Diskrete Schrödingeroperatoren - Notizen[1]

Daniel Lenz

[1] Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung

Inhaltsverzeichnis

Einleitung - Einige Gleichungen der mathematischen Physik 5

Teil 1. Operatoren auf endlichen Graphen 7

Etwas Notation und Wiederholung 9

Kapitel 1. Die Waermeleitungsgleichung auf $X = \{1, \ldots, N\}$ 11
1. Lösungen und Halbgruppen 11
2. Wärmeleitung 14
3. Asymptotik der Waermeleitung 23
4. Deutung der Markoveigenschaft 26

Kapitel 2. Die Poissongleichung auf $X = \{1, \ldots, N\}$ 29
1. Netzwerke und harmonische Funktionen 29
2. Das Dirichletproblem 32
3. Etwas Variationsrechnung 36
4. Resolventen und Minimierer 40
5. Das Poissonproblem 41

Kapitel 3. Untere Abschaetzungen fuer Dirichletformen auf $X = \{1, \ldots, N\}$ 43
1. Co-Area Formeln 43
2. Dirichlet Randbedingungen vs. Absorptionspotential 46
3. Eine untere Abschaetzung fuer die Form 47
4. Noch eine Abschaetzung fuer die Form 52
5. Abschaetzungen fuer den zweiten Eigenwert 54
6. Variationelle Charakterisierung der Cheeger Konstanten 57
7. Eine obere Abschaetzung fuer die Form 60

Kapitel 4. Einige konkrete Graphen 63
1. Einzelne Beispiele 63
2. Jacobi-Operatoren. 63

Teil 2. Operatoren auf unendlichen Graphen 73

Kapitel 5. Definition des Laplaceoperator auf unendlichen Graphen 75

Kapitel 6. Etwas zur Waermeleitungsgleichung 83
1. Halbgruppen und Loesungen der Waermeleitungsgleichung 83
2. Stochastische Unvollstaendigkeit 90

Kapitel 7. Die Schroedingergleichung 95
1. Schroedingergleichung und unitaere Gruppe 95

2. Das RAGE-Theorem 96

Einleitung - Einige Gleichungen der mathematischen Physik

Schrödingeroperatoren sind Operatoren der Form

$$H = L = -\Delta + V$$

(Hamiltonoperator, Laplaceoperator, eLLiptischer Operator). Dabei ist Δ der Laplacoperator. Er wirkt auf glatte Funktionen f mittels

$$\Delta f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_j}^2}(x).$$

Es ist V eine Funktion, und es gilt $(Vf)(x) = V(x)f(x)$.
Solche Operatoren treten in fundamentalen Gleichungen der Physik auf. Wir diskutieren das kurz anhand von drei Beispielen:

Die Waermeleitungsgleichung. (Diffusion)
Es geht um die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\psi = (-\Delta + V)\psi, \psi_0 = f.$$

Dabei beschreibt

$$\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto \psi_t(x)$$

die Verteilung der Menge eines Stoffes (Waerme, Tinte,...) im Laufe der Zeit unter einer Diffusion. Der Term $V \geq 0$ entspricht dabei einer Kuehlung.

Die verallgemeinerte Poissongleichung. (Elektrostatik)
Es geht um die Gleichung

$$(\Delta + \alpha)\varphi = \varrho.$$

Dabei ist die Ladungsverteilung $\varrho : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben und ϕ ist das elektrische Potential (Spannung), das durch diese Ladungsverteilung im Raum erzeugt wird.

Die Schroedingergleichung. (Quantenmechanik)
Es geht um die Gleichung

$$i\frac{d}{dt}\psi = (\Delta + V)\psi, \ \psi_0 = f.$$

Dabei beschreibt das Quadrat der Funktion $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsverteilung eines Teilchens in der Quantenmechanik im Laufe der Zeit. Es entspricht Δ der Operator der kinetischen Energie und V der Operator der potentiellen Energie.

Diese Gleichungen sind zunaechst auf $\mathbb{R}^d$ bzw. offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ enwickelt und untersucht worden. Es zeigt sich, dass wesentliche Eigenschaften aber schon durch geeignete diskreten Varianten studiert werden koennen. Darum geht es in dieser Vorlesung.

Teil 1

Operatoren auf endlichen Graphen

Etwas Notation und Wiederholung

Sei $N \in \mathbb{N}$ gegeben und $X = \{1, \ldots, N\}$. Wir betrachten den Vektorraum

$$\mathcal{H} = \{\text{Funktionen von } X \text{ nach } \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^n. \quad \textbf{Zeichnung}$$

Der Vektorraum $\mathcal{H}$ besitzt ein Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \sum_{x \in X} f(x) g(x).$$

Er ist vollstaendig bzgl. der induzierten Norm

$$\|f\| := \langle f, f \rangle^{1/2}$$

also ein Hilbertraum. Es gilt

$$f_n \to f :\Longleftrightarrow \langle (f - f_n), (f - f_n) \rangle \to 0$$

und man sieht leicht

$$f_n \to f \Longleftrightarrow f_n(x) \to f(x) \text{ fuer alle } x \in X.$$

Wir interessieren uns fuer lineare Abbildungen / Operatoren A von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$. Die Matrixelemente $A(x, y) = A_{x,y}$ von A sind dann charakterisiert durch

$$Af(x) = \sum_y A(x, y) f(y)$$

fuer $f \in \mathcal{H}$. Es gilt

$$A(x, y) = \langle 1_x, A 1_y \rangle, x, y \in X.$$

Auf den Operatoren wird durch

$$\|A\| := \max\{\|Af\| : \|f\| \leq 1\}$$

eine Norm eingefuehrt. Es gilt

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Weiterhin sieht man leicht, dass

$$A_n \to A \Longleftrightarrow A_n(x, y) \to A(x, y) \text{ fuer alle } x, y \in X.$$

Es heisst der Operator A selbstadjungiert, wenn gilt

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle$$

fuer alle $f, g \in \mathcal{H}$. Damit ist A genau dann selbstadjungiert, wenn fuer die Matrixelemente gilt $A(x, y) = A(y, x)$ fuer alle $x, y \in X$. Ist A selbstadjungiert mit Eigenwerten $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \lambda_k$ und zugehörigen Projektionen E_j auf die Eigenraeume so gilt

$$A = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j E_j$$

sowie

$$I = \sum_{j=1}^{k} E_j, \;\; E_j P_k = 0, j \neq k.$$

Wir definieren dann fuer $F : \sigma(A) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(A) := \sum_{j=1}^{k} F(\lambda_j) E_j.$$

Dann gilt:

- $id(A) = A$ und $1(A) = I$.
- $F(A) + G(A) = (F + G)(A)$
- $F(A)G(A) = (FG)(A)$.
- $F_n \to F$ punktweise impliziert $F(A) = \lim F_n(A)$.

Weiterhin gilt:

- Ist $P(x) = \sum_{l=1}^{n} c_l x^l$ ein Polynom, so gilt $P(A) = \sum_{l=0}^{n} c_l A^l$. (Nachrechnen!)
- Ist $F(z) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe, so gilt $F(A) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l A^l$. (Bew. Potenzreihe ist Grenzwert von Polynomen...)
- Fuer $\alpha \notin \sigma(A)$ gilt
$$(A - \alpha)^{-1} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j - \alpha} E_j = F_\alpha(A)$$
mit $F_\alpha(t) = \frac{1}{t-\alpha}$. (Bew. Zeige $(A - \alpha I) \sum = \sum (A - \alpha) = I$...)

Definition. *Ein Operator A auf $\mathcal{H}$ heisst*

- *positivitaetserhaltend, wenn fuer alle f mit $f \geq 0$, $f \neq 0$ gilt $Af \neq 0$, ($\Longleftrightarrow$....)*
- *positivitaetsverbessernd, wenn gilt $Af > 0$ fuer alle $f \geq 0$ mit $f \neq 0$, ($\Longleftrightarrow$....)*
- *Kontraktion, wenn gilt $A1 \leq 1$, ($\Longleftrightarrow$ ....)*
- *markovsch, wenn gilt $0 \leq Af \leq 1$ fuer alle f mit $0 \leq f \leq 1$ ($\Longleftrightarrow$....)*

Beachte: Es gibt noch eine andere Form der Positivitaet von Operatoren: $A \geq 0$ genau dann, wenn $\langle f, Af \rangle \geq 0$ fuer alle $f \in \mathcal{H}$ ($\Longleftrightarrow$ alle EW ≥ 0.)

KAPITEL 1

Die Waermeleitungsgleichung auf $X = \{1, \ldots, N\}$

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\psi_t = -B\psi_t,\ \psi_0 = f$$

auf X. Wir werden zunaechst zeigen, dass die Loesung durch $\psi_t = e^{-tB}f$ gegeben ist. Anschliessend untersuchen wir dann Eigenschaften von L, die es erlauben die Gleichung als Waermeleitungsgleichung zu deuten. Schliesslich werden wir uns mit dem Langzeitverhalten der Loesung beschaeftigen und eine Interpretation mittels Markovprozessen geben.

1. Lösungen und Halbgruppen

Sei B ein Operator auf $\mathcal{H}$. Definiere fuer $t \geq 0$ den Operator $P_t : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ durch

$$P_t = e^{-tB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} B^k.$$

Dann ist P_t nach t differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dt}P_t = BP_t.$$

(Denn:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}(P_t - P_0) &= \frac{1}{t}(P_t - I) \\
&= \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} B^k \\
&= -B\sum_{k=1} \frac{1}{k!}(-t)^{k-1}B^{k-1} \\
&= -B\left(I + t\sum_{k=2} \frac{1}{k!}(-t)^{k-2}B^{k-3}\right).
\end{aligned}$$

Das liefert leicht die gewuenschte Konvergenz.) Insbesondere ist dann fuer jedes $f \in \mathcal{H}$ die Abbildung

$$\psi : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{H}, t \mapsto P_t f$$

eine Loesung von

$$\frac{d}{dt}\psi_t = -B\psi_t, \psi_0 = f.$$

Diese Loesung ist eindeutig. (Denn: Sei $t \mapsto \phi_t$ eine Loesung. Betrachte $u_t := e^{tB}\phi_t$. Dann gilt $u_t^{'} \equiv 0$ und $u_0 = f$. Damit folgt $u \equiv f$ und damit $\phi_t =$

$e^{-tB}f$.) (Vgl. Vorlesung DGL oder Betrachtungen zur Exponentialfunktion.) Es gilt weiterhin

- $P_{t+s} = P_t P_s$ fuer alle $t, s \geq 0$, $P_0 = I$ d.h. P_t ist *Halbgruppe.* (Tastsaechlich handelt es sich sogar um eine Gruppe.)
- $P_t f \longrightarrow f$, $t \to 0$ für jedes $f \in \mathcal{H}$ d.h. P_t ist *stark stetig.* (Tatsaechlich ist P_t sogar analytisch.)

