overline{\mathrm{Lin}\{(T-z)^{-1}f : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}} \\ &= \overline{\mathrm{Lin}\ \Phi(T)f\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ meßbar und beschraenkt}\}} \\ &= \overline{\mathrm{Lin}\{E(A)f : \ A \subset \mathbb{R} \text{ meßbar}\}}. \end{aligned}$$

LEMMA (Kleiner Spektraldarstellungssatz). *Sei T ein selbstadjungierter Operator und $f \in \mathcal{H}$ beliebig. Dann ist $U_f : L^2(\mathbb{R}, \mu_f) \longrightarrow \mathcal{H}_f$ die eindeutige Abbildung, die $\frac{1}{\cdot - z}$ auf $(T-z)^{-1}f$ abbildet.*
Es gilt fuer alle beschraenkten messbaren $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ die Gleichung

$$U_f M_\Phi = \Phi(T)U_f.$$

Insbesondere bildet fuer solch ein Φ der Operator $\Phi(T)$ den Raum $\mathcal{H}_f$ in sich selber ab.
Schliesslich gilt

$$U_f M_{id} = TU_f,$$

(d.h. Definitionsbereich und Abbildungsvorschrift von linker und rechter Seite stimmen ueberein).

Bemerkung. Gilt $\mathcal{H}_f = \mathcal{H}$, so ist U_f unitaer und man erhaelt

$$T = U_f M_{id} U_f^*$$

und man hat tatsaechlich den Operator T diagonalisiert.

Beweis. Die *Eindeutigkeit* ist klar, da die Linearkombinationen der Funktionen $\frac{1}{\cdot - z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dicht in $L^2(\mathbb{R}, \mu_f)$ sind.

Zur zweiten Aussage: Es gilt

$$U_f(M_\Phi \Psi) = U_f(\Phi\Psi) = (\Phi\Psi)(T)f = \Phi(T)(\Psi(T)f) = \Phi(T)(U_f\Psi).$$

Da das beschraenkte messbare Ψ beliebig ist, folgt $U_f M_\Phi = \Phi(T)U_f$.
Das 'Insbesondere' ist klar.
Zur letzten Aussage: Aufgrund der zweiten Aussage gilt

$$U_f M_{\frac{1}{id-z}} = (T-z)^{-1} U_f$$

fuer alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Damit folgt die gewuenschte Aussage sinngemaess durch Invertieren. Da der Operator U gar nicht auf dem ganzen Raum invertierbar ist, ist etwas Arbeit zu leisten. Hier sind die Details: Fuer alle $\Phi \in L^2(\mathbb{R}, \mu_f)$ gilt

$$\begin{aligned}
U_f M_{id}(M_{\frac{1}{id-z}}\Phi) &= U_f(M_{id} - z + z)M_{\frac{1}{id-z}}\Phi \\
&= U_f\Phi + zU_f M_{\frac{1}{id-z}}\Phi \\
&= \Phi(T)f + z(T-z)^{-1}\Phi(T)f \\
&= (T-z)(T-z)^{-1}\Phi(T)f + z(T-z)^{-1}\Phi(T)f \\
&= T(T-z)^{-1}\Phi(T)f \\
&= TU_f(M_{\frac{1}{id-z}}\Phi).
\end{aligned}$$

Da jedes Element von $D(U_f M_{id})$ die Form $M_{\frac{1}{id-z}}\Phi$ hat folgt durch Vergleich dann also $U_f M_{id} \subset TU_f$. Gehoert umgekehrt Ψ zum Definitionsbereich von TU_f also $\Psi(T)f$ zum Definitionsbereich von T, so folgt also

$$\infty > \int |id|^2 d\mu_{\Psi(T)f} = \int |id\Psi|^2 d\mu_f.$$

Damit gilt dann also $\Psi \in D(M_{id})$. □

Das vorangehende Lemma besagt, dass man auf den $\mathcal{H}_f$ eigentlich so rechnen darf, als waere T der Operator M_{id}. Setzt man das geeignet zusammen, erhaelt man, dass man T als Operator der Multiplikation darstellen kann. Das ist der folgende Satz.

Ende der Vorlesung

THEOREM (Spektraldarstellungssatz). *Sei T ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann existiert ein Maßraum (X, m) ohne Atome unendlicher Masse und eine unitaere Abbildung $U : L^2(X, m) \longrightarrow \mathcal{H}$ und eine meßbare Funktion $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mit*

$$U^* M_\Phi U = T.$$

Bemerkungen.

- Der Beweis liefert eine explizite Bschreibung von X als disjunkte Vereinigung von Kopien von $\mathbb{R}$.
- Ist $\mathcal{H}$ separabel, so kann X als σ-endlich gewaehlt werden.
- Im Unterschied zum kleinen Spektralsatz ist die vorkommende Abbildung U unitaer auf ganz $\mathcal{H}$.

Beweis. Mit dem Zornschen Lemma zeigt man die Existenz einer maximalen Familie $\mathcal{F}$ von nichtverschwindenden Elementen von $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{H}_f \perp \mathcal{H}_g$ fuer $f, g \in \mathcal{F}$ mit $f \neq g$. Dann gilt

$$\mathcal{H} = \oplus_{f \in \mathcal{F}} \mathcal{H}_f.$$

(Andernfalls koennte man ein $0 \neq h \in \oplus \mathcal{H}_f$ finden. Dann gilt fuer alle $f \in \mathcal{F}$ und alle beschraenkten meßbaren $\Phi, \Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dann

$$\langle \Phi(T)h, \Psi(T)f \rangle = \langle h, \Phi(T)^* \Psi(T)f \rangle = \langle h, (\overline{\Phi}\Psi)(T)f \rangle = 0.$$

Das zeigt dann, dass $\{0\} \neq \mathcal{H}_h \perp \mathcal{H}_f$ fuer alle $f \in \mathcal{F}$. Das ist ein Widerspruch zur Maximalitaet.) Sei nun

$$X := \mathcal{F} \times \mathbb{R}$$

ausgestattet mit der σ-Algebra, die von Mengen der Form $\{f\} \times A$ fuer $A \subset \mathbb{R}$ meßbar, $f \in \mathcal{F}$, erzeugt wird, und dem Maß m, dass auf $\{f\} \times \mathbb{R}$ gerade durch μ_f gegeben ist. Dann ist in natuerlicher Weise

$$L^2(X, m) \simeq \oplus_{f \in \mathcal{F}} L^2(\mathbb{R}, \mu_f).$$

Wir weren diese unitaere Abbildung im folgenden nicht weiter notieren.
Sei U definiert durch

$$U := \oplus_{f \in \mathcal{F}} U_f : \oplus_{f \in \mathcal{F}} L^2(\mathbb{R}, \mu_f) = L^2(X, m) \longrightarrow \oplus_{f \in \mathcal{F}} \mathcal{H}_f = \mathcal{H}.$$

Dann ist U unitaer. Weiterhin gilt nach dem 'kleinen Spektraldarstellungssatz' also

$$U M_{\frac{1}{id - z}} = (T - z)^{-1} U.$$

Damit folgt dann

$$M_{\frac{1}{id - z}} = U^* (T - z)^{-1} U.$$

Das liefert dann durch Invertieren tatsaechlich

$$M_{id} = U^* T U.$$

Das ist die gewuenschte Aussage. □

Bemerkung. Aus dem vorigen Satz und unseren Erwaegungen zu Multiplikationsoperatoren kann man den Spektralsatz herleiten. Genauer schließt man Existenz eines projektionswertigen Maßes zu T auf folgende Art: Sei T ein selbstadjungierter Operator und ein Maßraum (X, m) und ein meßbares $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben mit $T = U^* M_\Phi U$ fuer ein unitaeres $U : \mathcal{H} \longrightarrow L^2(X, m)$. Dann definiert man

$$E(A) := U^* M_{1_A \circ \Phi} U.$$

Man sieht dann leicht, dass E ein projektionswertiges Maß ist und kann dann mit einem einfachen Grenzuebergang

$$\langle f, E(\Psi) f \rangle = \langle U f, \Psi \circ \Phi U f \rangle$$

fuer alle meßbaren beschraenkten $\Psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ folgern.

