Höhere Analysis

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 7 **Abgabe Mittwoch 16.12.2009**

(1) Eine Folge (b_n) in einem Banachraum X heißt Schauderbasis, falls jedes $x \in X$ eindeutig als konvergente Reihe $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n b_n$, $\xi_n \in \mathbb{K}$, dargestellt werden kann. Zeigen Sie:

(a) Die Einheitsvektoren (e_n) bilden eine Schauderbasis in ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, bzw. c_0, nicht jedoch in ℓ^∞.

(b) Wenn X eine Schauderbasis besitzt, so ist X separabel.

(c) Die Koeffizientenfunktionale $b_n^* : x \mapsto \xi_n$ sind wohldefiniert und linear.

(d) Es ist $b_n^* \in X'$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Zeigen Sie

- $|||x||| := \sup_N \| \sum_{n=1}^{N} b_n^*(x) b_n \|$ definiert eine Norm mit $\| \cdot \| \leq ||| \cdot |||$.
- $b_n^* \in (X, ||| \cdot |||)'$.
- $(X, ||| \cdot |||)$ ist vollständig.
- $||| \cdot |||$ und $\| \cdot \|$ sind äquivalent.

(2) Es seien $(E, \| \cdot \|_E), (F, \| \cdot \|_F)$ normierte Räume und $(E \times F, \| \cdot \|)$ mit $\|(x, y)\| := \| \cdot \|_E + \| \cdot \|_F$ versehen. Zeigen Sie:

$$(E \times F, \| \cdot \|) \text{ vollständig } \Leftrightarrow (E, \| \cdot \|_E) \text{ und } (F, \| \cdot \|_F) \text{ vollständig.}$$

(3) Sei E ein Banachraum und $S : E \to E$ ein linearer, beschränkter Operator mit $\limsup_{n\to\infty} \|S^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$. Zeigen Sie direkt, dass $Id - S$ invertierbar ist und

$$(Id - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n.$$

(4) Sei $M_f : C([0, 1]) \to C([0, 1])$, $u \mapsto f \cdot u$ der Operator der Multiplikation mit $f \in C([0, 1])$. Berechnen Sie das Spektrum von M_f.