Es gilt sogar die Umkehrung.

THEOREM. *Sei $(P_t)_{t \geq 0}$ eine Familie von Operatoren auf $\mathcal{H}$. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es gibt einen Operator B auf $\mathcal{H}$ mit $P_t = e^{-tB}$.*
(ii) *Es ist $(P_t)_{t \geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe.*

In diesem Fall ist $t \mapsto P_t$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dt} P_t = B P_t.$$

Dann ist fuer jedes $f \in \mathcal{H}$ die Funktion $t \mapsto P_t f$ die eindeutige Loesung des Anfangswertproblems $\frac{d}{dt}\psi_t = -B\psi_t, \psi_0 = f$.

Bemerkung.

- Spezialisiert man auf den Fall eines einpunktigen X so erhaelt man die (aus der Analysis I unter Umstaenden bekannte) Aussage, dass eine stetige Funktion

$$E : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

  mit $E(0) = 1$ und $E(x + y) = E(x)E(y)$ die Form $E(x) = e^{ax}$ haben muss.
- Statt starker Stetigkeit koennte man auch nur Messbarkeit vorausetzen. Ohne jegliche Glattheitsvoraussetzung wird die Aussage bereits im einpunktigen Fall falsch (Betrachte $\mathbb{R}$ als Vektorraum ueber $\mathbb{Q}$...).

*B*eweis.
(i)$\Longrightarrow$ (ii): Das haben wir schon diskutiert. Ebenso haben wir schon diskutiert, wie aus (i) die letzte Aussage des Theorem folgt.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Die bisherigen Betrachtungen zeigen, wie der Operator B aus der Halbgruppe gewonnen werden kann. Das suggeriert den Ansatz $-Bf = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(P_t - I)f$. Allerdings wissen wir nicht, ob dieser Grenzwert existiert. Wir werden daher in zwei Schritten vorgehen: Zunaechst definieren wir den Unterraum U der f fuer die dieser Grenzwert existiert und zeigen dann dass dieser Unterraum schon ganz $\mathcal{H}$ ist.

Fuer kleine $t > 0$ ist P_t nahe an I also invertierbar. Aufgrund der Halbgruppeneigenschaft ist dann P_t fuer alle $t \geq 0$ invertierbar. Daher koennen wir mittels der Definition

$$P_t := (P_{-t})^{-1}$$

fuer $t < 0$, die Halbgruppe zu einer Abbildung P auf $\mathbb{R}$ fortsetzen. Diese Abbildung erfuellt nach Konstruktion die Gruppeneigenschaft

$$P_t P_s = P_{t+s}$$

fuer alle $t, s \in \mathbb{R}$. Weiterhin ist sie (stark) stetig bei $t = 0$ und damit (Gruppe!) stetig fuer alle t. Betrachte nun

$$U := \{f : \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(P_t f - f) \text{ existiert}\}.$$

Dann ist U ein Unterraum (!). Auf U definieren wir

$$Bf := - \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(P_t f - f).$$

Dann ist B ein linearer Operator (!).

Ende der 1. Vorlesung

Der Beweis erfolgt nun in drei Schritten.

Schritt 1: Fuer $f \in U$ gilt $\frac{d}{dt} P_t f = -BP_t f = -P_t Bf$ fuer alle $t \in \mathbb{R}$.
Bew.

$$\frac{d}{dt} P_t f = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(P_{t+h} - P_s) f = \lim_{h \to 0} P_t \frac{1}{h}(P_h - I) f = -P_t Bf.$$

Im letzten Schritt wird $f \in U$ und die Stetigkeit von P_t genutzt. Die eben gezeigte Existenz des Grenzwert liefert dann auch

$$-P_t Bf = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(P_{t+h} - P_s) f = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(P_h - I) P_t f.$$

Damit gilt $P_t f \in U$ und $BP_t f = P_t Bf$.

Schritt 2: U ist dicht in $\mathcal{H}$.
Bew. Sei

$$U' := \mathrm{Lin}\{\int_0^\delta P_s f ds : \delta > 0 \;\; f \in \mathcal{H}\}.$$

Dann ist U' ein Unterraum. Aufgrund der starken Stetigkeit ist U' dicht in U (Denn: $f \sim P_t f$, t *klein* $\Longrightarrow 1/\delta \int_0^\delta P_s f ds \sim 1/\delta \int_0^\delta f ds = f$.) Schliesslich ist $U' \subset U$:

$$P_t \int_0^\delta P_s f ds - \int_0^\delta P_s f ds = \int_t^{\delta + t} P_s f ds - \int_0^\delta P_s f ds = \int_\delta^{\delta + t} P_s f ds - \int_0^t P_s f ds.$$

Damit folgt aufgrund der starken Stetigkeit

$$\frac{1}{t}(\cdots) = \frac{1}{t} \int_\delta^{\delta + t} P_s f ds - \frac{1}{t} \int_0^t P_s f ds \longrightarrow P_\delta f - P_0 f.$$

Schritt 3: Es gilt $U = \mathcal{H}$.
Bew. Das folgt aus dem vorigen Schritt und der Eindlichdimensionalitaet von $\mathcal{H}$.

Schritt 3: $P_t = e^{-tB}$.
Bew. Setze $u_t := e^{tB} P_t f$. (z.z. $u_t \equiv f$). Offenbar gilt $u_0 = f$. Differenzieren ergibt

$$\frac{d}{dt} u_t = e^{tB} BP_t f - e^{-tB} BP_t f = 0,$$

also $u \equiv$ *constant*. Insgesamt folgt $u \equiv f$. □

Definition. *Ist $(P_t)_{t\geq 0}$ eine Halbgruppe mit $P_t = e^{-tB}$, so heisst B der Erzeuger der Halbgruppe. Ist B selbstadjungiert, so heisst die Halbgruppe eine symmetrische Halbgruppe.*

2. Wärmeleitung

In diesem Abschnitt lernen wir grundlegende Resultate von Beurling / Deny '57,'58 kennen. Damit wir die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\psi_t = -B\psi_t,\ \psi_0 = f$$

wirklich als Waermeleitungsgleichung deuten koennen, sollte fuer die zugehoerige Halbgruppe P_t, $t \geq 0$, einige Eigenschaften gelten:

- P_t ist symmetrisch fuer alle $t \geq 0$.
- P_t ist positivitaetserhaltend fuer jedes $t \geq 0$. ('Es kann nirgends negative Massse entstehen'.)
- P_t ist eine Kontraktion fuer jedes $t \geq 0$. ('Es kann keine Masse hinzukommen')

Ausserdem wird es fuer uns interessant sein, ob gilt:

- P_t ist positivitaetsverbessernd fuer jedes $t > 0$. ('Es wird alles ueberall hin transportiert'.)
- $P_t 1 \equiv 1$ fuer alle $t \geq 0$ ('Es verschwindet keine Masse'.)

Definition. *Eine symmetrische Halbgruppe $P_t = e^{-tL}$ heisst Markovhalbgruppe, wenn gilt*

$$0 \leq P_t f \leq 1$$

fuer alle $t \geq 0$ und $0 \leq f \leq 1$.

Wir werden nun positivitaetserhaltende bzw. Markovhalbgruppen untersuchen. Eine wichtige Rolle wird dabei die zu einem L zugeordnete Form

$$Q = Q_L : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ Q(f,g) = \langle f, Lg\rangle.$$

spielen. Es gilt: Ist L selbstadjungiert, so ist Q

- symmetrisch (d.h. es gilt $Q(f,g) = Q(g,f)$ fuer alle $f, g \in \mathcal{H}$) und
- bilinear (d.h. es gilt $Q(f_1 + \alpha f_2, g) = Q(f_1, g) + \alpha Q(f_2, g)$ (und entsprechend im zweiten Argument).

Ist umgekehrt $Q : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ symmetrisch und bilinear, so gibt es ein eindeutiges selbstadjungiertes L mit $Q(f,g) = \langle f, Lg\rangle$. Die Matrixelemente von L sind gegeben durch

$$L(x,y) = \langle 1_x, L1_y\rangle.$$

Die Ueberpruefung dieser Aussagen lassen wir als Uebung! Wir fuehren im Umgang mit einer Form Q noch folgende **Notation** ein

$$Q(f) := Q(f,f).$$

Theorem. *(Charakterisierung positivitaetserhaltender Halbbruppen - abstrakt) Sei L selbstadjungiert und Q gegeben durch $Q(f,g) := \langle f, Lg\rangle$. Dann sind äquivalent:*

(i) *$Q(|f|, |f|) \leq Q(f,f)$.*
(ii) *Die Resolvente $(L + \alpha)^{-1}$ ist positivitaetserhaltend fuer alle genugend grossen α (naemlich alle α mit $(L + \alpha) > 0$).*

(iii) *Die Halbgruppe e^{-tL} ist positivitaetserhaltend fuer alle $t \geq 0$.*

*B*eweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $\alpha > 0$ so gross, dass $(L+\alpha) > 0$ gilt. Sei $f \geq 0$ und $g := (L+\alpha)^{-1} f$. Mit $Q_\alpha(u,v) := Q(u,v) + \alpha(u,v)$ gilt dann

$$Q_\alpha(u+v, u+v) = Q_\alpha(u,u) + Q_\alpha(v,v) + 2Q_\alpha(u,v)$$

sowie

$$Q_\alpha(g,u) = \langle (L+\alpha)g, u\rangle = \langle f, u\rangle$$

fuer alle $u, v \in \mathcal{H}$. Damit folgt fuer alle $v \geq 0$

$$Q_\alpha(g+v) = Q_\alpha(g) + Q_\alpha(v) + 2\langle g, v\rangle \geq Q_\alpha(g) + Q_\alpha(v)$$

fuer alle $v \geq 0$. Wir zerlegen nun g in Positivteil und Negativteil

$$g_+ := \max\{g, 0\}, \;\; g_- := \max\{-g, 0\}.$$

Dann gilt also $g_\pm \geq 0$ sowie $g = g_+ - g_-$ und $|g| = g_+ + g_-$. **Zeichnung.** Mit $|g| = g + 2g_-$ und obigen Gleichungen folgt also

$$Q_\alpha(|g|) = Q_\alpha(g + 2g_-) \geq Q_\alpha(g) + 4Q_\alpha(g_-) \overset{(i)}{\geq} Q_\alpha(|g|) + 4Q_\alpha(g_-).$$

Wegen $Q_\alpha \geq 0$ folgt $Q_\alpha(g_-, g_-) = 0$. Da $(L+\alpha) > 0$ gilt, folgt nun $g_- = 0$, also $g = |g| \geq 0$. Das ist die Behauptung.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): Es gilt

$$e^{-t} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n}.$$

Damit folgt

$$e^{-tL} f = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t}{n} L\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t}(L + \frac{n}{t})^{-1}\right)^n f.$$

Damit folgt die gewuenschte Implikation.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Sei f gegeben. Da die Halbgruppe positivitaetserhaltend ist, folgt

$$|e^{-tL} f| = |e^{-tL} f_+ - e^{-tL} f_-| \leq |e^{-tL} f_+| + |e^{-tL} f_-| = e^{-tL} f_+ + e^{-tL} f_- = e^{-tL}|f|.$$

Damit ergibt sich

$$\langle P_t f, f\rangle \leq |\langle P_t f, f\rangle| \leq \langle P_t |f|, |f|\rangle$$

also, wegen $\langle f, f\rangle = \langle |f|, |f|\rangle$

$$\langle P_t f, f\rangle - \langle f, f\rangle \leq \langle P_t |f|, |f|\rangle - \langle |f|, |f|\rangle.$$

Nun folgt (ii) nach Division durch t durch Grenzwertbildung. $\square$

Ende der 2. Vorlesung

Bemerkung.