KAPITEL 4

Spektrum und spektrale Zerlegungen

Wir untersuche einige Folgerungen aus dem Spektralsatz. Sei T ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Wir kennen schon die Charakterisierung des Spektrums mit dem zugehoerigen projektionswertigen Maß E als

$$\sigma(T) = \mathrm{supp}(E).$$

Uns wird es nun um feinere Zerlegungen gehen.

Wir machen uns noch folgendes klar: Sei T selbstadjungiert im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit zugehoerigem projektionswertigem Maß E. Dann gilt fuer $f \in \mathcal{H}$ und $A \subset \mathbb{R}$

$$\mu_{E(A)f} = 1_A \mu_f$$

und insbesondere

$$f = E(A)f \Longleftrightarrow \mu_f(\mathbb{R} \setminus A) = 0 \Longleftrightarrow \mu_f = 1_A \mu_f.$$

Fuer $f, g \in \mathcal{H}$ und meßbare $A, B \subset \mathbb{R}$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $\langle E(A)f, E(B)g \rangle = 0$.

1. Spektrum, Eigenwerte und wesentliches Spektrum

Wir untersuchen hier eine relative 'grobe' Zerlegung des Spektrums.

Wir beginnen mit einer Charakterisierung der Eigenwerte mit der Spektralschar.

Lemma (Charakterisierung Eigenwerte). *Sei T ein selbstadjungierter Operator mit zugehoerigem projektionswertigem Maß E. Dann ist ein $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von T genau dann, wenn $E(\{\lambda\}) \neq 0$ gilt. In diesem Fall ist $Ran(E(\{\lambda\})$ der Eigenraum von λ.*

Beweis. Offenbar gehoert $E(\{\lambda\})f$ zu $D(T)$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\|TE(\{\lambda\})f - \lambda E(\{\lambda\})f\|^2 &= \|(T-\lambda)E(\{\lambda\})f\|^2 \\
&= \int (id - \lambda)^2 d\mu_{E(\{\lambda\})f} \\
&= \int (id - \lambda)^2 1_{\{\lambda\}} d\mu_f \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Gilt also $E(\{\lambda\}) \neq 0$, so ist λ ein Eigenwert von T und $Ran(E(\{\lambda\})$ gehoert zum Eigenraum von λ.
Sei umgekehrt λ ein Eigenwert von T und f ein zugehoeriger Eigenvektor. Dann ist nach dem schon gezeigten auch $E(\{\lambda\})f$ ein Eigenvektor zu λ. Damit gilt also

$$0 = (T - \lambda)(f - E(\{\lambda\})f) = E(\mathbb{R} \setminus \{\lambda\})f.$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \|(T-\lambda)(E(\mathbb{R}\setminus\{\lambda\})f)\|^2 \\ &= \int (id-\lambda)^2 1_{\mathbb{R}\setminus\{\lambda\}} d\mu_f \end{aligned}$$

Damit muss also gelten $\mu_f(\mathbb{R}\setminus\{\lambda\}) = 0$ und es folgt $f = E(\{\lambda\})f$. □

FOLGERUNG. *Sei T selbstadjungiert und λ ein isolierter Punkt des Spektrums, so ist λ ein Eigenwert.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$(\lambda-\delta, \lambda+\delta) \cap \sigma(T) = \{\lambda\}.$$

Insbesondere gilt also

$$(\lambda-\delta, \lambda) \cap \sigma(T) = \emptyset = \sigma(T) \cap (\lambda, \lambda+\delta).$$

Mit $\sigma(T) = \operatorname{supp}(E)$ folgt dann

$$E(\lambda-\delta, \lambda) = 0 = E(\lambda, \lambda+\delta) \text{ und } E(\lambda-\delta, E\lambda+\delta) \neq 0.$$

Das liefert

$$E(\{\lambda\}) = E(\lambda-\delta, \lambda+\delta) \neq 0.$$

Nun folgt die Aussage aus dem vorigen Lemma. □

Beispiel. Sei P eine orthogonale Projektion im Hilbertraum. Dann ist das Spektrum von P gegeben durch 1 und (falls $P \neq I$) noch durch 0. Insbesondere ist also 1 ein isolierter Punkt des Spektrum. Der Eigenraum zu 1 ist gerade das Bild von P. Insbesondere hat der Eigenwert 1 genau dann endliche Vielfachheit, wenn das Bild von P endlich dimensional ist.

Nach der vorangehenden Folgerung sind, isolierte Punkte des Spektrums des selbstadjungierten Operator T Eigenwerte. Dabei koennen zwei Situationen auftreten (vgl. Beispiel): Eigenwerte endlicher Vielfachheit und Eigenwerte unendlicher Vielfachheit. Darauf aufbauend kann man das Spektrum zerlegn: Das *diskrete Spektrum* $\sigma_{disc}(T)$ besteht aus den isolierten Eigenwerten endlicher Vielfachheit. Das Komplemeent $\sigma_{ess}(T) := \sigma(T) \setminus \sigma_{disc}(T)$ wird *wesentliches Spektrum* genannt. Nach Konstruktion gilt

$$\sigma(T) = \sigma_{disc}(T) \cup \sigma_{ess}(T),$$

woebei die Vereinigung disjunkt ist. Nach Definition ist $\sigma_{ess}(T)$ abgeschlossen. (Denn ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma_{ess}(T)$ gehoert entweder zur offenen Resolventenmenge oder ist ein isolierter Eigenwert endlicher Vielfachheit. In jedem Fall hat λ eine offenen Umgebung, die nicht zu $\sigma_{ess}(T)$ gehoert.)

Ende der Vorlesung

PROPOSITION. *Sei T selbstadjungiert mit zugehoerigem projektionswertigem Maß E. Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Interval mit $dim E(I) < \infty$, so gibt es eine endliche Teilmenge S von I mit $E(A) = E(I)$ und $E(\{s\}) \neq 0$ fuer jedes $s \in S$. Insbesondere sind also alle Elemente von S Eigenwerte und es gilt $\sigma(T) \cap I = S$.*

Beweis. Sei $N := \dim E(I)$. Sei

$$S := \{s \in I : E(s-\delta, s+\delta) \neq 0 \text{fuer alle } \delta > 0\}.$$

Dann kann S nicht mehr als N Elemente haben (weil die Dimension von E bei jedem Element von S um mindestens 1 springt. Da I ein offenes Interval ist, gilt nach Konstruktion und wegen $\text{supp}(E) = \sigma(T)$ dann aber $\sigma(T) \cap I = S$. Nun folgen die Aussagen sofort aus der vorigen Folgerung. □

