Probeklausur Analysis III

Wintersemester 2014/2015 **Prof. Dr. D. Lenz**

Hilfsmittel. Keine.

Hinweise:

- Jedes Lösungsblatt ist mit Namen, Vornamen, Fachrichtung und Matrikelnummer zu versehen.
- Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt anzufangen.
- Schreiben sie **nicht** mit Bleistift.
- Eine Lösung wird nur gewertet, wenn der Lösungsweg nachvollziehbar ist.
- Bei (versuchtem) Betrug gilt die Klausur als nicht bestanden.

---

(1) (a) Was versteht man unter Rektifizierbarkeit einer Kurve? Wie ist die Kurvenlänge definiert?

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) = (t,\, e^{\frac{a}{t}} \sin \tfrac{a}{t}),\ t \in (0,1] \quad \text{und} \quad \gamma(0) = (0,0)$$

rektifizierbar? Begründen Sie Ihre Antwort. **8 Punkte**

(2) (a) Geben Sie drei äquivalente Charakterisierungen von lokalen Gradientenfeldern an.

(b) Was besagt der Satz über die Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals für geschlossene Kurven? Wann heißt eine Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ einfach zusammenhängend?

(c) Besitzt das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \frac{3}{|x|^3} x$, ein Potential? Begründen Sie Ihre Antwort. **12 Punkte**

(3) (a) Was versteht man unter einem Mengenring $\mathcal{R}$ über einer Menge X und einem Prämaß auf $(X, \mathcal{R})$?

(b) Was besagt der Satz von Lebesgue (Satz von der dominierten Konvergenz)?

(c) Es sei eine nichtleere, abzählbare unendliche Menge X gegeben. Sei $\mathcal{R}$ die Familie der Teilmengen A von X, so dass A oder $X \setminus A$ endlich ist. Es sei $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty)$ definiert durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } A \text{ endlich ist,} \\ 1 & \text{, falls } X \setminus A \text{ endlich ist.} \end{cases}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Die Familie $\mathcal{R}$ ist ein Mengenring über X.

(ii) Für paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$ gilt die Gleichheit

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

(iii) Die Abbildung μ ist kein Prämaß auf $(X, \mathcal{R})$. **12 Punkte**

(4) (a) Geben Sie drei äquivalente Charakterisierungen von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$ an.

(b) Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Parametrisierung $\Phi : (0, 2\pi) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}^3$

$$(\alpha, r) \mapsto \left(\left(1 + r\cos\tfrac{\alpha}{2}\right)\cos\alpha, \left(1 + r\cos\tfrac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha, r\sin\tfrac{\alpha}{2}\right)$$

Bestimmen Sie alle $(\alpha_0, r_0) \in (0, 2\pi) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mit $\Phi(\alpha_0, r_0) = (-1, 0, 0)$ und berechnen Sie den Tangential- und Normalenraum von M bezüglich Φ in $\Phi(\alpha_0, r_0) = (-1, 0, 0)$.

(c) Was besagt der allgemeine Satz von Stokes?

(d) Beweisen Sie die Greensche Formel mit Hilfe des Satzes von Stokes. **16 Punkte**

(5) (a) Was versteht man unter dem Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ und der Fouriertransformation?

(b) Gehören die folgenden Funktionen zu $\mathcal{S}(\mathbb{R})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $f(x) := \frac{2}{e^x + e^{-x}}$
2. $h(x) := e^{-|x|^3}$

10 Punkte