- Es gilt $Q(|f|, |f|) \leq Q(f, f)$ genau dann, wenn gilt $Q(f_+, f_-) \leq 0$ fuer alle $f \in \mathcal{H}$ (Uebung).
- Es ist e^{-tL} positivitaetserhaltend, genau dann, wenn gilt $|e^{-tL} f| \leq e^{-tL}|f|$ fuer alle f (vgl. letzten Teil des obigen Beweises). Damit gilt also nach dem Theorem: $Q(|f|) \leq Q(f)$ fuer alle f genau dann, wenn gilt $e^{-tL} f \leq e^{-tL}|f|$ fuer alle f.

THEOREM. *(Charakterisierung positivitaetserhaltender Halbgruppen - konkret) Sei L selbstadjungiert und $Q = Q_L$ die zugehoerige Form. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es ist e^{-tL} positivitaetserhaltend fuer alle $t \geq 0$.*
(ii) *Die nichtdiagonalen Matrixelement von L sind nichtpositiv (d.h. es gilt $L(x,y) \leq 0$ fuer all $x, y \in X$ mit $x \neq y$).*
(iii) *Es gibt $b : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ mit $b(x,y) = b(y,x)$ fuer alle $x, y \in X$ und $c : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit*
$$Lf(x) = \sum_y b(x,y)(f(x) - f(y)) + c(x)f(x)$$
fuer alle $f \in \mathcal{H}$.

In diesem Fall gilt (mit b aus (iii)) dann fuer alle $f, g \in \mathcal{H}$
$$Q(f,g) = \frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) + \sum c(x)f(x)g(x).$$

Beweis. Offenbar sind (ii) und (iii) aequivalent. Wir zeigen nun, dass (iii) die angegebene Form von Q impliziert. Es gilt:
$$\begin{aligned}
Q(f,g) &= \sum_{x\in X} Lf(x)g(x) = \sum_{x\in X}\left(\sum_{y\in X} b(x,y)(f(x) - f(y)) + c(x)f(x)\right) g(x)\\
&= \sum_{x,y\in X} b(x,y)(f(x) - f(y))g(x) + \sum_{x\in X} c(x)f(x)g(x)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{x,y\in X} b(x,y)(f(x) - f(y))g(x) + \frac{1}{2}\sum_{x,y\in X} b(x,y)(f(y) - f(x))g(y) + \sum_{x\in X} c(x)f(x)g(x)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{x,y\in X} b(x,y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) + \sum_{x\in X} c(x)f(x)g(x).
\end{aligned}$$
Dabei haben wir im dritten Schritt die Symmetrie von b genutzt.
(iii)$\Longrightarrow$ (i): Aus (iii) folgt, dass Q die angegebene Form hat. Aus der Dreiecksungleichung
$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$$
folgt
$$(|f(x)| - |f(y)|)^2 \leq (f(x) - f(y))^2.$$
Nimmt man das zusammen, so folgt (i).
(i)$\Longrightarrow$ (ii): Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$ beliebig und $f = 1_x - 1_y$ Aus (i) und dem vorigen Theorem folgt
$$Q(|f|, |f|) \leq Q(f,f).$$
Mit $|f| = 1_x + 1_y$ ergibt sich
$$Q(1_x, 1_x) + 2Q(1_x, 1_y) + Q(1_y, 1_y) \leq Q(1_x, 1_x) - 2Q(1_x, 1_y) + Q(1_y, 1_y).$$
Damit folgt
$$0 \geq Q(1_x, 1_y) = \langle 1_x, L1_y\rangle = L(x,y).$$
Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Die Aquivalenz zwischen (i) und (ii) gilt auch, wenn Selbstadjungiertheit von L nicht vorausgesetzt wird: e^{-tB} ist positivitaetserhaltend

fuer alle $t \geq 0$ genau dann, wenn alle Nichtdiagonalelemente von B nicht positiv sind.
Bew. $\Longrightarrow$: Sei e^{-tB} positivitaetserhaltend. Dann gilt fuer $x \neq y$

$$B(x,y) = -\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(P_t(x,y) - P_0(x,y)) = -\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}e^{-tB}(x,y) \leq 0.$$

$\Longleftarrow$: Wir wenden die sogenannte Lie-Produkt Formel (vgl. auch Trotter-Produkt Formel)

$$e^{C+D} = \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}C}e^{\frac{1}{n}D}\right)^n$$

an auf

$$-tB = -tB' - tD.$$

Dabei ist D eine Diagonalmatrix und B' entsteht aus B durch Nullsetzen der Diagonalelemente. Das liefert die gewuenschte Implikation.
(Beweis der Lie-Produkt Formel - Skizze: Setze $S_n := e^{\frac{1}{n}(C+D)}$, $T_n := e^{\frac{1}{n}C}e^{\frac{1}{n}D}$. Dann gilt (Teleskopsumme)

$$S_n^n - T_n^n = \sum_{m=0}^{n-1} S_n^m(S_n - T_n)T_n^{n-1-m}$$

also

$$\|S_n^n - T_n^n\| \leq c_1 n\|S_n - T_n\|.$$

Weiterhin gilt

$$\|S_n - T_n\| = \left\|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{C+D}{n}\right)^m - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{C}{n}\right)^k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{D}{n}\right)^l\right\| \leq c_2\frac{1}{n^2}.$$

Damit folgt die Formel.)

Bemerkung. Das Theorem legt es nahe, Operatoren L mit positivitaets-erhaltender Halbgruppe als diskrete Schroedingeroperatoren zu bezeichnen. Denn fuer die Form eines Schroedingeroperators $H = -\Delta + V$ auf $\mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned} Q_H(f,g) &= \langle f, Hg\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(-\Delta + V)g(x)dx \\ &\overset{(PI)}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\langle\nabla f(x), \nabla g(x)\rangle dx + \int_{\mathbb{R}^d} V(x)f(x)g(x). \end{aligned}$$

Fuer die Form eines L mit positivitaetserhaltenden Halbgruppe gilt

$$Q_L(f,g) = \langle f, Lg\rangle = \frac{1}{2}\sum_{x\in X}\sum_{y\in X} b(x,y)(f(x)-f(y)(g(x)-g(y)) + \sum_{x\in X} c(x)f(x)g(x).$$

Mit dem diskreten Gradienten $d_xf := (y \mapsto b(x,y)^{1/2}(f(x) - f(y)))$ schreibt sich das gerade als

$$Q_L(f,g) = \frac{1}{2}\sum_{x\in X}\langle d_xf, d_xg\rangle + \sum_{x\in X} c(x)f(x)g(x).$$

Die im Theorem auftretenden b und c koennen als Graph gedeutet werden:

DEFINITION. *(Graphen) Sei X eine endliche Menge. Ein Paar (b,c) mit $b : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ mit $b(x, y) = b(y, x)$ fuer alle $x, y \in X$ und $c : X \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst Graph über X. Die Elemente von X heissen die Vertices (Knoten) des Graph und $c(x)$ ist das Gewicht des Vertex x. Eine zweielementige Teilmenge $\{x, y\} \in X$ mit $b(x, y) = b(y, x) > 0$ heisst (ungerichtete) Kante mit Gewicht $b(x, y)$.* ***Zeichnung*** *Ein (x, y) mit $b(x, y) > 0$ heisst gerichtete Kante.*

Fuer uns werden Zusammenhangseigenschaften von Graphen interessant sein.

DEFINITION. *Sei (b, c) ein Graph ueber X.*

- *Es heisst dann x ein Nachbar von y und y Nachbar von x, wenn $\{x, y\}$ eine Kante ist. Dann schreibt man $x \sim y$.*
- *Eine Tupel $(x_0, x_1, \ldots, x_{x+1})$ mit $x_i \sim x_{i+1}$, $i = 0, \ldots, k$ heisst Pfad von x_0 nach x_{k+1}.*
- *Eine Teilmenge Y von X heisst zusammenhaengend, wenn es zwischen beliebigen Punkten der Menge einen Pfad in der Menge gibt.*
- *Eine Zusammenhangskomponente ist eine maximale zusammenhaengende Menge.*
- *Der Graph heisst zusammenhaengend, wenn es zwischen beliebigen Punkten einen Pfad gibt.*

DEFINITION. *Sei (b, c) ein Graph ueber X. Dann heisst $L : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ mit $Lf(x) = \sum b(x, y)(f(x) - f(y)) + c(x)f(x)$ der zum Graphen zugehoerige Operator.*

Ende der 3. Vorlesung.

FOLGERUNG. *Sei (b, c) ein Graph mit Vertexmenge X mit zugehoerigem Operator L. Dann ist e^{-tL} positivitaetsverbessernd fuer ein (alle) $t > 0$ genau dann, wenn der Graph zusammenhaengend ist.*

*B*eweis. $\Longrightarrow$: Zerfaellt (b, c) in zwei Teile, so gilt $L = L_1 \oplus L_2$ und

$$e^{-tL} = e^{-tL_1} \oplus e^{-tL_2}$$

kann nicht positivitaetsverbessernd sein.

