# Höhere Analysis I

**Sommersemester 2015** **Prof. Dr. D. Lenz**

**Blatt 3** **Abgabe Dienstag 12.05.2015**

(1) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Zeigen Sie für eine beliebige Folge $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, dass die Ungleichung $\mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) Die Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ verschwindet $\mu$-fast überall.

(ii) Für ein $p \geq 1$ gilt $\int_X |f|^p \, d\mu = 0$.

(iii) Für alle $p \geq 1$ gilt $\int_X |f|^p \, d\mu = 0$.

(2) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Gegeben seien $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Gleichheit

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu \;=\; \alpha \int\limits_X f \, d\mu + \beta \int\limits_X g \, d\mu$$

gilt.

(3) Für $0 < p \leq \infty$ definieren wir die Abbildung $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ durch

$$\|(x,y)\|_p := \begin{cases} (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{falls } 0 < p < \infty, \\ \max\{|x|, |y|\}, & \text{falls } p = \infty, \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Zeichnen Sie die Mengen

$$B_1^{(p)}(0) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \|(x,y)\|_p \leq 1\}$$

für $p = \frac{1}{2}, 1, 2, \infty$.

(ii) Zeigen Sie, dass für beliebige $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Gleichheit

$$\|(x,y)\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|(x,y)\|_p$$

gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass für $0 < p < 1$ die Abbildung $\| \cdot \|_p$ keine Norm ist.

(4) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass der Raum $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig ist.

**Zusatz**
Gegeben sei ein meßbarer Raum $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Zeigen Sie, dass für eine meßbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ mit $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ für alle $1 \leq p \leq \infty$ die Gleichheit

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p$$

gilt.