Spektraltheorie

Sommersemester 2016 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 4 **Besprechung Dienstag 17.05.2016**

(1) Seien M_x und M_{x^2} die maximalen Operatoren der Multiplikation mit der Funktion $[0,\infty) \to \mathbb{C}, x \mapsto x$, bzw. $[0,\infty) \to \mathbb{C}, x \mapsto x^2$ auf dem Hilbertraum $L^2([0,\infty),\lambda)$, wobei λ das Lebesguemaß ist. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $D(M_{x^2}) \subset D(M_x)$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $a > 0$ mit

$$\|M_x f\| \leq a\|f\| + \varepsilon\|M_{x^2} f\|$$

fuer alle $f \in D(M_{x^2})$.

(b) Es gibt kein $a > 0$ mit

$$\|M_x f\| \leq a\|f\|$$

fuer alle $f \in D(M_{x^2})$.

(2) Zeigen Sie: Sind T und V abgeschlossene Operatoren im Hilbertraum, so sind aequivalent:

(i) Der Operator V ist T-beschraenkt.

(ii) Es gilt $D(T) \subset D(V)$.

Ist $\varrho(T)$ nichtleer, so ist dies aequivalent zu

(iii) Es ist $V(T-z)^{-1}$ beschrankt fuer ein (alle) $z \in \varrho(T)$.

(3) Sei $-\infty < a < b < \infty$ und

$$W^1_{(per)}(a,b) := \{f \in W^1(a,b) : f(a) = f(b)\}.$$

Zeigen Sie, dass die Einschränkung von $Q^{(N)}$ auf $D(Q^{(per)} := W^1_{(per)}$ eine nach unten beschränkte abgeschlossene Form ist und dass der zugehörige selbstadjungierte Operator gerade der Abschluss des Operator S mit

$$D(S) = \{f \in C^2([a,b]) : \text{es gibt ein } g \in C^2(\mathbb{R}) \text{ mit } g(x) = g(x+(b-a)) \text{ und } f = g|_{(a,b)} \}$$

$$Sf = -f''$$

ist.

b.w.

(4) Sei $-\infty < a < b < \infty$ und Q auf $W^1(a,b)$ definiert durch $Q(f,g) := \int_{\mathbb{R}} \overline{f'} g' dx$. Zeigen Sie, dass der zu Q gehörende selbstadjungierte Operator L gegeben ist durch

$$D(L) = \{f \in W^1(a,b) : f' \in W^1(a,b) \text{ und } f'(a) = 0 = f'(b)\}$$

und

$$L(f) = -(f')'.$$