Analysis II Sommersemester 2017

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Geben Sie in Abhängigkeit von x_0 reelle Zahlen a und b an, so dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq x_0 \\ ax + b & \text{für } x > x_0 \end{cases}$$

überall differenzierbar wird.

Aufgabe 2. Sei I ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass $f'(I)$ ein Intervall ist.

Aufgabe 3. Sei $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, auf $(0, \infty)$ differenzierbar und für $k, K \in \mathbb{R}$ gelte

$$kf \leq f' \leq Kf.$$

Dann folgt für alle $x \geq 0$

$$f(0)e^{kx} \leq f(x) \leq f(0)e^{Kx}.$$

Aufgabe 4. Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Man beweise

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) f^{(k)} g^{(n-k)},$$

wobei $h^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k} h$ und $h^{(0)} = h$ für eine k-mal differenzierbare Funktion h. Berechne $h^{(1999)}$ für $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 e^x$.