$\Longleftarrow$: Sei $f \geq 0$ und $f \neq 0$. Sei

$$g : [0, \infty) \times X \longrightarrow [0, \infty), \;\; g_t(x) = e^{-tL} f(x).$$

Angenommen $g_{t_0}(x_0) = 0$ fuer ein $t_0 > 0$ und $x_0 \in X$. Dann hat $t \mapsto g_t(x_0)$ in t_0 ein Minimum. Damit gilt also

$$0 = g'_{t_0}(x_0).$$

Damit folgt

$$0 = Lg_{t_0}(x_0) = \sum_y b(x_0, y)(g_{t_0}(x_0) - g_{t_0}(y)) + c(x_0)g_{t_0}(x_0) = -\sum b(x_0, y)g_{t_0}(y).$$

Damit folgt aus $g \geq 0$ also $g_{t_0}(y) = 0$ fuer alle $y \sim x_0$. Da der Graph zusammenhaengend ist, folgt dann induktiv $g_{t_0} \equiv 0$. Das liefert dann $f = e^{tL} g_{t_0} \equiv 0$. $\square$

Bemerkung.

- Es handelt sich um eine Art Minimumsprinzip. Ist $c \equiv 0$, so kann man aehnlich zeigen, dass die nichtnegative Funktion g auf $(0, \infty) \times X$ kein Minimum annehmen kann.
- Uebung: Fuer eine positivitaetserhaltende Halbgruppe $P_t = e^{-tL}$ gilt: Es ist P_t, $t \geq 0$, positivitaetsverbessernd genau dann, wenn nur die trivialen Unterraeume von $\mathcal{H}$ unter der Halbgruppe und unter Multiplikation mit (beschraenkten) Funktionen aus $\mathcal{H}$ invariant sind.
- Positivitaestverbessernde Halbgruppen werden auch als ergodisch bezeichnet.

Wir charakterisieren nun Markovhalbgruppen. Dazu brauchen wir noch einen Begriff: Ein $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst normale Kontraktion, wenn gilt:

- $|C(x) - C(y)| \leq |x - y|$ fuer alle $x \in \mathbb{R}$.
- $C(0) = 0$ (aequivalent $|C(x)| \leq |x|$).

Beispiele. Betrag, Positivteil, Negativteil, C_I.
Bemerkung. Bei einem nochmaligen Blick auf die bisher gegebenen Beweise anhand dieser Beispiele sieht man, dass normale Kontraktionen schon eine prominente Rolle gespielt haben.

THEOREM. *(Charakterisierung Markovhalbgruppe - abstrakt) Sei L selbstadjungiert auf $\mathcal{H}$ und Q die zugehoerige Form. Dann sind aequivalent:*

(i) $Q(Cf, Cf) \leq Q(f, f)$ *fuer alle normalen Kontraktionen* $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
(i') $Q(|f|, |f|) \leq Q(f, f)$ *fuer alle* $f \in \mathcal{H}$ *und* $Q(g \wedge 1) \leq Q(g)$ *für alle* $g \geq 0$.
(ii) $L \geq 0$ *und* $0 \leq \alpha(L + \alpha)^{-1} f \leq 1$ *fuer alle* $\alpha > 0$.
(iii) $0 \leq P_t f \leq 1$ *fuer alle* $0 \leq f \leq 1$ *und* $t \geq 0$.

Bemerkung. Es gilt $\alpha(L + \alpha)^{-1} = (1 + \beta L)^{-1}$ mit $\beta = 1/\alpha$.

Beweis. (iii) $\Longrightarrow$ (i): Es gilt

$$Q(f) = \lim_{t \to 0} \frac{\langle (I - e^{-tL}) f, f \rangle}{t}.$$

Daher reicht es fuer alle $t > 0$

$$\langle Cf, (1 - e^{-tL}) Cf \rangle \leq \langle f, (1 - e^{-tL}) f \rangle$$

zu zeigen. Setze

$$\widetilde{b}(x, y) := \langle 1_x, (1 - e^{-tL}) 1_y \rangle.$$

Dann geht es also darum

$$(*) \quad \sum_{x,y} C(f(x)) C(f(y)) \widetilde{b}(x, y) \leq \sum_{x,y} f(x) f(y) \widetilde{b}(x, y)$$

zu zeigen. Wir werden $(*)$ zeigen, in dem wir fuer $\sum \widetilde{b}(x, y) z_x z_y$ eine andere Darstellung herleiten, der man diese Ungleichung direkt ansieht.

Sei

$$\widetilde{a}(x, y) := \langle 1_x, e^{-tL} 1_y \rangle.$$

Dann sind $\widetilde{a}$ und $\widetilde{b}$ symmetrisch und es gilt

$$\widetilde{b}(x, y) = \delta_{x,y} - \widetilde{a}(x, y).$$

Weiterhin gilt

- $\widetilde{a} \geq 0$ (da e^{-tL} positivitaetserhaltend ist) sowie
- $\sum_{x \in X} \widetilde{a}(x, y) = \sum_{x \in X} \langle 1_x, e^{-tL} 1_y \rangle = \langle 1_x, e^{-tL} 1 \rangle \leq 1$ fuer jedes $x \in X$ (wegen $e^{-tL} 1 \leq 1$).

(An dieser Stelle sind die Voraussetzungen (iii) eingegangen.) Damit folgt

$$\widetilde{c}(x) := 1 - \sum_{y \in X} \widetilde{a}(x, y) \geq 0.$$

Eine kleine Rechnung liefert dann (!)

$$\sum_{x,y} z_x z_y \widetilde{b}(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{x,y} \widetilde{a}(x, y)(z_x - z_y)^2 + \sum_x \widetilde{c}_x |z_x|^2.$$

Wegen $\widetilde{a} \geq 0$ und $\widetilde{c} \geq 0$ folgt aus dieser Darstellung sofort die gewuenschte Ungleichung $(*)$.

Es bleibt (!) zu zeigen: Das folgt durch einen Vergleich der bei $z_x z_y$ auftretenden Koeffizienten. Dabei ist es sinnvoll den Fall $x = y$ und $x \neq y$ zu unterscheiden...

(i)$\Longrightarrow$ (i'): Das ist klar.

(i')$\Longrightarrow$ (ii): Wir zeigen zunaechst $L \geq 0$. Fuer jedes $n > 0$ gilt

$$Q(f) \geq Q(|f|) = \frac{1}{n^2} Q(\alpha |f|) \geq \frac{1}{\alpha} Q((n|f|) \wedge 1).$$

Fuer $n \to \infty$ konvergiert $(\alpha |f|) \wedge 1$ gegen $1_{\{f \neq 0\}}$. Damit konvergiert, dann $Q((n|f|) \wedge 1)$ fuer n gegen ∞ ebenfalls.

Wir kommen nun zu den Ungleichungen fuer die Resolvente. Man beachte, dass wegen $L \geq 0$ auf jeden Fall $(L + \alpha)^{-1}$ existiert fuer $\alpha > 0$ und dass nach der Bemerkung vor dem Beweis gilt $\alpha(L + \alpha)^{-1} = (1 + sL)^{-1}$ mit einem $s > 0$.

Sei $0 \leq f \leq 1$ und $g = (1 + sL)^{-1} f$. Es ist $0 \leq g \leq 1$ zu zeigen. Aufgrund der Vertraeglichkeit von Q mit $| \cdot |$ und dem schon gezeigten Theorem zur Charakterisierung der Positivitaetserhaltung, gilt $0 \leq g$. Es bleibt also $g \leq 1$ zu zeigen. Wir setzen $h := g \wedge 1$. Zu zeigen $h = g$: Es gilt

$$\begin{aligned}
\|(1 + sL)^{1/2}(g - h)\|^2 &= \langle (1 + sL)^{1/2} g, (1 + sL)^{1/2} g \rangle - 2\langle (1 + sL)^{1/2} g, (1 + sL)^{1/2} h \rangle + \|(1 \\
(g = (1 + sL)^{-1} f) \quad &= \langle g, f \rangle - 2\langle f, h \rangle + \|h\|^2 s Q(h) \\
&= \langle g, f \rangle - \|f\|^2 + \|f - h\|^2 + sQ(h) \\
h - - > g : (0 \leq f \leq 1,\ (i')) \quad &\leq \langle g, f \rangle - \|f\|^2 + \|f - g\|^2 + sQ(g) \\
&\leq \langle g, f \rangle - \|f\|^2 + \|f - g\|^2 + \langle sL(1 + sL)^{-1} f, g \rangle \\
(sL = -1 + (1 + sL)) \quad &= 2\langle g, f \rangle - \|f\|^2 + \|f - g\|^2 - \|g\|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ende der 4. Vorlesung.

Da $(1 + sL)^{1/2}$ injektiv ist, folgt $h = g$.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): Das folgt aus der schon bekannten Formel

$$e^{-tL} f = \lim_{n \to \infty} \Big(\frac{n}{t} (L + \frac{n}{t})^{-1} \Big)^n f.$$

□

Bemerkung. Man kann zeigen, dass (i) bzw. (i') dazu äquivalent sind, dass fuer die Abbildung

$$C_I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, C_I(x) = \text{Projektion von } x \text{ auf } [0,1]$$

gilt $Q(C_I f, C_I f) \leq Q(f,f)$ fuer alle $f \in \mathcal{H}$. (Uebung).

DEFINITION. *Eine symmetrische bilineare Abbildung Q von $\mathcal{H}$ nach $\mathbb{R}$ heisst Dirichletform, wenn gilt*

$$Q(Cf, Cf) \leq Q(f,f)$$

fuer alle $f \in \mathcal{H}$ und alle normalen Kontraktionen $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

FOLGERUNG. *Sei $Q : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ symmetrisch und bilinear und L der zugehoerige Operator. Dann sind aquivalent:*

(i) *Q ist eine Dirichletform.*
(ii) *Es ist e^{-tL} eine Markovhalbgruppe.*

THEOREM. *(Charakterisierung Dirichletformen / Markovhalbgruppe - konkret) Sei Q auf $\mathcal{H}$ symmetrisch und bilinear und L der zugehoerige Operator. Dann sind aquivalent:*

(i) *Es ist e^{-tL} eine Markovhalbgruppe.*
(ii) *Die Nichtdiagonalelemente von L sind nichtpositiv und alle Zeilensummen sind nichtnegativ.*
(iii) *Es gibt $b : X \times X \longrightarrow [0,\infty)$ mit $b(x,y) = b(y,x)$ fuer alle $x, y \in X$ und $c : X \longrightarrow [0,\infty)$ mit*

$$Lf(x) = \sum_{y \in X} b(x,y)(f(x) - f(y)) + c(x)f(x).$$

In diesem Fall gilt (mit b aus (iii)) dann fuer alle $f, g \in \mathcal{H}$

$$Q(f,g) = \frac{1}{2} \sum_{x,y} b(x,y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) + \sum c(x)f(x)g(x).$$

Beweis. Die Aequivalenz von (ii) und (iii) ist klar. Damit folgt dann einfach die Aussage zur Darstellung von Q (vgl. konkrete Charakterisierung der Positivitätserhaltung).