THEOREM (Wesentliches Spektrum via E). *Sei T ein selbstadjungierter Operator mit zugehoerigem projektionswertigem Maß E. Dann gilt*

$$\sigma_{disc}(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : 0 < dim E(\lambda-\delta, \lambda+\delta) < \infty \textit{ fuer alle genuegend kleinen } \delta > 0\}$$

und

$$\sigma_{ess}(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : dim E((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)) = \infty \textit{ fuer alle } \varepsilon > 0\}.$$

Beweis. Es reicht die erste Aussage zu zeigen.
Nach dem vorangehenden Lemma und der Charakterisierung des Spektrums folgt fuer alle isolierten Eigenwerte λ endlicher Vielfachheit

$$0 < dim E(\{\lambda\}) = dim E(\lambda-\delta, \lambda+\delta) < \infty$$

fuer alle genuegend kleinen $\delta > 0$.
Sei umgekehrt zu $\lambda \in \mathbb{R}$ ein solches $\delta > 0$ gegeben. Dann muss gelten

$$0 < \dim E(\{\lambda\}) < \infty$$

und es ist das Bild von $E(\{\lambda\})$ der endlichdimensionale Eigenraum zu λ. □

2. Die spektralen Typen

Wir kommen nun zu einer feineren Unterteilung des Spektrums nach sogenannten *spektralen Typen.*

Wir erinnern zunaechst an die Lebesguezerlegung eines endlichen Masses μ auf $\mathbb{R}$. Diese ist die eindeutige Zerlegung

$$\mu = \mu_{pp} + \mu_{sc} + \mu_{ac}$$

sodaß gilt:

- μ_{pp} ist ein reines Punktmass,
- μ_{sc} ist singular bzgl. Lebesguemass (d.h. auf einer Lebesgue-Nullmenge getragen) und stetig (d.h. hat keine Punktanteile),
- μ_{ac} ist absolut stetig bzgl. des Lebesguemasses (d.h. gibt das Mass 0 zu Lebesgue-Nullmengen).

Es gilt

$$\mu_{pp} = 1_D\mu, \mu_{sc} = 1_N\mu \text{ und } \mu_{ac} = 1_{\mathbb{R}\setminus(D\cup N)}\mu.$$

Dabei ist $D := \{\lambda \in \mathbb{R} : \mu(\{\lambda\}) > 0\}$ und N eine geeignete Lebesguenullmenge (im Komplement von D).

Bemerkung - Notation. Es steht *pp* fuer 'pure point', *sc* fuer 'singular continuous' und *ac* fuer 'absolutely continuous'.

Ist nun T ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann definiert man die *spektralen Teilraeume*[1] gemaess

[1] Wir werden gleich sehen, dass es sich tatsaechlich um Unterraeume handelt.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{pp} &:= \{f \in \mathcal{H} : \mu_f \text{ ist reines Punktmass}\},\\ \mathcal{H}_{sc} &:= \{f \in \mathcal{H} : \mu_f \text{ ist singular bgzl. Lebesguemass und stetig}\},\\ \mathcal{H}_{ac} &:= \{f \in \mathcal{H} : \mu_f \text{ ist absolut stetig bgzl. Lebesguemass}\}.\end{aligned}$$

Die Lebesguezerlegung eines Masses fuehrt auf eine entsprechende Zerlerung des Hilbertraumes und des Operators.

Theorem (Zerlegung in spektrale Teilraeume). *Sei T ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Spektralschar E. Dann sind die spektralen Teilraeume $\mathcal{H}_\bullet$, $\bullet \in \{pp, sc, ac\}$ abgeschlossene Unterraeume von $\mathcal{H}$ mit*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{sc} \oplus \mathcal{H}_{ac}.$$

Weiterhin ist jeder dieser Unterraeume invariant unter E (d.h. es gilt $E(A)\mathcal{H}_\bullet \subset \mathcal{H}_\bullet$ fuer jedes meßbare $A \subset \mathbb{R}$) und die Einschraenkung $E_\bullet$ von E auf $\bullet$ ist ein projektionswertiges Maß mit

$$E = E_{pp} \oplus E_{sc} \oplus E_{ac}$$

und es gilt

$$T = T_{pp} \oplus T_{sc} \oplus T_{ac}$$

mit $T_\bullet = E_\bullet(id)$.

Beweis. Es ist einiges zu zeigen:

Die spektralen Teilraeume sind Unterraeume. Das folgt leicht aus

$$\mu_{f+g} \leq 2\mu_f + 2\mu_g \text{ und } \mu_{\alpha f} = |\alpha|^2 \mu_f.$$

Die spektralen Teilraeume sind abgeschlossen. Das folgt leicht aus folgender Beobachtung: Ist (f_n) eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $f_n \to f$, so gilt

$$\mu_{f_n}(A) = \langle f_n, E(A) f_n \rangle \to \langle f, E(A) f \rangle = \mu_f(A)$$

fuer alle messbaren $A \subset \mathbb{R}$. Insbesondere folgt aus $\mu_{f_n}(A) = 0$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$ dann $\mu_f(A) = 0$. Damit laesst sich die Abgeschlossenheit jedes Teilraumes einzeln zeigen:

Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{H}_{pp}$ mit $f_n \to f$. Setze

$$D := \{\lambda \in \mathbb{R} : \mu_{f_n}(\{\lambda\}) > 0 \text{ fuer ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

(Das ist gerade die Vereinigung der Mengen der Atome der μ_{f_n}.) Dann ist D abzaehlbar und es gilt

$$\mu_f(\mathbb{R} \setminus D) = \lim_n \mu_{f_n}(\mathbb{R} \setminus D) = 0.$$

Damit ist μ_f ein reines Punktmass.

Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{H}_{sc}$ mit $f_n \to f$. Sei zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Lebesguenullmenge N_n gewaehlt mit $\mu_{f_n}(\mathbb{R} \setminus N_n) = 0$. Setze $N := \cup_n N_n$. Dann ist N eine Lebesguenullmenge und es gilt

$$\mu_f(\mathbb{R} \setminus N) = \lim_n \mu_{f_n}(\mathbb{R} \setminus N) = 0.$$

Weiterhin gilt fuer jedes $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mu_f(\{\lambda\}) = \lim_n \mu_{f_n}(\{\lambda\}) = 0.$$

Damit ist dann insgesamt μ_f als singulaer stetig nachgewiesen.

Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{H}_{ac}$ mit $f_n \to f$. Sei A eine Lebesguenullmenge. Dann gilt

$$\mu_f(A) = \lim_n \mu_{f_n}(A) = 0.$$

Damit ist also μ_f absolut stetig.

