Probeklausur Analysis I für Mathematiker

Wintersemester 2010/2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Hilfsmittel. Stift und Papier.

---

(1) (a) Sei (N, e, ν) mit $e \in N$ und $\nu : N \to N \setminus \{e\}$. Geben Sie die Definition der Peano Axiome an.

(b) Zeigen Sie: $\nu : N \to N \setminus \{e\}$ ist bijektiv, falls (N, e, ν) die Peano Axiome erfüllt.

(2) (a) Sei $r \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{d}{dr}\sum_{k=1}^{n} r^k = \sum_{k=1}^{n} kr^{k-1} = \frac{1-r^{n+1}}{(1-r)^2} - \frac{(n+1)r^n}{1-r}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 + \frac{n}{2} \leq \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \leq n + \frac{1}{2}.$$

(c) Geben Sie die Bernoulli Ungleichung an und beweisen Sie diese.

(3) (a) Definieren Sie die Begriffe obere Schranke und Supremum einer Menge.

(b) Wann heißt ein angeordneter Körper ordnungsvollständig?

(c) Geben Sie einen angeordneten Körper an, der nicht ordnungsvollständig ist? Als Begründung können sie als eine Menge angeben, die ein Gegenbeispiel darstellt.

(d) Geben Sie einen angeordneten Körper zusammen mit einer Teilmenge die ein Infimum aber kein Supremum besitzt.

(e) Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie, dass eine Menge $M \subseteq K$ genau dann nach oben beschränkt ist, wenn $-M$ nach unten beschränkt ist.

(f) Geben Sie vier äquivalente Formulierungen für die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

(4) (a) Wann heißen zwei Mengen gleich mächtig?

(b) Sei M die Menge aller Menschen. Welche Menge ist mächtiger

$$\{\text{Angelina,Brad}\} \text{ oder } \{M\}?$$

Welche Menge ist mächtiger $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N} \cup \{0\}$? Begründen Sie Ihre Aussage.

(c) Wann heißt eine Menge abzählbar?

(d) Geben Sie zwei Beispiele für überabzählbare Mengen? Begründen Sie für eines Ihrer Beispiel die Überabzählbarkeit.

(5) (a) Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Sei $x \in \mathbb{R}$. Was heißt $x_n \to x$?

(b) Geben Sie ein Beispiel einer nichtkonvergenten reellen Folge (mit Begründung).

(c) Was ist ein Häufungspunkt einer Folge?

(d) Geben Sie ein Beispiel einer Folge mit genau einem Häufungspunkt, eine mit abzählbar vielen Häufungspunkten und eine mit überabzählbar vielen Häufungspunkten (mit Begründung).

(e) Was ist eine Cauchyfolge? In welchem Verhältnis steht die Eigenschaft einer Folge eine Cauchyfolge zu sein zur Konvergenz der Folge?

(f) Zeigen Sie mit der Definition und unter Verwendung des Archimedischen Axioms, dass die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist.

(6) (a) Geben Sie ein notwendiges Kriterium dafür, dass eine monotone Folge konvergent ist. Geben Sie ein Beispiel, das die Notwendigkeit zeigt.

Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(b) $\left(\frac{7n^3}{n^5-1}\left(\frac{3n^3}{n-1}-\frac{2n^2-1}{2n+1}\right)\right)_{n\geq 2}$.

(c) $\left(\frac{a^n}{n^3}\right)_{n\geq 2}$ für $a > 0$.

(7) Sei eine rekursive Folge durch $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x_1 > 0$ gegeben. Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

(8) (a) Geben Sie ein hinreichendes Kriterium für die absolute Konvergenz für Reihen.

(b) Untersuchen Sie auf (absolute) Konvergenz: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{3n^2+2}$.

(c) Untersuchen Sie auf (absolute) Konvergenz: $\sum_{n\geq 1}\frac{(n+1)!}{n^n}$.

(d) Berechnen Sie: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5)^{n+1}}{9^n}$.

(e) Berechnen Sie: $\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$.

(9) (a) Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wann heißt f stetig in $x_0 \in (a,b)$?

(b) Geben Sie anhand einer Zeichnung ein Beispiel einer unstetigen Funktion und markieren Sie Punkte der Unstetigkeit der Funktion.

(c) Wann heißt eine Funktion gleichmäßig stetig?

(d) Zeigen Sie mittels (ε, δ)-Definition der Stetigkeit, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

in $x_0 = 0$ stetig ist. Ist diese Funktion gleichmäßig stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Untersuchen Sie mittels (ε, δ)-Definition der Stetigkeit, dass die Funktion

$$f : \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}, \;\; f(x) = (-1)^x x.$$

(f) Wann heißt eine Funktion monoton?

(g) Geben Sie ein Beispiel für eine nicht monotone Funktion $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$.

(10) (a) Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wann heißt f in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar? Wann heißt f differenzierbar?

(b) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion auf (a, b), die nicht differenzierbar ist (mit Begründung).

(c) Zeigen Sie anhand der Definition von Differenzierbarkeit, dass

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; f(x) = x^2 + 2x + 7$$

differenzierbar ist.

(d) Berechnen Sie (gegebenenfalls unter Ausnutzung von Ableitungsregeln) die Ableitung von:

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; f(x) = 2^{3(\ln x)^2}$$

(e) Sei $g : (a, b) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Funktion, die in $p \in (a, b)$ differenzierbar ist. Zeigen Sie die Differenzierbarkeit von $1/g$ in p und beweisen Sie eine Formel für die Ableitung von $1/g$ in p.

(11) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x \to p} \frac{x - \ln x}{x^2}$ für $p = 0$, $p = 1$, $p = \infty$.

(b) $\lim\limits_{x \to q} \frac{x^2 - e^{-3x}}{\ln x}$ für $q = 0$, $q = 1$, $q = \infty$.

(12) Seien $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-a} + \frac{x^6+1}{x-b},$$

für $x \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass die Funktion f mindestens eine Nullstelle in (a, b) hat.

Viel Erfolg!