Analysis II

Sommersemester 2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 11 **Abgabe Mittwoch 22.06.2011**

(1) Seien $0 < r < R$. Ein Torus im $\mathbb{R}^3$ ist durch die Gleichung

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0$$

gegeben. Zeigen Sie:

(a) In jedem Toruspunkt ist die Gleichung nach einer der Variablen auflösbar.

(b) Die Gleichung kann in allen Punkten mit $x \neq 0$ und $|z| \neq r$ lokal nach x aufgelöst werden.

Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion $x = x(y, z)$ aus Teil (b) durch implizites Differenzieren.

(2) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ so, dass $f(a, b) = 0$ und $D_2 f(a, b) \neq 0$. Dann existiert nach dem Satz über implizite Funktionen eine Funktion $y = g(x)$ welche die Gleichung $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung von (a, b) auflöst. Zeigen Sie, dass die Funktion g zweimal stetig differenzierbar ist und bestimmen Sie ihre zweite Ableitung. Berechnen Sie damit die zweite Ableitung für das Beispiel $f(x, y) := y + x \sin y$ mit $(a, b) = (0, 0)$.

(3) Es seien die Gleichungen

$$-2x^2 + y^2 + z^2 = 0, x^2 + e^{y-1} - 2y = 0$$

gegeben. Zeigen Sie, dass man das Gleichungssystem für nahe an 1 liegende x, y, z durch stetige Funktionen $y = \phi(x)$ und $z = \psi(x)$ auflösen kann.

(4) Sei $F(x, y, z) = x^4 + 2x \cos y + \sin z$. Zeigen Sie, dass für hinreichend kleine x, y, z die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ nach z aufgelöst werden kann und berechnen Sie $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$.