# Analysis II für Physiker

**Sommersemester 2009** **Prof. Dr. D. Lenz**

**Blatt 1** **Abgabe Mittwoch 22.04.2009**

(1) Man zeige, daß das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

(a) $f(x, y) = (y, y - x)$ kein Potential besitzt,

(b) $f(x, y) = (y, x - y)$ ein Potential besitzt und gebe eines an.

(2) Berechnen Sie das Kurvenintegral der Felder $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, längs der Kurve $\gamma$ in den folgenden Fällen:

1. $g(x, y) = (\, x^2,\ xy\,)$ und $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t,\ t)$.
2. $g(x, y) = (\, x^2,\ xy\,)$ und $\gamma : [0, 2] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{cases} (t, 0), & t \leq 1, \\ (1,\ t-1), & t > 1. \end{cases}$
3. $h(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\ \cos(t),\ \sin(t)\ )$.

Handelt es sich jeweils um ein konservatives Feld ?

(3) Sei $c > 0$. Die Kurve $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\rho(t) = (e^{ct} \cos t, e^{ct} \sin t)$ heißt logarithmische Spirale.

(a) Skizzieren Sie die Kurve.

(b) Zeigen Sie, daß die Einschraenkung der Kurve auf den Parameterbereich $(-\infty, 0]$ endliche Laenge hat und berechnen Sie diese.

(4) Die Kurve $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t \cos t, t \sin t)$ heißt archimedische Spirale.

(a) Skizzieren Sie die Kurve.

(b) Berechnen Sie die Laenge der Einschraenkung von $\gamma$ auf $[0, 2\pi]$.

## Zusatzaufgaben

1. Konvergiert $g_n : [0, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ gleichmäßig? Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 g_n = \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} g_n$?

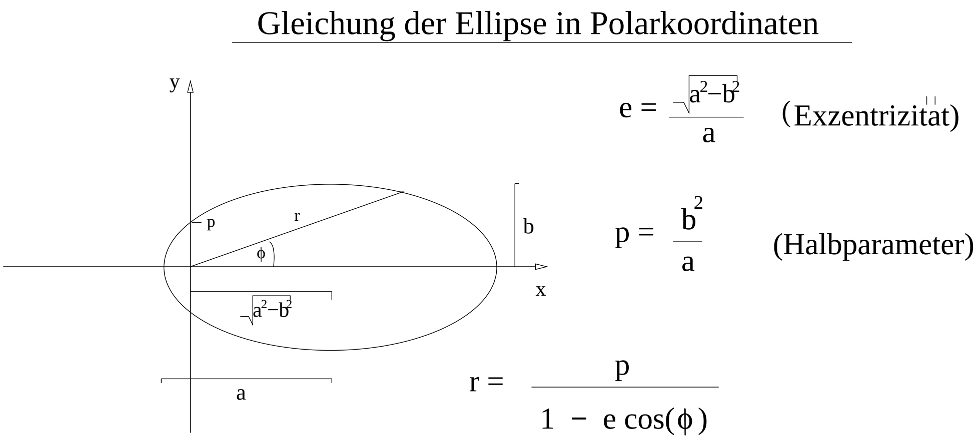


Abbildung 1: Siehe Zusatzaufgabe 4.

2. Berechnen Sie die das Kurvenintegral des Feldes $h$ aus Aufgabe 2.3 längs der geschlossenen hufeisenförmigen Kurve, die sich aus zwei konzentrischen Halbkreisen und radial verlaufenden Verbindungsstrecken ergibt.

3. Berechnen Sie das Arbeitsintegral des Feldes $\widehat{h} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, g(x) = (1, x_2, x_3^2, x_4^3)$ entlang der Kurve $\bar{\gamma} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^4,\ t \mapsto (\sin t, \sin^2 t, \sin^3 t, \sin(t/2))$.

4. Formulieren Sie den Umfang der Ellipse als Länge einer Kurve. (Siehe dazu die obenstehende Skizze. Sie brauchen das Integral nicht zu lösen.)