# Analysis II

**Sommersemester 2014** **Prof. Dr. D. Lenz**

**Blatt 6** **Abgabe 22.05.2014**

(1) Beweisen Sie das Integralkriterium für Reihenkonvergenz:
Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $f : [n_0, \infty) \to [0, \infty)$ monoton fallend. Dann gilt

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) < \infty \iff \int_{n_0}^{\infty} f(t)\, dt < \infty.$$

(2) Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Riemann Integrale existieren:

$$\text{(a)} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \text{(b)} \int_{\pi}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx, \quad \text{(c)} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

(3) Untersuchen Sie, für welche Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgenden uneigentlichen Riemann Integrale existieren:

$$\text{(a)} \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x \cdot (\ln x)^{\alpha}}\, dx, \quad \text{(b)} \int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\alpha}}\, dx.$$

(4) Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Riemann Integrale:

$$\text{(a)} \int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx, \quad \text{(b)} \int_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx, \quad \text{(c)} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx.$$

Hinweis für (c): Setzen Sie $x = 2t$ und nutzen Sie Additionstheoreme für den doppelten Winkel.

## Zusatzaufgaben

(Z1) Sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar. Gilt dann $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(Z2) Gegeben seien zwei reelle Polynome $R$ und $P$ mit

$$P(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - x_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{s} [(x - \xi_j)^2 + \mu_j^2]^{l_j}$$

und $Grad(R) < Grad(P)$. Beweisen Sie die Existenz von Koeffizienten $a_{ik}, b_{jl}, c_{jl}$ mit

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{k_i} \frac{a_{ik}}{(x - x_i)^k} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=1}^{l_j} \frac{b_{jl} x + c_{jl}}{((x - \xi_j)^2 + \mu_j^1)^l}.$$