Die spektralen Teilraeume sind paarweise orthogonal. Wir beginnen mit einer Vorueberlegung: Fuer $f, g \in \mathcal{H}$ mit $f = E(A)f$ gilt

$$|\langle f, g\rangle = |\langle E(A)f, g\rangle| = |\langle f, E(A)g\rangle| \leq \|f\|\sqrt{\mu_g(A)}.$$

Wir zeigen nun
$\mathcal{H}_{pp} \perp \mathcal{H}_{ac}, \mathcal{H}_{sc}$ und dann $\mathcal{H} \perp \mathcal{H}_{ac}$.
Sei $f \in \mathcal{H}_{pp}$ gegeben. Dann gilt also fuer eine abzaehlbare Menge $D \subset \mathbb{R}$ $\mu_f = 1_D \mu_f = \mu_{E(D)f}$ und damit $f = E(D)f$. Damit folgt dann nach der Vorueberlegung fuer jedes beliebige $g \in \mathcal{H}$

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\sqrt{\mu_g(D)}.$$

Fuer $g \in \mathcal{H}_{sc}$ und $g \in \mathcal{H}_{ac}$ gilt aber $\mu_g(D) = 0$ und es folgt fuer solche g dann

$$\langle f, g\rangle = 0.$$

Sei nun $g \in \mathcal{H}_{sc}$ gegeben. Dann existiert also (vgl. Begruendung zu $f \in \mathcal{H}_{pp}$) eine Lebesguenullmenge N mit $g = E(N)g$. Dann folgt aus der Vorueberlegung

$$|\langle g, h\rangle| \leq \|g\|\sqrt{\mu_h(N)}$$

fuer jedes $h \in \mathcal{H}$. Fuer $h \in \mathcal{H}_{ac}$ gilt aber $\mu_h(N) = 0$ und es folgt fuer solche h dann

$$\langle g, h\rangle = 0.$$

Es gilt $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{sc} \oplus \mathcal{H}_{ac}$. Nach dem schon gezeigten sind die spektralen Teilraeume abgeschlossene paarweise orthogonale Unterraeume. Damit folgt $\supset$. Weiterhin koennen wir fuer jedes $f \in \mathcal{H}$ das zugehoerigen Spektralmaß μ_f schreiben als

$$\mu_f = 1_D \mu_f + 1_N \mu_f + 1_{\mathbb{R}\setminus(D\cup N)}\mu_f$$

mit abzaehlbarem D und einer Lebesguenullmenge N, so dass gilt

$$1_D \mu_f = (\mu_f)_{pp}; 1_N \mu_f = (\mu_f)_{sc}; _{\mathbb{R}\setminus(D\cup N)} \mu_f = (\mu_f)_{ac}.$$

Dann gilt aber $E(1) = E(D) + E(N) + E(\mathbb{R} \setminus (D \cup N)$ und damit folgt

$$f = E(D)f + E(N)f + E(\mathbb{R} \setminus (D \cup N))$$

und nach der Dichteformel gilt

$$\mu_{E(D)f} = 1_D \mu_f, \mu_{E(N)f} = 1_N \mu_f, \mu_{E(\mathbb{R}\setminus(D\cup N))} f = 1_{\mathbb{R}\setminus(D\cup N)}\mu_f.$$

Damit folgt die gewuenschte Aussage.

Es gilt $E(A)\mathcal{H}_\bullet \subset \mathcal{H}_\bullet$ fuer jedes meßbare $A \subset \mathbb{R}$. Sei $f \in \mathcal{H}_\bullet$ und $A \subset \mathbb{R}$ meßbar gegeben. Dann gilt nach der Dichteformel

Ende der Vorlesung

$$\mu_{E(A)f} = 1_A \mu_f \leq \mu_f.$$

Damit folgt die Aussage sofort.

Nach der vorigen Aussage kann man das projektionswertige Maß E auf die einzelnen Teilraeume einschraenken. Seien

$$E_\bullet : \mathcal{H}_\bullet \longrightarrow \mathcal{H}_\bullet$$

die entsprechenden Einschraenkungen. Dann sieht man sofort, dass jedes $E_\bullet$ ein projektionswertiges Maß auf dem Teilraum $\mathcal{H}_\bullet$ ist (da E ein projektoinswertiges Maß ist). Damit ist dann $T_\bullet := E_\bullet(id)$ ein selbstadjungierte Operator auf $\mathcal{H}_\bullet$. Damit wird dann

$$\widetilde{T} := T_{pp} \oplus T_{sc} \oplus T_{ac}$$

ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{sc} \oplus \mathcal{H}_{ac} = \mathcal{H}$. Es ist nicht schwer zu sehen, dass $\widetilde{T} \subset T$ gilt. Da T und $\widetilde{T}$ selbstadjungiert sind, folgt $T = \widetilde{T}$. $\square$

Bemerkung. Es ist nicht schwer zu zeigen, aber ausgesprochen bemerkenswert, dass fuer $f_n \to f$ die Konvergenz $\mu_{f_n}(A) \to \mu_f(A)$ fuer alle meßbaren $A \subset \mathbb{R}$ gilt. Ueblicherweise konvergiert eine Folge von Maßen meist nur in viel schwaecheren Arten.

FOLGERUNG. *Sei die Situation aus dem vorigen Theorem gegeben. Dann gilt fuer jedes meßbare $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dann*

$$\Phi(T) = \Phi(T_{pp}) \oplus \Phi(T_{sc}) \oplus \Phi(T_{ac}).$$

Beweis. Das ist klar fuer Funktionen der Form $\Phi = 1_A$ mit $A \subset \mathbb{R}$ meßbar und folgt dann sofort fuer endliche Linearkombinationen d.h. Elementarfunktionen und dann durch entsprechende Grenzwertbildung fuer beliebiges meßbares Φ. $\square$

Notation. Die Zerlegung von $\mathcal{H}$ und T aus dem vorangehenden Theorem heißt *spektrale Zerlegung.*

Das Studium der spektralen Zerlegungen ist ein wesentlicher Teil der Untersuchung selbstadjungierter Operatoren. Von besonderem Interesse sind Operatoren, deren Spektralmaße alle (auf einem Intervall) denselben Typ haben.

DEFINITION (Reines ac / sc / pp Spektrum). *Sei T ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann hat T auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ rein absolut stetiges Spektrum / rein singular stetiges Spektrum/ reines Punktspektrum wenn $1_I \mu_f$ fuer alle $f \in \mathcal{H}$ ein reines ac / sc / pp Maß ist. Gilt dies fuer $I = \mathbb{R}$, so hat der Operator T reine absolut stetiges Spektrum / rein singulaer stetiges Spektrum / reines Punktspektrum.*

Beispiel - Operatoren mit reinem Punktspektrum. Sei T selbstadjungiert. Dann ist jedes Spektralmaß ein reines Punktmaß genau dann, wenn es eine Orthonormalbasis e_j, $j \in J$, in $D(T)$ und $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j \in J$ mit $Te_j = \lambda_j e_j$ gibt. (Das von uns vorher eingefuehrte Konzept von Operator mit reinem Punktspektrum stimmt also mit dem neuen Konzept ueberein.)
Beweis: Es gebe seine solche ONB. Dann gilt (s.o.) also

$$E(A) = \text{Projektion auf} \overline{\text{Lin}\{e_j : \lambda_j \in A\}}$$

fuer jedes meßbare $A \subset \mathbb{R}$. Damit folgt dann

$$\mu_f(A) = \sum_{j:\lambda_j \in A} |\langle f, e_j\rangle|^2 = \sum_{j \in I} |\langle f, e_j\rangle \delta_{\lambda_j}(A).$$

Damit ist jedes μ_f ein reines Punktmaß.

Es sei jedes μ_f ein reines Punktmaß. Sei

$$D := \{\lambda \in \mathbb{R} : \text{ es existiert } f \in \mathcal{H} \text{ mit } \mu_f(\{\lambda\}) > 0\}.$$

Dann gilt also $E(\{\lambda\}) \neq 0$ fuer jedes $\lambda \in D$. Damit ist also jedes $\lambda \in D$ ein Eigenwert. Sei $g \perp Ran(E(\{\lambda\})$ fuer alle $\lambda \in D$. (Zu zeigen $g = 0$.) Dann gilt

$$\|g\|^2 = \int d\mu_g = \sum_{\lambda \in D} \mu_g(\{\lambda\}) = \sum_{\lambda \in D} \langle g, E(\{\lambda\})g\rangle = 0.$$

(Dabei folgt die zweite Gleichheit, da μ_g eine reines Punktmaß ist; die letzte Gleichung folgt aus der Orthogonalitaetsvorraussetzung.)

