Höhere Analysis I

Sommersemester 2018 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 7 **Abgabe Donnerstag 31.05.2015**

(1) Zeigen Sie, dass jeder endlichdimensionale Teilraum eines Hilbertraumes abgeschlossen ist.

(2) Gegeben sei ein Hilbertraum H mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein Orthonormalsystem in H für eine gegebenene Indexmenge I, dann gilt
$$\|e_\alpha - e_\beta\| = 2, \qquad \alpha \neq \beta.$$

(b) Gibt es eine abzählbare Orthonormalbasis von H, so gibt es eine abzählbare dichte Teilmenge von H.

(c) Falls H eine Orthonormalbasis $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ mit überabzählbarer Indexmenge besitzt, dann gibt es keine abzählbare Orthonormalbasis für H.

(3) Es sei H ein Hilbertraum und $U, V \subseteq H$ abgeschlossene Unterräume. Weiterhin seien P_U, P_V die zugehörigen Orthogonalprojektionen. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Es gilt $P_U P_V = 0$ genau dann, wenn $U \perp V$.

(b) Es ist $P_U + P_V$ eine Orthogonalprojektion genau dann, wenn $P_U P_V = 0$.

(c) Es ist $P_U P_V$ eine Orthogonalprojektion genau dann, wenn $P_U P_V = P_V P_U$.

(d) Es gilt $P_U P_V = P_V$ genau dann, wenn $V \subseteq U$.

(e) Es ist $P_U - P_V$ eine Orthogonalprojektion genau dann, wenn $V \subseteq U$.

(f) Es gilt $P_U P_V = P_V$ genau dann, wenn für alle $x \in H$ die Ungleichung $\|P_V x\| \leq \|P_U x\|$ gilt.

(4) Es sei $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in dem Hilbertraum H mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass (e_n) schwach gegen Null konvergiert (also für alle $x \in H$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \langle x, e_n \rangle = 0$).

(b) Zeigen Sie, dass (e_n) nicht in Norm gegen 0 konvergiert.