Sommersemester 2019 **Prof. Dr. D. Lenz**

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Probeklausur

Besprechung am 08.07.2019 in den Übungsgruppen

In der Klausur beträgt die Bearbeitungszeit 150 Minuten und man benötigt 25 von 53 Punkten um zu bestehen.

Aufgabe 1 **6 Punkte**

Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{x}{y}\ , \quad y(0) = 1\,.$$

Aufgabe 2 **6 Punkte**

Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = -y + \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\ , \quad y(0) = 1\,.$$

Aufgabe 3 **9 Punkte**

a) Was ist ein erstes Integral? Welche charakteristische Eigenschaft hat es für die Lösung einer Differentialgleichung?

b) Geben Sie ein erstes Integral der folgenden Differentialgleichung an:

$$(x', y') = (2y, -4x)\,.$$

Aufgabe 4 **12 Punkte**

a) Was besagt der Peanosche Existenzsatz?

b) Geben Sie verschiedene charakteristische Eigenschaften der maximalen Lösung an!

c) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, sodass die maximalen Lösungen von $y' = f(x,y)$ nicht auf ganz $\mathbb{R}$ existieren.

Aufgabe 5 **6 Punkte**

a) Skizzieren Sie das Vektorfeld der Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = (2\mathrm{e}^{-y_1^2-y_2^2} - 1)\begin{pmatrix} y^2+1 \\ 2+\cos(y) \end{pmatrix}\,.$$

b) Zeigen Sie, dass die maximale Lösung für alle Zeiten existiert.

Aufgabe 6 **6 Punkte**

a) Transformieren Sie das Anfangswertproblem

$$y''' = -y\ , \quad y(0) = 1\ , \quad y'(0) = 0\ , \quad y''(0) = 0$$

in ein äquivalentes System erster Ordnung.

b) Welche Dimension hat der Raum der Lösungen? Warum?

Aufgabe 7 **8 Punkte**

Geben Sie zum Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x-y}}\ ,\ \ y(0) = \frac{1}{2}$$

ein kompaktes Rechteck $R := [0, b] \times [\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r]$ so an, dass die maximale Lösung den Bereich R auf seiner rechten Seite verlässt. (Das heißt, gesucht sind $b, r > 0$, sodass für die maximale Lösung ϕ des Anfangswertproblems gilt: $\phi(b) \in [\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r]$.) Begründen Sie Ihre Antwort.