Beispiel - Operator mit rein absolut stetigem Spektrum. Sei $\psi : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, \infty), \psi(k) = |k|^2$. Dann hat der maximale Operator der Multiplikaton mit ψ in $L^2(\mathbb{R}^N, \lambda)$ rein absolut stetiges Spektrum.

Bew. Es gilt nach einer Substitution in Kugelkoordinaten

$$\mu_f(A) = \int 1_A(|k|^2)|f(k)|^2 dk = \int_0^\infty 1_A(r^2) g(r) dr$$

mit einer geeigneten Funktion g. Mittels einer weiteren Substitution sieht man aber leicht, dass dieses Maß absolut stetig bzgl. des Lebesguemasses ist.

Die Relevanz dieses Beispiels kommt daher, dass $-\Delta = F M_\psi F^*$ gilt mit der (unitaeren) Fouriertransformation. Damit ist also $-\Delta$ ein Operator mit rein absolut stetigem Spektrum.

Beispiel - Operatoren mit rein singulaer stetigem Spektrum. Sei μ ein bescraenktes singulaer stetiges Maß auf $\mathbb{R}$. Dann hat der Operator M_{id} der Multiplikation mit $id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t$, rein singulaer stetiges Spektrum. Denn es gilt fuer alle meßbaren $A \subset \mathbb{R}$

$$\mu_f(A) = \int 1_A(t)|f(t)|^2 d\mu$$

und damit folgt $\mu_f = |f|^2\mu$ und es ist μ_f absolut stetig.

Bemerkung. Lange Zeit herrschte die Vorstellung, dass die 'ueblichen' Operatoren kein singulaer stetiges Spektrum haben. (So ist ja auch schon die Konstruktion eines singulaerstetigejn Maßes nichttrivial.) Seit Ende der 80er/ Anfang der 90 er Jahre kennt man eine grosse Fuelle an 'natuerlichen' Beispielen.

3. Zum unteren (und oberen) Rand des Spektrums

Hier untersuchen wir den unteren Rand des Spektrums. Aus mathematischer Sicht wuerde man natuerlich gerne ueber das Ganze Spektrum etwas wissen. Eine Information ueber den unteren Rand ist dann zumindest ein bescheidener Anfang. Aus physikalischer Sicht ist der untere Rand besonders interessant, wenn das Spektrum die Energie des Systems beschreibt. Dann entspricht der untere Rand gerade der Grundzustandsenergie.

Sei T ein selbstadjungierter Operator. Dann gilt wegen $\sigma(T) = \operatorname{supp}(E)$ auf jeden Fall

$$\inf \sigma(T) = \inf \operatorname{supp}(E).$$

Diese (einfache) Beobachtung ist grundlegend fuer das weitere Vorgehen.

PROPOSITION. *Sei T ein selbstadjungierter Operator. Dann sind fuer $\lambda \in \mathbb{R}$ aquivalent:*

(i) $\lambda \leq \inf \sigma(T)$.
(ii) *Es gilt $\langle f, Tf \rangle \geq \lambda \|f\|^2$ fuer alle $f \in D(T)$.*

Insbesondere gilt

$$\inf \sigma(T) = \sup\{\lambda : \langle f, Tf \rangle \geq \lambda \|f\|^2 \text{ fuer alle } f \in D(T)\}$$

falls $\inf \sigma(T) > -\infty$.

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Sei $f \in D(T)$ beliebig. Dann gilt offenbar

$$\lambda^f := \inf \operatorname{supp}(\mu_f) \geq \inf \operatorname{supp}(E) = \inf \sigma(T) \geq \lambda.$$

Damit folgt dann

$$\langle f, Tf \rangle = \int t d\mu_f \geq \lambda^f \int d\mu_f = \lambda^f \|f\|^2 \geq \lambda \|f\|^2.$$

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Angenommen es gibt ein λ' im Spektrum von $\sigma(T)$ mit $\lambda' < \lambda$. Waehle nun $\varepsilon > 0$ mit $\lambda' + \varepsilon < \lambda$. Es gilt nun nach der Charakterisierung des Spektrum aber $E(\lambda' - \varepsilon, \lambda' + \varepsilon) \neq 0$. Damit gibt es also ein $f \in \mathcal{H}$ mit $\|f\| = 1$ und $f = (\lambda' - \varepsilon, \lambda' + \varepsilon) f$. Damit folgt dann

$$\langle f, Tf \rangle = \int t d\mu_f(t) = \int 1_{(\lambda'-\varepsilon, \lambda'+\varepsilon)}(t) t d\mu_f(t) \leq (\lambda' + \varepsilon)\|f\|^2 < \lambda \|f\|^2.$$

Das ist ein Widerspruch.

Die letzte Aussage ist klar. Das beendet den Beweis. $\square$

Notation. Wir schreiben $T \geq \lambda$, wenn $\langle f, Tf \rangle \geq \lambda \|f\|^2$ fuer alle $f \in D(T)$ gilt.

THEOREM (Rayleigh-Ritz Variationsprinzip : Charakterisierung $\inf \sigma(T)$). *Sei T ein selbstadjungierter Operator und $\lambda_0 := \inf \sigma(T)$. Dann gilt*

$$\lambda_0 = \inf\{\langle f, Tf \rangle : f \in D(T), \|f\| = 1\}.$$

Beweis. Wir zeigen zwei Ungleichungen.

Die Ungleichung $\leq$: Gilt $-\infty < \lambda_0$, so folgt $\leq$ aus der vorigen Proposition. Andernfalls ist es sowieso klar.

Aus $\lambda_0 \in \sigma(T)$ und, da es keinen kleineren Wert in $\sigma(T)$ gibt, folgt $E([\lambda_0, \lambda_0 + \delta)) \neq 0$ fuer alle $\delta > 0$. Sei nun f aus dem Hilbertraum mit $\|f\| = 1$ und $f = E([\lambda_0, \lambda_0 + \delta))f$ gewaehlt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle f, Tf \rangle &= \int t d\mu_f(t) \\
&= \int t d\mu_{E([\lambda_0, \lambda_0+\delta)]f} \\
&= \int 11_{[\lambda_0, \lambda_0+\delta)}(t) d\mu_f \\
&\leq (\lambda_0 + \delta) \int d\mu_f \\
&= (\lambda_0 + \delta).
\end{aligned}$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt die gewuenschte Ungleichung. $\square$

Ende der Vorlesung.

THEOREM (Charakterisierung $\inf \sigma_{ess}(T)$). *Sei T selbstadjungiert mit $\inf \sigma(T) > -\infty$. Dann gilt $\lambda = \inf \sigma_{ess}(T)$ genau dann, wenn fuer alle $\varepsilon > 0$ gilt*

- *$dim E(-\infty, \lambda - \varepsilon) < \infty$ und*
- *$dim E(-\infty, \lambda + \varepsilon) = \infty$.*

Beweis. Sei $\lambda = \inf \sigma_{ess}(T)$. Nach Charakaterisierung von $\sigma_{ess}(T)$ gilt fuer jedes $\varepsilon > 0$ $\dim(E(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) = \infty$. Weiterhin liegt unterhalb von λ kein wesentliches Spektrum. Es enthaelt also $(-\infty, \lambda - \varepsilon]$ nur isolierte Eigenwerte endlicher Vielfachheit. Weiterhin sind liegen natuerlich alle Eigenwerte von T im Intervall $[\inf \sigma(T), \infty)$. Damit kann es in $[-\infty, \lambda - \varepsilon]$ nur endlich viele Eigenwerte geben (da diese sonst einen Haeufungspunkt haben muessten.) Damit folgt dann $\dim E(-\infty, \lambda - \varepsilon) < \infty$.

