Analysis I

Wintersemester 2013/2014 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 7 **Abgabe 05.12.2013**

(1) Sei $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Definiere induktiv die Folge (x_n) durch $x_0 := c > 0$ beliebig und

$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) = x_n + \frac{x_n}{k}\left(\frac{a}{x_n^k} - 1\right).$$

Zeigen Sie, dass die Folge (x_n) gegen $\sqrt[k]{a}$ konvergiert.
(Hinweise: siehe Vorlesung.)

(2) Zeigen Sie: Für $a > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = \frac{1}{e(a)},$$

wobei $e(a) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{a}{n})^n$.
(Idee: $(1 + a/n)^n(1 - a/n)^n$ konvergiert gegen 1.)

(3) Seien $(x_n), (y_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to 0$, $y_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Finden Sie Beispiele für

(a) $x_n y_n \to \infty$,

(b) $x_n y_n \to -\infty$,

(c) $(x_n y_n)$ konvergent,

(d) $(x_n y_n)$ beschränkt, aber divergent.

(4) Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $\sup M = \infty$ genau dann gilt, wenn es eine Folge (x_n) in M gibt mit $x_n \to \infty$.

Zusatzaufgabe

(Z1) Sei $I_n := [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge abgeschlossener, nichtleerer Intervalle in $\mathbb{R}$ mit $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $S := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Zeigen Sie:

(a) S ist ein abgeschlossenes nichtleeres Intervall mit $S = [m, M]$ wobei $m := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ und $M := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

(b) Es besteht S genau dann aus einem Punkt, wenn gilt $|I_n| \to 0$.

Geben Sie ein Beispiel an, welches zeigt, dass die obigen Aussagen falsch sind, falls die I_n, $n \in \mathbb{N}$, nicht als abgeschlossen angenommen werden.

Nikolausaufgabe

(N1) Berechnen Sie Ihren aktuellen Punktestand bis einschließlich Blatt 6 und geben Sie den Anteil Ihrer Gesamtpunkte für diese 6 Serien in Prozent an. Ziehen Sie Ihre Schlüsse daraus.