Analysis II

Sommersemester 2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Pfingstzettel **Abgabe 29. 6. 2011**

(1) Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx$$

(2) Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz:

$$(a) \quad \int_{1}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx \quad (b) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

(3) Bestimmen Sie die globalen und lokalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = x^4 + \tfrac{1}{2}y^2 + \cos(x^2+y^2)$$

in der Kreisscheibe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq \frac{\pi}{2}\}$.

(4) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion

$$f(x,y,z) = \cos x \cdot \sin y \cdot e^z$$

an der Stelle $x_0 = (0,0,0)$.

(5) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\psi, \phi : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\phi(I), \psi(I) \subset [a,b]$. Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{d}{dx} \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\phi(x))\phi'(x)$$

für alle $x \in I$ gilt. Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $F(u,v) := \int_u^v f(t)\, dt$.

(6) Sei $n \geq 3$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Funktion $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, u(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}}$, harmonisch ist, d.h. daß für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) = 0.$$

(7) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2}{x+y}, & x+y \neq 0 \\ 0, & x+y = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie,

(a) Für jede Gerade $G \subset \mathbb{R}^2$ durch Null gilt

$$\lim_{(x,y)\to 0, (x,y)\in G} f(x,y) = 0.$$

(b) f ist in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x+y=0$ nicht stetig.

(8) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Zeigen Sie, dass es für hinreichend kleine x eine positive Funktion $y = y(x)$ gibt, mit $F(x, y(x)) = 0$. Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes über implizite Funktionen, dass für die Ableitung $y'(x) = -\frac{x}{y}$.