Es habe umgekehrt λ die angegegbenen Eigeschaften. Dann gilt also $\dim E(\lambda - \varepsilon \, \lambda + \varepsilon) = \infty$ und es folgt aus der Charakterisierung von $\sigma_{ess}(T)$ dann $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$. Aus $\dim E(-\infty, \lambda - \varepsilon) < \infty$ und der Charakterisierung von $\sigma_{ess}(T)$ folgt ausserdem, dass $(-\infty, \lambda - \varepsilon)$ keine Punkte von $\sigma_{ess}(T)$ enthaelt. Damit ist λ das gesuchte Infimum. $\square$

Bemerkung. Es gehoert $\inf \sigma_{ess}(T)$ zu $\sigma_{ess}(T)$. Das wurde in obigem Beweis mit gezeigt und ist auch leicht direkt zu sehen, da σ_{ess} abgeschlossen ist.

Das spektrale Verhalten unterhalb des Infimum des wesentlichen Spektrum, laesst sich gut beschreiben.

THEOREM (Min-Max-Prinzip). *Sei T ein selbstadjungierter Operator mit $\inf \sigma(T) > 0$. Dann definiert man*

$$\lambda_1 := \inf_{f \in D(T) : \|f\| = 1} \langle f, Tf \rangle$$

und

$$\lambda_{n+1} := \sup_{f_1, \ldots, f_n} \inf_{f \in D(T) : f \perp f_1, \ldots, f_n} \langle f, Tf \rangle.$$

Dann gilt $\lambda_n \nearrow \inf \sigma_{ess}(T)$ und die λ_n mit $\lambda_n < \inf \sigma_{ess}(T)$ (falls es solche gibt) sind gerade die mit Vielfachheit gezaehlten aufsteigenden Eigenwerte von T unterhalb von $\inf \sigma_{ess}(T)$.

Beweis. Sei $\lambda_{ess} := \inf \sigma_{ess}(T) > -\infty$ Wir unterscheiden zwei Faelle.

Fall 1: $N := dim(E(-\infty, \lambda_{ess})) = \infty$. Unterhalb von λ_{ess} liegen nach Definition nur isolierte Eigenwerte endlicher Vielfachheit. Aufgrund der Voraussetzung gibt es solche tataechlich. Insbesondere ist $\inf \sigma(T)$ ein solcher Eigenwert. Seien diese Eigenwerte aufsteigent (mit Vielfacheit) als $\widetilde{\lambda}_n$, $n \in \mathbb{N}$, bezeichnet. Weiterhin seien zugehoerige Eigenfunktionen e_n, $n \in \mathbb{N}$, gewaehlt. Dann ist also e_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Orthonormalbasis von $Ran(E(-\infty, \lambda_{ess})))$. Wir zeigen nun, dass λ_N gerade $\widetilde{\lambda}_N$, d.h. der N-te Eigenwert unterhalb des wesentlichen Spektrums ist. Dazu zeigen wir zwei Ungleichungen.
Es gilt fuer jedes $f \perp e_1, \ldots, e_N$ dann

$$\begin{aligned}
\langle f, Tf \rangle &= \langle f, E(-\infty, \lambda_{ess})Tf \rangle + \langle f, E[\lambda_{ess}, \infty)Tf \rangle \\
&= \sum_n \lambda_n |\langle f, e_n \rangle|^2 + \int id d\mu_{E[\lambda_{ess}, \infty)f} \\
&\geq \widetilde{\lambda}_{N+1} \sum_n |\langle f, e_n \rangle|^2 + \widetilde{\lambda}_{N+1} \int d\mu_{E[\lambda_{ess}, \infty)f} \\
&= \widetilde{\lambda}_{N+1} \|f\|^2.
\end{aligned}$$

Das zeigt, $\lambda_{N+1} \geq \overline{\lambda}_{N+1}$.
Sind umgekehrt $f_1, \ldots, f_N$ beliebig gegeben. So gibt es ein $f \in \mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_{N+1}\}$ mit $f \perp f_1, \ldots, f_n$ und $\|f\| = 1$. Dann gilt fuer dieses f aber

$$\langle f, Tf \rangle = \sum_{j=1}^{N+1} |\langle e_j, f \rangle|^2 \overline{\lambda}_j \leq \overline{\lambda}_{N+1}.$$

Damit folgt also

$$\lambda_{N+1} \leq \overline{\lambda}_{N+1}.$$

Das zeigt die gewuenschte Aussage im Fall 1.

Fall 2: $N := dim(E(-\infty, \lambda_{ess})) < \infty$. Dann zeigt man mit aehnlichen Argumenten wie im ersten Fall, dass die $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ gerade die Eigenwerte Unterhalb des wesentlichen Spektrums sind. Weiterhin sieht man leicht, dass dann $\lambda_{N+k} = \lambda_{ess}$ gilt fuer alle $k \geq 1$. □

Bemerkung. Gilt $\inf \sigma(T) > c$, so sieht man leicht eine analoge Aussage fuer den beschraenkten Operator $S := (T - c)^{-1}$. In diesem Fall vertauschen sich die Rollen von 'Inf' und 'Sup' und es geht nicht mehr um den unteren Rand sondern den oberen Rand des Spektrums von S. Dieser Fall kommt in gewissen Anwendungen haeufig(er) vor und gibt dem Theorem den Namen.

Ganz aehnliche Betrachtungen wie die obigen koennen natuerlich fuer den oberen Rand des Spektrums gemacht werden. Wir ueberlassen die Details dem Leser und halten hier lediglich folgendes fest.

Erinnerung. Es heisst T nach unten / nach oben beschraenkt, wenn ein $\gamma \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\langle f, Tf \rangle \geq \|f\|^2 \text{ bzw. } \langle f, Tf \rangle \leq \gamma \|f\|^2$$

fuer alle $f \in D(T)$.

THEOREM. *Sei T ein selbstadjungierter Operator. Dann ist T genau dann beschaenkt, wenn $\sigma(T)$ beschraenkt ist und in diesem Fall gilt $\|T\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$.*

Beweis. Nach dem schon bewiesenen ist T nach unten beschraenkt (durch λ), genau dann wenn $\sigma(T)$ nach unten beschraenkt (durch λ) ist. Ebenso folgt, dass T nach oben beschraenkt ist, genau dann wenn $\sigma(T)$ nach oben beschraenkt ist. Damit ist T also genau dann nach oben und unten beschraenkt, wenn $\sigma(T)$ nach oben und unten beschraenkt ist.
Ist T nach oben und unten beschraenkt durch M, so sieht man leicht, dass T beschraenkt ist (durch M), denn es gilt wegen $\sigma(T) \subset [-M, M]$) dann also $f = E([-M, M])f$ fuer jedes $f \in \mathcal{H}$ und damit dann

$$\|Tf\|^2 = \int t^2 d\mu_f(t) = \int 1_{[-M,M]}(t) d\mu_f(t) \leq M^2 \|f\|^2.$$

Ist umgekehrt T beschaenkt, so ist es offensichtlich nach oben und unten beschraenkt.