(i)$\Longrightarrow$ (ii): Es reicht die Aussage ueber die Zeilensummen zu beweisen. Es gilt

$$\text{Zeilensumme der } x\text{-ten Zeile } = \langle L1, 1_x \rangle = -\lim_{t \to 0} \langle \frac{1}{t}(e^{-tL}1 - 1), 1_x \rangle \geq 0.$$

(iii)$\Longrightarrow$ (i): Aus der (aus (iii) folgenden) Form von Q ergibt sich sofort $Q(Cf) \leq Q(f)$ fuer alle f und alle normalen Kontraktionen C. Damit folgt nach dem vorausgehenden Theorem dann (i).

□

Bemerkung.

- Es ist instruktiv aus (i') des Theorems zur abstrakten Charakterisierung der Markovhalbgruppe die Aussage ueber die Zeilensummen herzuleiten: Sei $\delta > 0$ und $f = 1 + \delta 1_x$. Dann gilt nach (i')

$$Q(1,1) \leq Q(f,f) = Q(1,1) + 2\delta Q(1,1_x) + \delta^2 Q(1_x,1_x).$$

Damit folgt

$$0 \leq Q(1,1_x) + \delta Q(1_x,1_x)$$

fuer alle $\delta > 0$. Das liefert

$$0 \leq Q(1,1_x) = \langle 1, L1_x \rangle = \langle L1, 1_x \rangle = \text{Zeilensumme der } x\text{-ten Zeile}.$$

- Der Beweis von (iii)$\Longrightarrow$ (i) des Theorems zur abstrakten Charakterisierung der Markovhalbgruppe ist dem Ausrechnen von Q in diesem Theorem verwandt.

Wir untersuchen nun die Gültigkeit von $e^{-tL}1 = 1$. Es zeigt sich, dass dem System durch positives c Masse entzogen wird.

Theorem. *(Charakterisierung $e^{-tL}1 = 1$) Sei e^{-tL} eine symmetrische Markovhalbgruppe und (b,c) der zugehoerige Graph. Sei (b,c) zusammenhaengend. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gilt $e^{-t_0 L}1(x_0) = 1$ fuer ein $t_0 > 0$ und $x_0 \in X$.*
(ii) *Es gilt $e^{-tL}1 = 1$ fuer alle $t \geq 0$.*
(iii) *Es gilt $c = 0$.*

*B*eweis. Sei $u_t := e^{-tL}1$.

(iii)$\Longrightarrow$ (ii): Gilt $c \equiv 0$, so folgt fuer $u_t = e^{-tL}1$ sofort $u_t' = e^{-tL}L1 = 0$, also $u = constant = u_0 = 1$.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Das ist klar.

(i)$\Longrightarrow$ (iii): Da e^{-tL} eine Markovhalbgruppe ist, nimmt $t \mapsto u_t(x_0)$ in $t_0 > 0$ ein Maximum an. Damit folgt

$$0 = u_{t_0}'(x_0).$$

Damit folgt

$$0 = \sum_y b(x_0,y)(u_{t_0}(x_0) - u_{t_0}(y)) + c(x_0).$$

Damit folgt $c(x_0) = 0$ und $u_{t_0}(y) = u_{t_0}(x_0) = 1$ fuer alle $y \sim x_0$. Da der Graph zusammenhaengend ist, folgt induktiv dann (iii). $\square$

Man kann das auch so interpretieren (siehe auch folgender Abschnitt), dass ein x_0 mit $c(x_0) > 0$ das Spektrum hebt:

Folgerung. *(Charakterisierung $c = 0$) Sei e^{-tL} eine symmetrische Markovhalbgruppe und (b,c) der zugehoerige Graph. Sei (b,c) zusammenhaengend. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gilt $\min \sigma(L) = 0$.*
(ii) *Es gilt $c \equiv 0$.*

*B*eweis. (ii)$\Longrightarrow$ (i) Gilt $c \equiv 0$, so ist 1 eine Eigenfunfunktion von L zum Eigenwert 0.

(i)$\Longrightarrow$ (ii): Nach (i) ist L nicht injektiv. Es gibt also ein $f \neq 0$ mit $Lf = 0$. Damit folgt also $Q(f,f) = \langle f, Lf\rangle = 0$ also

$$0 = \frac{1}{2}\sum_{x,y\in X} b(x,y)(f(x)-f(y))^2 + \sum_{x\in X} c(x)f(x)^2.$$

Da beide Terme nichtnegativ sind, folgt

$$0 = \sum_{x,y\in X} b(x,y)(f(x)-f(y))^2 \text{ und } 0 = \sum_{x\in X} c(x)f(x)^2.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $f \equiv constant$. Wegen $f \neq 0$ folgt $constant \neq 0$. Damit folgt (wegen $c \geq 0$) dann aus der zweiten Gleichung $c \equiv 0$. $\square$

Bemerkung. Anders als unsere abstrakten Erwägungen gelten die vorherigen Aussagen nicht für unendliche Graphen. Was tatsächlich gilt, ist ein Thema aktueller Forschung.

3. Asymptotik der Waermeleitung

In diesem Abschnitt betrachten wir eine positivitaetsverbessernde symmetrische Halbgruppe $P_t = e^{-tL}$, $t \geq 0$, und untersuchen das Verhalten fuer $t \to \infty$.

Sei $L = \sum_{j=1}^k \lambda_j E_j$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k$ und den zugehoerigen spektralen Projektionen E_j. Dann gilt also

$$e^{-tL} = \sum_{j=1}^k e^{-t\lambda_j} E_j.$$

Damit folgt

$$e^{t\lambda_1} P_t = E_1 + \sum_{j=2}^k e^{-t(\lambda_j - \lambda_1)} E_j.$$

Das impliziert

$$\|e^{t\lambda_1} P_t - E_1\| \leq e^{-t(\lambda_2-\lambda_1)},$$

da die E_j paarweise orthogonal:

$$\begin{aligned}
\|(e^{t\lambda_1}P_t - E_1)f\|^2 &= \sum_{m,n=2}^k e^{-t(\lambda_m-\lambda_1)} e^{-t(\lambda_n-\lambda_1)} \langle E_m f, E_n f\rangle \\
(E_n \text{ paarw. orthogonal}) \quad &= \sum_{m=2}^k e^{-t2(\lambda_m-\lambda_1)} \|E_m f\|^2 \\
&\leq e^{-2\alpha t} \sum_{m=1}^n \|E_m f\|^2 \\
(E_m \text{ paarw. orthogonal}) \quad &= e^{-2\alpha t} \|\sum_{m=1}^n E_m f\|^2 \\
&= e^{-2\alpha t}\|f\|^2.
\end{aligned}$$

Es konvergiert also $e^{t\lambda_1} P_t$ exponentiell schnell gegen E_1.

LEMMA. *Sei $P_t = e^{-tL}$ eine positivitaetserhaltende Halbgruppe und E_1 die Projektion auf den Eigenraum zum untersten Eigenwert λ_1, so*

$$\|e^{-t\lambda_1} P_t - E_1\| \leq e^{-t\alpha}$$

mit $\alpha = \lambda_2 - \lambda_1$. Insbesondere folgt

$$\|P_t - E_1\| \leq e^{-t\alpha}$$

falls $\lambda_1 = 0$.

Ende der 5. Vorlesung

Wir untersuchen nun E_1.

THEOREM. *(Perron-Frobenius) Sei P_t, $t \geq 0$, eine positivitaetsverbessernde symmetrische Halbgruppe mit Erzeuger L. Sei λ_1 der kleinste Eigenwert von L und E_1 der zugehoerige Eigenprojektor. Dann ist der Eigenraum zu λ_1 eindimensional und es existiert eine eindeutige strikt positive Eigenfunktion e mit $E_1 = \langle e, \cdot \rangle e$ d.h.*

$$E_1 f = \langle e, f \rangle e = (x \mapsto \sum_y e(x)e(y)f(y))$$

fuer alle $f \in \mathcal{H}$.

*B*eweis. Wir zeigen zunaechst, dass jede Eigenfunktion zu λ_1 strikt positiv oder strikt negativ ist:
Offenbar ist ein normiertes u genau dann eine Eigenfunktion zu λ_1, wenn gilt

$$\lambda_1 = Q(u).$$

($\Longrightarrow$: klar.
$\Longleftarrow$: Es gilt

$$Q(u) = \langle u, Lu \rangle = \langle u, \sum \lambda_j E_j u \rangle = \sum \lambda_j \|E_j u\|^2$$

mit $\sum \|E_j u\|^2 = \|u\|^2 = 1$. Damit folgt die Aussage.)
Sei nun f eine normierte Eigenfunktion zu λ_1. Dann gilt

$$\lambda_1 = Q(f) \geq Q(|f|) \geq \lambda_1.$$

Damit folgt also

$$\lambda_1 = Q(|f|).$$

Da $|f|$ ebenfalls normiert ist, liefert dies, dass $|f|$ ebenfalls eine Eigenfunktion zu λ_1.
Wir zerlegen nun f in Positivteil f_+ und Negativteil f_-. Mit f und $|f|$ sind dann also

$$f_+ = \frac{1}{2}(f + |f|), \;\; f_- = \frac{1}{2}(|f| - f_+)$$

ebenfalls Eigenfunktionen zu λ_1 (oder verschwinden). Sei o.E. $f_+ \neq 0$. Da P_t positivitaetsverbessernd ist, gilt dann

$$0 < P_1 f_+ = e^{-\lambda_1} f_+.$$

Damit folgt also

$$f_+ > 0 \;\text{ und }\; f_- = 0.$$

Diese Ueberlegung zeigt, dass jede Eigenfunktion zu λ_1 ein festes striktes Vorzeichen hat (also entweder strikt positiv oder strikt negativ ist).

Damit folgt sofort, dass der Eigenraum zu λ_1 eindimensional ist (da Eigenfunktionen mit striktem Vorzeichen nicht aufeinander senkrecht stehen koennen).

Da der Eigenraum zu λ_1 eindimensional ist, gilt natuerlich

$$E_1 f = \langle e, f\rangle e$$

fuer jede normierte Eigenfunktion e. Damit hat ein normiertes strikt positives e die gewuenschten Eigenschaften. $\square$

Bemerkung. Sei $P_t = e^{-tL}$ positivitaetserhaltend und (b, c) der zu L gehoerige Graph.

