Analysis II

Wintersemester 2015/16 **Marcel Schmidt**

Blatt 10 **Abgabe Mittwoch 20.01.2016**

(1) Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := (x^2+2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ alle lokalen Minima und lokalen Maxima. Gibt es globale Extrema?

(2) Sei $E := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ die gelochte Ebene und $f : E \to E$ definiert durch

$$f(x, y) := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Zeigen Sie, dass f in allen Punkten lokal invertierbar ist. Ist f auch global invertierbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

(3) Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(r, \theta, \varphi) := (rsin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta).$$

Finden Sie die Punkte (r, θ, φ), in denen Φ lokal umkehrbar ist und berechnen Sie dort die Ableitung der jeweiligen Umkehrfunktionen. Geben Sie in einer Umgebung von $(0, 1, 0) = \Phi(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ eine lokale Umkehrfunktion an.

(4) Seien $0 < r < R$ und sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2).$$

Die Menge

$$\mathbb{T} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi(x, y, z) = 0\}$$

beschreibt einen Torus.

(a) Zeichnen Sie $\mathbb{T}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\Phi(x, y, z) = 0$ in jedem Toruspunkt nach nach einer der Variablen auflösbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\Phi(x, y, z) = 0$ in allen Punkten mit $x \neq 0$ und $|z| \neq r$ lokal nach x aufgelöst werden kann.

Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion $x = x(y, z)$ aus Teil (c) durch implizites Differenzieren.