Zur letzten Aussage: Diese wurde mitbewiesen. $\square$

KAPITEL 5

Vermischtes

In diesem Kapitel gehen wir kurz auf einige weitere Themen ein. Die genau Ausfuehrung dieser Themen bilden (zum Teil) Gegenstand aktueller Forschung.

1. Nochmal Formen

Wir wissen schon, dass ein selbstadjungierter Operator T genau dann nach unten beschraenkt ist, wenn es ein $\gamma > 0$ gibt mit $\langle f, Tf\rangle \geq \gamma\|f\|^2$ fuer alle $f \in D(T)$. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass solche Operatoren in einer bijektiven Korrespondenz zu den von uns weiter oben betrachteten nach unten beschraenkten Formen stehen. Um Schreibarbeit zu sparen, werden wir nur den Fall $\gamma = 0$ betrachten. In diesem Fall koennen wir - nach Spektralkalkuel - die Wurzel $T^{1/2}$ von T definieren als $T^{1/2} := E(\Phi)$ mit der Funktion $\Phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sqrt{t}$ (wobei E das zu T gehoerende projektionswertige Maß ist.

Theorem. *Sei $T \geq 0$. Dann wird durch Q mit $D(Q) = D(T^{1/2})$ und $Q(f, g) := \langle T^{1/2}f, T^{1/2}g\rangle$ eine abgeschlossene und (durch 0) nach unten beschraenkte Form definiert und es gilt fuer den zugehoerigen Operator T_Q dann $T_Q = T$.*

Beweis.

□

ANHANG A

Schwache Konvergenz im Hilbertraum

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Folge (f_n) in $\mathcal{H}$ heisst *schwach konvergent* gegen $f \in \mathcal{H}$, wenn gilt

$$\langle f_n, g\rangle \to \langle f, g\rangle$$

fuer alle $g \in \mathcal{H}$. Dann schreibt man auch

$$f_n \stackrel{w}{\to} f.$$

Das Beispiel. Ist (f_n) ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$, so konvergiert f_n gegen 0 aber es konvergiert (f_n) nicht in Norm. (Denn: Schwache Konvergenz folgt aus der Besselschen Ungleichung. Nichtkonvergenz in Norm ist klar.)

Strukturell wesentlich ist die Beobachtung, dass (f_n) genau dann schwach gegen f konvergiert, wenn die Funktionale $\phi_n := \langle f_n, \cdot\rangle$ punktweise konvergieren.
Damit erhaelt man aus dem Satz von Banach-Steinhaus (Prinzip der gleichmaessigen Beschraenktheit) sofort:

Folgerung. *Jede schwach konvergente Folge ist beschraenkt.*

Proposition. *(a) Konvergiert (f_n) schwach gegen f, so gilt* $\liminf_n \|f_n\| \geq \|f\|$.
(b) Es konvergiert (f_n) genau dann in Norm gegen f, wenn es schwach konvergiert und $\limsup_n \|f_n\| \leq \|f\|$ *gilt.*

Beweis. (a) Wir rechnen

$$\|f\|^2 = \lim_n \langle f_n, f\rangle = \leq \liminf_n \|f_n\| \|f\|.$$

Gilt $\|f\| \neq 0$, so folgt die gewuenschte Aussage nun nach Division durch $\|f\|$. Fuer $\|f\| = 0$ ist sie sowieso klar.
(b) Konvergiert (f_n) in Norm, so konvergiert es schwach (nach Cauchy-Schwarz) und es konvergiert offenbar auch die Norm. Umgekehrt folgt aus der Aussage zum lim sup und Teil (a), dann die Konvergenz der Norm $\|f_n\| \to \|f\|$. Damit folgt dann aus

$$\|f_n - f\|^2 = \langle f_n - f, f_n - f\rangle = \|f\|^2 - \langle f_n, f\rangle - \langle f, f_n\rangle + \|f_n\|^2$$

dann leicht die gewuenschte Konvergenz in Norm. □

Es gibt zwei Theoreme zur schwachen Konvergenz ;-) Diese lernen wir jetzt kennen.

Theorem (Kompaktheit der Einheitskugel). *Jede beschraenkte Folge im Hilbertraum hat eine schwach konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei (f_n) eine Folge im Hilbertraum mit $\|f_n\| \leq C$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{K} := \overline{Lin\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Sei D eine abzaehlbar dichte Teilmenge von $\mathcal{K}$. Mit Bolzano-Weierstrass und einem Diagonalfolgeargument findet man eine Teilfolge (h_n) von (f_n) so dass

$$\phi(g) := \lim_{n\to\infty} \langle h_n, g\rangle$$

fuer alle $g \in D$ existiert. Mit $\|h_n\| \leq C$ und einem $\varepsilon/3$-Argument sieht man leicht, dass dann

$$\phi(g) = \lim_{n\to\infty} \langle h_n, g\rangle$$

fuer alle $g \in \mathcal{K}$ existiert. Tatsaechlich existiert der Grenzwert sogar fuer alle $g \in \mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$ (da auf $\mathcal{K}^\perp$ die entsprechenden Skalarprodukte verschwinden). Offenbar ist $\phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ linear. Weiterhin folgt aus der Schranke an die (f_n) dann sofort

$$|\phi(g)| \leq C\|g\|.$$

Damit ist ϕ stetig und linear und es gibt nach dem Lemma von Riesz also ein $h \in \mathcal{H}$ mit

$$\phi(g) = \langle h, g\rangle$$

fuer alle $g \in \mathcal{H}$. Dann gilt nach Konstruktion also $h_n \stackrel{w}{\to} h$. □

THEOREM (Banach-Saks). *Konvergiert (f_n) schwach gegen f, so gibt es eine Teilfolge (f_{n_k}) mit*

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_{n_k} \to f, N \to \infty.$$

Bemerkung. Es ist instruktiv sich das fuer ein Orthonormalsysetem (f_n) klarzumachen. In diesem Fall gilt (kleine Rechnung)

$$\left\|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_k\right\|^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{1\leq k,l\leq N} \langle f_k, f_l\rangle = \frac{1}{N^2} = \sum_{k=1}^{N} \|f_k\|^2 = \frac{1}{N} \to 0.$$

Beweis. Ohne Einschraenkung gelte $f_n \to 0$. (Andernfalls koennen wir 'ueberall' f subtrahieren.) Wir konstruieren induktive eine Teilfolge (f_{n_k}) mit $f_{n_1} := f_1$ und $n_{k+1} > n_k$, so dass gilt

$$|\langle f_{n_l}, f_{n_{k+1}}\rangle| \leq \frac{1}{k+1}$$

fuer $l = 1, \ldots, k$. Nun kann man aehnlich wie in der vorangehenden Bemerkung mit einer direkten Rechnung die gewuenschte Aussage zeigen. □

ANHANG B

Etwas Funktionentheorie

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine stetige und stueckweise stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ heisst *Kurve in* U. Gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heisst die Kurve *geschlossen.* Ist $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und γ Kurve in U, so heißt

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt$$

das *Kurvenintegral* von f ueber γ. Offenbar gilt

$$\left|\int_\gamma f(\zeta)d\zeta\right| \leq \|f|_\gamma\|_\infty \cdot \mathrm{Laenge}(\gamma),$$

wobei die *Laenge* einer Kurve $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert ist durch

$$\mathrm{Laenge}(\gamma) = \int_{[a,b]} |\gamma^{'}(t)|dt.$$

DAS Beispiel. Sei $p \in \mathbb{C}$ beliebig und $R > 0$ und $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) = p + Re^{it}$. Dann gilt (mit $f(z) : \mathbb{C} \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z-p}$ also