- Ist P_t sogar positivitaetsverbessernd (also der Graph zusammenhaengend) und $c = 0$, so folgt durch Untersuchen von
$$0 = Q(f) = \frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x, y)(f(x) - f(y))^2$$
sofort, dass der Eigenraum zu 0 nur aus den konstanten Funktionen besteht.
- Ist $c = 0$, so ist die Vielfachheit des Eigenwertes 0 gerade die Anzahl der Zusammenhangskomponenten des Graphen. (Uebung)
- Ist $P_t = e^{-tL}$ nicht positivitaetsverbessernd, so ist zerfaellt der zu L zugehoerige Graph (b, c) in meherere Komponenten. Dann kann man auf jeder einzelenen Komponenten obige Aussage anwenden.

Definition. *Sei P_t, $t \geq 0$, eine symmetrische positivitaetsverbessernde Halbgruppe. Dann heisst λ_1 die Grundzustandsenergie und e der Grundzustand.*

Aus dem Lemma und dem Theorem koennen wir nun das Hauptergebnis dieses Abschnittes herleiten.

Theorem. *Sei P_t, $t \geq 0$, eine positivitaetsverbessernde symmetrische Halbgruppe mit Grundzustandsenergie λ_1 und Grundzustand e. Dann gilt:*

- $\lim_{t\to\infty} \frac{\ln P_t(x,y)}{t} = -\lambda_1$ *fuer alle $x, y \in X$.*
- *Es gilt*
$$|e^{t\lambda_1} P_t(x, y) - e(x)e(y)| \leq e^{-t\alpha}$$
fuer $\alpha = \lambda_2 - \lambda_1 > 0$.

Beweis. *Zweite Aussage:* Nach dem vorangehenden Theorem gilt $E_1(x, y) = e(x)e(y)$. Damit folgt die zweite Aussage aus dem ersten Lemma des Abschnittes.

Erste Aussage: Aus der schon bewiesenen zweiten Aussage folgt die Abschaetzung

$$e(x)e(y) - Ce^{-t\alpha} \leq e^{t\lambda_1} P_t(x, y) \leq e(x)e(y) + Ce^{-t\alpha}.$$

Da e strikt positiv ist nach dem vorangehenden Theorem, folgt die erste Aussage nun nach Logarithmieren und Dividieren durch t durch Bilden des Grenzwertes. $\square$

Folgerung. *Ist P_t, $t \geq 0$, eine positivitaetsverbessernde symmetrische Halbgruppe mit Grundzustandsenergie $\lambda_1 = 0$, so gilt*

$$|P_t(x,y) - \frac{1}{N}| \leq e^{-t\alpha}$$

mit $\alpha = \lambda_2 - \lambda_1$.

*B*eweis. Aus $\lambda_1 = 0$ folgt, $c \equiv 0$ und damit $e = 1$. Nun folgt die Aussage aus dem vorigen Theorem. $\square$

Bemerkung. In der Situation der Folgerung erhalte man exponentielle Konvergenz gegen den Grundzustand 1. Die Konvergenzrate haengt dabei vom Abstand der ersten beiden Eigenwerte zueinander (*'Spektrale Luecke', 'Spectral gap'*) ab.

4. Deutung der Markoveigenschaft

Markovprozesse spielen eine wichtige Rolle in Physik und Mathematik. Sie führen auf Markovsche Halbgruppen und das ist ein wesentliche Motivation zur Untersuchung Markovscher Halbgruppen. In diesem Abschnitts werden wir in diesem Sinne eine 'Deutung' der Markoveigenschaft einer Halbgruppe geben. Dazu diskutieren wir Markovprozesse, ohne diese allerdings mathematisch praezise zu konstruieren.

Skizze / Vorgehen. $(a,w) \overset{Stochastik}{---->}$ Markovprozess $\overset{s.u.}{---->}$ Markovhalbgruppe $(P_t) \overset{Theorem}{---->} L = \frac{d}{dt}P_t$. Anschliessend untersuchen wir die Umkehrung $L ---> (a,w)$.

Ein Markovprozess in stetiger Zeit auf der diskreten Menge X modelliert einen Vorgang, bei dem ein Teilchen von Punkt zu Punkt aus $X \cup \{\infty\}$ springt. Dabei sind zu jedem Punkt $x \in X$ zwei Groessen gegeben, naemlich

- eine Zahl $a_x > 0$ und
- eine Funktion $w_x : X \setminus \{x\} \longrightarrow [0,\infty)$ mit $\sum w_x(y) \leq 1$.

Das Teilchen bewegt sich nach folgendem Verfahren:

Schritt1: Ist das Teilchen in ∞ so macht es gar nichts. Ist das Teilchen in einem Punkt $x \in X$ angekommen, so fuehrt es zunächst zwei unabhaengige Zufallsexperimente durch:

- Es 'wuerfelt' eine Wartezeit aus gemaess einer Exponentialverteilung mit Parameter a_x (d.h. Wkeit zur Zeit t noch in x zu sein $= e^{-ta_x}$).
- Es entscheidet sich fuer das Sprungziel $y \neq x$ mit Wahrscheinlichkeit $w_x(y)$ und fuer das Sprungziel ∞ mit Wahrscheinlichkeit $1 - \sum_z w_x(z)$.

Anschliessend wartet das Teilchen die gewuerfelte Wartezeit und springt dann zum Sprungziel.
Schritt 2: Das Verfahren wird mit Schritt 1 fortgesetzt.

Ende der 6. Vorlesung

Wichtig. Bei diesem Verfahren hängen Wartezeit und Sprungziel nur vom momentanen Ort des Teilchens ab und nicht von seiner Vorgeschichte.

Bemerkung. Es gibt auch Prozesse bei denen die Sprunzeit fest gewaehlt wird (z.b. 1). Diese heissen Markovprozesse in diskreter Zeit oder auch Markovketten.

Falls es ueberhaupt einen stochastischen Prozess gibt, der dieses Verhalten realisiert, so **sollten** die Uebergangswahrscheinlichkeiten

$$P_t(x,y) = \text{Wahrscheinlichkeit bei Start in } x \text{ zur Zeit } t \text{ in } y \text{ zu sein}$$

die folgenden Eigenschaften haben:

- Die Operatoren P_t auf $\mathcal{H}$ erfuellen $P_t P_s = P_{t+s}$ d.h.
$$P_{t+s}(x,y) = \sum P_t(x,z) P_s(z,y).$$
(Unabhaengigkeit von Vorgeschichte)
- $P_t(x,y) \geq 0$ alle x,y sowie $\sum_y P_t(x,y) \leq 1$. (Wahrscheinlichkeiten)
- $P_t(x,y) = P_t(y,x)$. (Reversibilitaet)
- $\lim_{t\to 0} P_t 1_x = 1_x$. (Stetigkeit (reicht Messbarkeit))

Damit bilden die P_t eine symmetrische Markovhalbgruppe. Diese wird nach dem Hauptergebnis des zweiten Abschnitts gerade von einer Dirichletform mit Generator $L = L_{b,c}$ erzeugt. Es gilt also $P_t = e^{-tL}$. Wir werden nun untersuchen, wie die Kenngrößen des Markovprozesses (a,w) mit den Matrixelementen von L zusammenhängen. Es ist nach dem ersten Satz des zweiten Abschnittes die Halbgruppe differenzierbar, und es gilt

$$-L(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(P_t(x,y) - 1_{x,y})$$

fuer alle $x,y \in X$. Diese Gleichung laesst sich folgendermassen interpretieren:

Fall 1. $x = y$. Fuer sehr kleine Zeiten ist das Auftreten von zwei Spruengen sehr unwahrscheinlich. Damit gilt dann

$$P_t(x,x) \sim \text{ Wkeit zur Zeit } t \text{ noch nicht gesprungen zu sein} = e^{-a_x t},$$

also

$$-L(x,x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^{-a_x t} - 1) = -a_x.$$

Anders gesagt:

$$a_x = L(x,x) = \sum_z b(x,z) + c(x).$$

Fall 2. $x \neq y$. Fuer sehr kleine Zeiten ist das Auftreten von zwei Spruengen sehr unwahrscheinlich. Damit gilt dann

$$\begin{aligned} P_t(x,y) &\sim \text{ Wkeit(Bis zur Zeit } t \text{ wurde erster Sprung mit Ziel } y \text{ ausgefuehrt)} \\ &= \text{Wkeit(Sprungzeit} \leq t \text{) Wkeit (Ziel des ersten Sprung ist } y) \\ &= (1 - e^{-a_x t}) w_x(y). \end{aligned}$$

Hier verwenden wir im mittleren Schritt, dass Sprungzeit und Sprungziel unabhaengig voneinander ausgewuerfelt wurden. Es folgt

$$b(x,y) = -L(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(1 - e^{-a_x t}) w_x(y) = a_x w_x(y).$$

Anders gesagt

$$w_x(y) = \frac{b(x,y)}{a_x} = \frac{b(x,y)}{\sum_z b(x,z) + c(x)} = \frac{-L(x,y)}{L(x,x)}.$$

In dieser Interpretation kodieren also

- die Diagonalelement von L die Verteilung der Sprungzeit
- die Nebendiagonalelemente die relativen Wahrscheinlichkeiten fuer die Sprungziele.

Bemerkung. Sind $b_1, b_2 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ verschieden mit

$$\frac{b_1(x,y)}{\sum_z b_1(x,z)} = \frac{b_2(x,y)}{\sum_z b_2(x,z)}$$

fuer alle $x, y \in X$, so kodieren die zugehoerigen Halbgruppen dieselbe Statistik der Sprungziele, also insbesondere die selben 'Orbits'. Es unterscheiden sich aber die Zeiten, in denen diese durchlaufen werden.

Im Bild der Markovprozesse kann man (oft) die Resultate ueber Markovhalbgruppen gut deuten. Insbesondere kann man sofort verstehen, wie

- Zusammenhang des Graphen die Positivitaetsverbesserung bewirkt,
- ein x mit $c(x) > 0$ dem System 'Masse' entzieht, also zu $P_t 1 < 1$ beitraegt.

KAPITEL 2

Die Poissongleichung auf $X = \{1, \ldots, N\}$

In diesem Abschnitt geht es um die Gleichung

$$(L + \alpha)u = \varrho$$

auf X mit L wie im vorigen Abschnitt. Dabei sind $\alpha \geq 0$ und ϱ gegeben und u gesucht. Ein wichtiger Spezialfall wird durch die Wahl $\alpha = 0$ und $\varrho = 0$ gegeben. Dann heissen die entsprechenden u mit $Lu = 0$ harmonisch.

