# Übungsaufgaben zur „Mathematik für Chemiker und Biogeowissenschaftler“

## Übungsserie 6: Basen, Eigenwerte und Eigenvektoren

1. Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig? Bilden sie eine Basis im $\mathbb{R}^n$?

   a) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}, n = 2$

   b) $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}, n = 3$

   c) $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\9\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, n = 3$ $(\star)$

   d) $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}, n = 3$

2. Der Vektor $x$ habe bezüglich der kanonischen Basis im $\mathbb{R}^3$ $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ die Koordinaten $x = \begin{pmatrix}3\\9\\5\end{pmatrix}$. Wie sind seine Koordinaten bezüglich der Basis aus Aufgabe 1c?

3. Wenden sie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf die Vektoren aus den Aufgaben 1a und 1c an.

4. Berechnen Sie für die folgenden Matrizen alle Eigenwerte und den jeweils zugehörigen Eigenvektorraum zu jedem Eigenwert. Bestimmen Sie außerdem für jeden Eigenvektorraum einen zugehörigen normierten Eigenvektor.

   a) $\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{pmatrix}$ $(\star)$

   c) $\begin{pmatrix}45 & 0 & -27\\0 & 8 & 0\\-27 & 0 & 45\end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix}9 & 0 & 12\\0 & 0 & 0\\12 & 0 & 16\end{pmatrix}$

Die mit $(\star)$ gekennzeichneten Aufgaben sollten zu Hause bearbeitet und in den Übungen abgegeben werden.