$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta - p} d\zeta = 2\pi i.$$

(Kleine Rechnung: $\gamma^{'}(t) = iRe^{it}$...)
Die Verallgemeinerung auf $f : \mathbb{C} \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{C},\ f(z) = (z-p)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, liefert

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \cdot \delta_{-1,n}.$$

Fuer weitergehende Untersuchungen brauchen wir noch das Konzept der *Homotopie.* Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Die geschlossenen Kurven $\gamma, \varrho : [a,b] \longrightarrow U$ heissen *homotop in* U oder auch *ineinander ueberfuehrbar in* U, wenn es eine stetige Abbildung (Homotopie)

$$H : [0,1] \times [a,b] \longrightarrow U$$

gibt mit folgenden Eigenschaften:

- $H(0,\cdot) = \gamma$, $H(1,\cdot) = \varrho$,
- es ist $H(t,a) = H(t,b)$ fuer alle $t \in [0,1]$.

Ist γ homotop zu einer konstanten Kurve (mit Wert p), so heißt γ *auf den Punkte* p *zusammenziehbar.*
Hat die offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ die Eigenschaft, daß jede geschlossene Kurve auf einen Punkt zusammenziehbar ist, so heißt die Menge *einfach zusammenhaengend.*

Ist $p \in U$ und $r > 0$ mit $B_r(p) \subset U$ und ist γ in $U \setminus \{p\}$ homotop zu $[0, 2\pi] \longrightarrow U \setminus \{p\}, t \mapsto p + re^{it}$, so sagt man, daß γ den Punkt p genau einmal umrundet und Inneres in U hat.

Theorem (Charakterisierung holomorpher Funktionen). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind die folgenden Aussagen aequivalent:*

(i) *Es ist f auf U komplex differenzierbar (d.h. fuer jedes $p \in U$ existiert der Grenzwert $f'(p) = \lim_{z\to p} \frac{f(z)-f(p)}{z-p}$).*

(ii) *Fuer alle geschlossenen Kurven γ, die sich in U auf einen Punkt zusammenziehen lassen, gilt*
$$\int_\gamma f(\zeta) d\zeta = 0.$$

(iii) *Fuer alle $p \in U$ gilt*
$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - p} d\zeta$$
fuer alle Kurven γ, die p genau einmal umrunden und ihr Inneres in U haben.

(iv) *Fuer alle $p \in U$ existiert eine Potenzreihe $\sum a_n(z-p)^n$ mit Konvergenzradius mindestens $r = dist(p, U^c)$ und*
$$f(z) = \sum a_n(z-p)^n$$
fuer alle $z \in U_r(p)$.

Insbesondere ist jedes solche f beliebig oft (stetig) differenzierbar.

Definition (Holomorphe Funktion). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine stetige Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt holomorph auf U, wenn sie eine der aequivalenten Eigenschaften des vorigen Theorems besitzt.*

Bemerkungen und Bezeichnungen.

- Oft wird Holomorphie durch die Eigenschaft in (i) definiert.
- Die Aussage in (ii) fuer holomorphe Funktionenen wird auch als Cauchyscher-Integral-Satz bezeichnet.
- Die Aussage in (iii) fuer holomorphe Funktionen wird auch als Cauchy-Integral-Formel bezeichnet.
- Funktionen mit der Eigenschaft aus (iv) werden auch als analytisch bezeichnet.

Beweis. Wir *skizzieren* einige Ideen zum Beweis des Satzes:
(iv)$\Longrightarrow$ (i): Das ist klar.

(i)$\Longrightarrow$ (ii): Es wird zunaechst das Verschwinden des Kurvenintegrals fuer einfache Kurven (z.b. Dreieckswege)gezeigt. Das ist ein rafinierter Beweis. Anschließend wird damit dann die Homotopieinvarianz der Kurvenintegrales gezeigt. Daraus folgt dann die Aussage (ii) leicht.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): Sei $\gamma_r = p + re^{i\cdot}$. Nach (ii) (und einer kleinen Ueberlegung; Zeichnung!) ist dann $\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-p} d\zeta$ fuer jede geschlossene Kurve, die p einmal umrundet, gerade gleich
$$\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - p} d\zeta$$

fuer alle genuegend kleinen $r > 0$, naemlich alle $r > 0$, so dass $\gamma_r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $p + re^{it}$ in U verlaeuft und sein Inneres ganz in U hat. Man kann sich nun leicht ueberlegen, daß fuer $r \to 0$ letzteres Integral gerade gegen $f(p)$ konvergiert (kleine Rechnung).

(iii)$\Longrightarrow$ (iv): Das folgt letzten Endes durch Bilden der geometrischen Reihe. $\square$

Es gibt noch eine weitere Perspektive auf (und Charakterisierung von) holomorphen Funktionen. Dazu betrachtet man zu der Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ die Funktion $\widetilde{f}$, die entsteht, wenn man in der naheliegenden Weise $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ miteinander identifiziert. Genauer definiert man

$$\widetilde{f} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \widetilde{f}(x,y) := f(x+iy),$$

mit $\widetilde{U} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in U\}$. Entsprechend definiert man auch fuer $u : U \longrightarrow \mathbb{C}$ dann

$$\widetilde{u} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}, \widetilde{u}(x,y) := u(x+iy).$$

Mit dieser Notation gilt folgendes.

Lemma (Cauchy-Rieman-Differentialgleichung). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es ist f holomorph.*

(ii) *Es ist $\widetilde{f}$ differenzierbar und fuer jedes $p \in \widetilde{U}$ hat die die Ableitung die Form*

$$D\widetilde{f}(p) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(iii) *Es ist $\widetilde{f}$ stetig partiell differenzierbar mit*

$$\partial_x \widetilde{f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \partial_y \widetilde{f}.$$

Insbesondere gelten fuer eine holomorphe Funktion mit Realteil u und Imaginaerteil v die sogenannten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\partial_x \widetilde{u} = \partial_y \widetilde{v} \text{ und } \partial_y \widetilde{u} = -\partial_x \widetilde{v}.$$

Beweis. Die Aequivalenz von (i) und (ii) folgt einfach, wenn man sich klarmacht, dass die Multipikation mit einem $w = a + ib$ in $\mathbb{C}$, d.h. die Abbildung $M : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto wz$, gerade auf die Abbildung

$$\widetilde{M} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \xi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \xi,$$

fuehrt (und umgekehrt).

Damit folgt dann die Aquivalenz von (i) und (iii) einfach, da eine holomorphe Funktion belieibig oft differenzierbar ist. $\square$

Folgerung. *Ist $U \subset \mathbb{C}$ zusammenhaengend und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\Im f = 0$, so ist f konstant. Insbesondere unterscheiden sich holomorphe Funktionen mit gleichem Imaginaerteil nur durch eine Konstante.*

Beweis. Sei $f = u + iv$ die Zerlegung von f in Real- und Imaginaerteil. Dann gilt $v = 0$ und damit natuerlich auch $\partial_x \widetilde{v} = 0 = \partial_y \widetilde{v}$. Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt dann auch $\partial_x \widetilde{u} = 0 = \partial_y \widetilde{u}$. Damit folgt die Konstanz von $\widetilde{u}$ und $\widetilde{v}$. Die letzte Aussage ist klar. $\square$