1. Netzwerke und harmonische Funktionen

Wir beginnnen mit etwas **Notation.**
Graphen $(b, 0)$ über $X = \{1, \ldots, N\}$ und schreiben wir auch als (X, b) (und nennen sie dann *Netzwerk*). Ein Paar $(x, y) \in X \times X$ mit $b(x, y) > 0$ heisst dann eine *gerichtete Kante*. Fuer eine gerichtete Kante $e = (x, y)$ definieren wir den Ausgangspunkt $x = s(e)$ (Source) und den Zielpunkt $y = r(e)$ (Range) und definieren die umgekehrte Kante $\overline{e}$ durch $\overline{e} = (y, x)$. Die Menge aller Kanten bezeichnen wir mit $E = E(X, b)$.
Ein Tupel $(e_1, \ldots, e_n)$ von Kanten heisst ein *Zykel*, wenn gilt

$$r(e_j) = s(e_{j+1}), j = 1, \ldots, n,$$

wobei wir setzen $e_{n+1} = e_1$.
Die Funktion

$$w : E \longrightarrow \mathbb{R}, w((x, y)) = \frac{1}{b(x, y)}$$

heisst die *Resistenz*. Dann wird b auch die *Konduktanz* genannt.
Eine Abbildung

$$\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

heisst *Fluss*, wenn gilt $\phi(e) = -\phi(\overline{e})$. Die *Energie* (besser Leistung) eines Flusses ϕ ist definiert als

$$\mathcal{E}(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{e \in E} \phi(e)^2 w(e).$$

Idee. Uns wird es im folgenden um Fluesse und Funktionen auf einem Netzwerk gehen. Dabei ist es hilfreich sich Stromfluesse in einem System von Draehten bzw. Wasserfluesse in einem System von Röhren vorzustellen:
Zeichnung.
- Funktionen auf den Knoten entsprechen Spannungen d.h. Potentialgefällen oder Druck bzw. Hoehenunterschieden.
- Fluesse entsprechen Stromfluessen oder Wasserflüsse
- Widerstaende entsprechen ohmschen Widerstaenden bzw. der Dicke der Röhre.

Es gilt das Ohmsche Gesetz $U/I = R$.

DEFINITION. *Sei (X, b) ein Netzwerk und $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Fluss. Dann genügt ϕ der Kirchoffschen Zykel Regel (KZR) (auch Kirchhoffsche Maschen Regel), wenn gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} \phi(e)w(e) = 0$$

fuer jeden Zykel $(e_1, \ldots, e_n)$. ***Zeichnung.***

Beispiel. Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist $\Phi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\Phi_f(e) = (f(r(e)) - f(s(e)))b(s(e), r(e)) = \frac{f(r(e)) - f(s(e))}{w(e)}$$

ein Fluss, der der Kirchhoffsche Zykel Regel genuegt. Er heisst der durch f induzierte Fluss. Es gilt

$$\Phi_{f+\lambda g} = \Phi_f + \lambda \Phi_g.$$

Bew. Das ist mehr oder weniger klar.

Tatsaechlich ist das nicht nur e i n Beispiel eines Flusses mit Kirchhoffsche Zykel Regel sondern sogar d a s Beipsiel eines Flusses mit Kirchhoffsche Zykel Regel , wie die folgende Proposition zeigt.

PROPOSITION. *Sei (X, b) ein Netzwerk und ϕ ein Fluss. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es genügt ϕ der Kirchhoffsche Zykel Regel .*
(ii) *Es gibt ein $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi = \Phi_f$.*

In diesem Fall gilt $\Phi_{f_1} = \Phi_{f_2}$ genau dann, wenn $f_1 - f_2$ auf jeder Zusammenhangskomponente konstant ist.

Bemerkung. Die letzte Aussage ist gerade die aus der Physik bekannte Willkuer bei der Wahl des Nullpunktes des Potentials.

*B*eweis. (ii)$\Longrightarrow$ (i): Das wurde schon im vorangehenden Beispiel behandelt.

(i)$\Longrightarrow$ (ii): Sei ohne Einschränkung (X, b) zusammenhängend (sonst argumentieren wir auf jeder Zusammenahngskomponente wie folgt). Waehle $o \in X$. Setze $f(o) = 0$. Waehle nun zu jedem $x \in X$ einen Wege $(x_0, \ldots, x_n)$ in X mit $x_0 = o$ und $x_n = x$ (und $b(x_j, x_{j+1}) > 0$) und setze

$$f(x) := \sum_{j=0}^{n-1} \phi(x_j, x_{j+1})w(x_j, x_{j+1}).$$

Das ist wohldefiniert aufgrund von (KZR). Nach Konstruktion gilt fuer x, y mit $x \sim y$ dann

$$f(y) = f(x) + \phi(x, y)w(x, y)$$

also

$$\frac{(f(y) - f(x))}{w(x, y)} = \phi(x, y).$$

Ende der 7. Vorlesung

Zur letzten Aussage: Sei ohne Einschraenkung wieder (X, b) zusammenhängend und $\Phi_{f_1} = \Phi_{f_2}$. Dann gilt also

$$0 = \Phi_{f_1 - f_2}$$

also mit $f = f_1 - f_2$

$$0 = \frac{f(r(e)) - f(s(e))}{w(e)}$$

fuer alle Kanten e. Da der Graph zusammenhaengend ist, folgt $f_1 - f_2 = const.$

Damit folgt sofort $f_1 - f_2 = const.$ □

Die Proposition besagt, dass Funktionen auf den Vertices zu Fluessen mit Kirchhoffsche Zykel Regel aequivalent sind. Man kann also Aussagen aus der Welte der Fluess mit Kirchhoffsche Zykel Regel in die Welt der Funktionen uebersetzen und umgekehrt. Das werden wir im folgenden tun.

Proposition. *Sei (X, b) ein Netzwerk mit zugehoeriger Form Q. Sei ϕ ein Fluss auf (X, b) mit $\phi = \Phi_f$ fuer ein $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\mathcal{E}(\phi) = Q(f).$$

*B*eweis. Das folgt aus einer direkten Rechnung:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\phi) &= \frac{1}{2}\sum_{e\in E} \phi(e)^2 w(e) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in X} \phi(x,y)^2 \frac{1}{b(x,y)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{x,y\in X} b(x,y)(f(x) - f(y))^2 \\
&= Q(f).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der vorletzten Zeile $\phi = \Phi_f$ d.h. $\phi(x,y) = b(x,y)(f(y) - f(x))$ genutzt. □

Wir kommen nun zu einer zweiten Eigenschaft, die Fluesse erfuellen koennen.

Definition. *Sei (X, b) ein Netzwerk. Ein Fluss ϕ erfuellt die Kirchhoffsche Knotenregel (KKR) in $x \in X$, wenn gilt*

$$\sum_{e:x=r(e)} \phi(e) = 0.$$

Zeichnung. *Ein Fluss erfuellt die Kirchhoffsche Knoten Regel , wenn er sie in jedem $x \in X$ erfuellt.*

Bemerkung. Erfuellt ein Fluss ϕ die Kirchhoffsche Knoten Regel in $x \in X$, so gilt

$$0 = \sum_{e:x=s(e)} \phi(e)$$

(und umgekehrt). Tatsaechlich gilt fuer jede Zerlegeung $E_1 \cup E_2 = E_x = \{e : r(e) = x\}$

$$0 = \sum_{e\in E_1} \phi(e) - \sum_{e\in E_2} \phi(\overline{e}).$$

Bemerkung. Nach den Gesetzen der Elektrostatik genügt der Stromfluss ϕ in eine Stromnetzwerk genau der Kirchhoffsche Zykel Regel und Kirchhoffsche Knoten Regel.

Wir haben schon gesehen, dass die Gueltigkeit von Kirchhoffsche Zykel Regel fuer einen Fluss bedeutet, dass der Fluss von einer Funktion kommt. Wir untersuchen nun, was dann die Gueltigkeit von Kirchhoffsche Knoten Regel bedeutet.

DEFINITION. *Sei (X, b) ein Netzwerk mit assoziiertem Operator L. Dann heisst $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonisch auf $A \subset X$, wenn gilt $Lf = 0$ auf A. Ist f harmonisch auf $A = X$, so heisst f harmonisch.*

Es ist nun nicht schwer zu charakterisieren, wann eine $\phi = \Phi_f$ die Kirchhoffsche Knoten Regel erfuellt.

LEMMA. *Sei (X, b) ein Netzwerk und $\phi = \Phi_f$. Dann sind fuer $x \in X$ aequivalent:*

(i) *Es genuegt ϕ der Kirchhoffsche Knoten Regel in x.*
(ii) *Es gilt $\sum_y b(x, y)(f(x) - f(y)) = 0$ (d.h. f ist harmonisch in $\{x\}$.*

Insbesondere genuegt $\phi = \Phi_f$ der Kirchhoffsche Knoten Regel genau dann, wenn gilt $Lf = 0$.

*B*eweis. Wegen

$$\phi(x, y) = (f(y) - f(x))b(y, x)$$

folgt das sofort aus den Definitionen. □

2. Das Dirichletproblem

In diesem Abschnitt geht es um folgendes 'Randwertproblem' (Dirichletproblem): Sei (b, c) ein Graph ueber X und sei eine Teilmenge $B \subset X$ ('Rand') gegeben und g eine Funktion auf B. Gesucht ist ein f auf X mit

- $Lu = 0$ auf $A := X \setminus B$ ('u ist harmonisch')
- und $u = f$ auf B ('Auf dem Rand nimmt u den Wert f an')

Bemerkung. Eines der Grundprobleme der Elektrostatik von Netzwerken besteht darin, den Fluss zu finden, der von in gewissene Punkten gegebenen Spannungsverteilung erzeugt wird. Fuer diesen Fluss gilt nach Voraussetzung (Elektrostatik) Kirchhoffsche Zykel Regel . Es handelt sich also um einen Fluss, der von einer Funktion herkommt. Diese Funktion muss die Kirchhoffsche Knoten Regel erfuellen in allen Punkten, in denen die Spannungsverteilung nicht gegeben ist. Damit sind wir auf obiges Randwertproblem geführt.

THEOREM. *Sei (X, b, c) ein zusammenhängender Graph. Sei $B \subset X$ mit $B \neq \emptyset$ $A := X \setminus B$ und $g : B :\longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Sei $\mathcal{A}_g := \{h \in \mathcal{H} : h = g$ auf $B\}$. Dann hat das Dirichletproblem (DP)*

- *$Lu = 0$ auf A*
- *und $u = g$ auf B*

eine eindeutige Loesung und fuer $f \in \mathcal{A}_g$ sind aequivalent:

(i) *Es gilt $Q(f) = \min\{Q(h) : h \in \mathcal{A}_g\}$.*
(ii) *Es loest f das Randwertproblem (DP).*

Insbesondere ist also der Minimierer in (i) eindeutig. Gilt $0 \leq g \leq 1$ *so folgt* $0 \leq f \leq 1$.

Bemerkung.

