C*-Algebren

Wintersemester 2010/2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 4

(1) Sei $\mathcal{I}$ ein abgeschlossenes Ideal einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{I}$ ist selbstadjungiert, d.h. $x \in \mathcal{I}$ impliziert, dass $x^* \in \mathcal{I}$.

(b) Die Abbildung $[x]^* := [x^*]$ definiert eine Involution auf der Quotientenalgebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$.

(c) Die Quotientenalgebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ ist mit dieser Involution eine C^*-Algebra.

Hinweis: Nutzen Sie für den Beweis der Aussagen (a) und (c) eine approximative Eins.

(2) Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $x \in \mathcal{A}$ normal. Zeigen Sie:

(a) $\|(x-\lambda)^{-1}\| = \mathrm{dist}(\lambda, \sigma(x))^{-1}$ für $\lambda \in \rho(x)$.

(b) Ist $\epsilon > 0$ beliebig, so gilt für alle $y \in \mathcal{A}$ mit $\|x - y\| < \epsilon$:

$$\sigma(y) \subset U_\epsilon(\sigma(x)).$$

(3) Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $T_n, T \in \mathcal{A}$ normal, $n \in \mathbb{N}$, mit $T_n \to T$. Zeigen Sie, dass

$$\sigma(T_n) \to \sigma(T),$$

wobei die Konvergenz bedeutet, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$

$$\sigma(T_n) \subset U_\epsilon(\sigma(T))$$

und

$$\sigma(T) \subset U_\epsilon(\sigma(T_n))$$

gilt.

(4) Sei T_n eine Folge normaler Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, die gegen einen Operator T konvergieren. Sei X eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$, welche alle Mengen $\sigma(T_n)$ enthält. Zeigen Sie, dass für alle $f \in C(X)$

$$f(T_n) \to f(T)$$

gilt.