Analysis III

Wintersemester 2011/2012 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 3 **Abgabe Dienstag 08.11. 2011**

(1) Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, W ein k-dimensionaler Teilraum von V, $k \leq n$ und $v_1, \ldots, v_k \in W$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass für $A : W \to W$ mit

$$S(v_1, \ldots, v_k) = S(Av_1, \ldots, Av_k),$$

folgt, dass $|\det A| = 1$. (Dabei ist $S(v_1, \ldots, v_k) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k : \lambda_i \in [0,1]\}$.)

(2) Sei $A \in \mathbb{C}^{N \times d}$ mit $d \leq N$. Zeigen Sie:

$$\det(A^* A) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Rang} A = d.$$

(3) Sei $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(u, v) := \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \sin \frac{u}{2} \cos u \\ \sin \frac{u}{2} \sin u \\ \cos \frac{u}{2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, $D\Phi$, $D\Phi^T D\Phi$ und $\det D\Phi^T D\Phi$.

(4) Sei $0 < r < R$ und $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(u, v) := R \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, $D\Phi$, $D\Phi^T D\Phi$ und $\det D\Phi^T D\Phi$.

Zusatz
Skizzieren Sie die Flächen in Aufgaben (3) und (4).