- Das Theorem besagt insbesondere, dass die Loesung des DP die Energie minimiert (wie es ja auch sein sollte, wenn die Loesung das physikalische Problem loest).
- Gilt $B = \emptyset$, so ist die Aussage im allgemeinen falsch (so hat $Lu = 0$ keine eindeutige Loesung, wenn $c = 0$).

*B*eweis. Wir zeigen eine Reihe von Aussagen, aus denen dann die Behauptung des Theorems (und etwas mehr) folgt.

Die Loesung von (DP) existiert und ist eindeutig. Wir wandeln das Problem in ein aequivalentes Problem (P) um, das wir dann loesen:

Sei f eine Loesung von $0 = Lf$ auf A sowie $f = g$ auf B. Dann gilt fuer $x \in A$

$$\begin{aligned} 0 = Lf(x) &= \sum_{y \in X} b(x,y)(f(x) - f(y)) \\ &= \sum_{y \in A} b(x,y)(f(x) - f(y)) + \sum_{y \in B} b(x,y) f(x) - \sum_{y \in B} b(x,y) f(y) \\ &= \sum_{y \in A} b(x,y)(f(x) - f(y)) + f(x) \sum_{y \in B} b(x,y) - \sum_{y \in B} b(x,y) g(y) \\ &= \sum_{y \in A} b(x,y)(f(x) - f(y)) + C_x f(x) - h(x) \end{aligned}$$

mit $C_x := \sum_{y \in B} b(x,y)$ und $h(x) = \sum_{y \in B} b(x,y) g(y)$ (die nicht von f abhängen). Bezeichnen wir mit $\widetilde{L}_A$ den Operator der zu dem Graphen (A, b_A, C) assoziierte ist und mit $\widetilde{f}$ die Einschraenkung von f auf A, so laesst sich dies schreiben als

(P) $\widetilde{L}_A \widetilde{f} = h$.

Ist also f eine Loesung von (DP), so ist $\widetilde{f}$ eine Loesung von (P).

Umgekehrt, sieht man leicht, dass aus einer Loesung $\widetilde{f}$ von (P) durch Fortsetzen mit g eine Loesung f des (DP) wird. Damit gilt also

f loest (DP) $\Longleftrightarrow$ $\widetilde{f}$ loest (P).

Es reicht es also zu zeigen, dass (P) eindeutig loesbar ist.

Der Operator $\widetilde{L}_A$ ist zu dem Graphen (A, b_A, C) assoziiert. Nach schon gezeigtem, reicht es daher, zu zeigen, dass C auf jeder Zusammenhangskomponente von A (bzgl. b_A) nicht verschwindet. Sei also Z eine solche Zusammenhangskomponente. Es reicht ein $y \in B$ zu finden mit $b(x,y) > 0$ fuer ein $x \in Z$ (vgl. Definition von C). **Zeichnung.** Waehle zunaechst ein beliebiges y' in B und $o \in Z$. Da der Graph zusammenhaengend ist, existiert ein Weg $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ in (X, b) mit $x_0 = o$ und $x_n = y'$. Sei j der kleinste Index, so dass x_j nicht zu Z gehoert. Dann muss $y = x_j$ zu B gehoeren (da es sonst mit Z zusammenhinge). Dann hat $y = x_j$ die gewuenschten Eigenschaften.
Zeichnung.

Gilt $Q(f) = \min\{Q(h) : h \in \mathcal{A}_g\}$, *so loest* f *gerade (DP).* Sei ϕ eine beliebige Funktion, die auf A getragen ist. Dann gehoert $f + \lambda\phi$ also zu $\mathcal{A}_g$ fuer alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit hat die Funktion

$$\lambda \mapsto Q(f + \lambda\phi) = Q(f) + 2\lambda Q(f, \phi) + \lambda^2 Q(\phi)$$

ein Minimum fuer $\lambda = 0$. Ableiten liefert dann

$$0 = Q(f, \phi) = \langle Lf, \phi\rangle.$$

Da ϕ mit Traeger in A beliebig war, folgt $Lf = 0$ auf A.

Ende der 8. Vorlesung

Es existiert ein Minimierer von Q *auf* $\mathcal{A}_g$. Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{A}_g$, mit

$$Q(f_n) \to \inf\{Q(h) : h \in \mathcal{A}_g\}.$$

Insbesondere ist also $(Q(f_n))_n$ beschraenkt. Sei o ein beliebiger Punkt in B. Dann gilt $f_n(o) = g(o) = \mathit{constant}$. Es zeigt sich nun (! s.u.), dass die Beschraenkheit der $Q(f_n)$ zusammen mit der Beschraenktheit von $(f_n(o))$ impliziert, dass auch $(f_n(x))_n$ beschraenkt ist fuer jedes $x \in X$. Damit kann man ohne Einschraenkung (sonst Teilfolge) annehmen, dass die (f_n) punktweise konvergieren gegen eine Funktion f. Dieses f gehoert dann natuerlich wieder zu $\mathcal{A}_g$ und es gilt

$$Q(f) \le \liminf_{n\to\infty} Q(f_n) = \inf\{Q(h) : h \in \mathcal{A}_g\}.$$

Damit ist f ein Minimierer.

Es bleibt die Beschraenktheit der $(f_n(x))$ fuer $x \in X$ zu zeigen. Sei dazu $x \in X$ beliebig und $\gamma = (x_0, \ldots, x_n)$ mit $x_0 = o$ und $x_n = x$ ein Weg von o zu x. Dann gilt fuer jede Funktion u also

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(o)| &\le \sum_{j=1}^{n} |u(x_j) - u(x_{j+1})| \\
&= \sum_{j=1}^{n} |u(x_j) - u(x_{j+1})| b(x_j, x_{j+1})^{1/2} \cdot \frac{1}{b(x_j, x_{j+1})^{1/2}} \\
&\le \left(\sum_{j=1}^{n} |u(x_j) - u(x_{j+1})|^2 b(x_j, x_{j+1})\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} b(x_j, x_{j+1})^{-1}\right)^{1/2} \\
&\le Q(u)^{1/2} C(\gamma).
\end{aligned}$$

Damit folgt die gewuenschte Aussage.

Gilt $0 \le g \le 1$, *so folgt* $0 \le f \le 1$. Es gehoert mit f auch $C_I(f)$ zu $\mathcal{A}_g$ und ist ebenfalls ein Minimierer von Q (da es sich um eine Dirichletform handelt). Damit folgt aus der schon bewiesenen Eindeutigkeit also $f = C_I f$ und damit $0 \le f \le 1$.

Mit den vorangegangenen Aussagen ist das Theorem bewiesen. $\square$

Bemerkung. Fuehrt man auf dem Graphen (X, b) die Metrik

$$d(x, y) := \inf\{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{b(x_j, x_{j+1})^{1/2}} : \gamma = (x_0, \ldots, x_n) \text{ Weg von } x \text{ nach } y\}$$

ein, so folgt aus obigen Betrachtungen

$$|u(x) - u(y)| \leq Q(u)^{1/2} d(x, y).$$

Damit ist also bzgl. d jede Funktion global lipschitzstetig, wobei die Konstante die Wurzel aus ihrer Energie ist. Das spielt eine Rolle bei der Untersuchung von unendlichen Graphen in juengster Zeit. Insbesondere wird dann untersucht, ob (X, d) vollstaendig ist.

Wir erhalten als Folgerung des Theorem sofort die Existenz des effektiven Widerstandes.

FOLGERUNG. *Sei (X, b) ein Netzwerk. Seien $s, t \in X$ mit $s \neq t$ gegeben. Dann existiert genau ein $f = f_{s,t}$ mit $f(s) = 0$, $f(t) = 1$ und $Lf = 0$ auf $X \setminus \{s, t\}$. Dieses f ist der Minimierer von Q auf $\mathcal{A}_{s,t} := \{h : h(s) = 0, h(t) = 1\}$.*

Bemerkung. Legt man zwischen s und t eine Einheitsspannung an, so gilt fuer den effektiven Widerstand $W_{eff}(s, t)$ wegen Energie $= UI = U^2/R$ und Energie $= Q(f)$ **Zeichnung.** natuerlich

$$W_{eff}(s, t) = \frac{1}{Q(f_{s,t})}.$$

Diese Groesse W_{eff} spielt eine grosse Rolle in der Netzwerktheorie. Man kann zeigen (Uebung), dass W eine Metrik liefert (wenn man W durch $W(x, x) = 0$ fortsetzt).

Als Folgerung koennen wir auch das sogenannte Kondensatorprinzip beweisen.

FOLGERUNG. *(Kondensatorprinzip) Sei (b, c) ein Graph ueber X und L der zugeheorige Operator. Seien $E, F \subset X$ Teilmengen von X mit $E \cap F = \emptyset$ und $E \cup F \neq \emptyset$. Dann hat das Kondensatorproblem (KP)*

- *$u \equiv 1$ und $Lu \geq 0$ auf E,*
- *$u \equiv 0$ und $Lu \leq 0$ auf F,*
- *$Lu = 0$ sonst,*

eine eindeutige Loesung. ***Zeichnung*** *Diese ist gegeben durch den Minimierer von Q auf $\mathcal{A} = \{h : h \geq 1$ auf E, $h \leq 0$ auf $F\}$.*

*B*eweis. Nach dem vorigen Satz hat das Problem
- $Lu = 0$ auf $X \setminus (E \cup F)$,
- $u \equiv 1$ auf E,
- $u \equiv 0$ auf F eine eindeutige Loesung
und diese erfuellt $0 \leq u \leq 1$. Damit erfuellt diese Loesung auf E dann

$$Lu(x) = \sum_{y \in X} b(x, y)(u(x) - u(y)) + c(x)u(x) = \sum_{y \in X} b(x, y)(1 - u(y)) + c(x) \geq 0$$

und auf F

$$Lu(x) = \sum_{y \in X} b(x, y)(u(x) - u(y)) + c(x)u(y) = \sum_{y \in X} b(x, y)(0 - u(y)) \leq 0.$$

auf F. Damit gibt es also eine Loesung des Kondensatorproblems. Diese ist eindeutig (da schon die Loesung des (DP) eindeutig ist).

Weiterhin ist die Loesung der eindeutige Minimierer von Q auf

$$\mathcal{A}_g := \{h : h = 1 \text{ auf } E,\ h = 0 \text{ auf } F\}.$$

Offenbar ist $\mathcal{A}_g \subset \mathcal{A}$. Da es sich aber bei Q um eine Dirichletform handelt und $C_I \mathcal{A} = \mathcal{A}_g$ folgt dann die Aussage ueber den Minimierer. □

Damit koennen wir folgende Charakterisierung von Dirichletformen in der Elektrostatik beweisen.

THEOREM. *(Charakterisierung von Dirichletformen in Elektrostatik) Sei Q eine symmetrische Form auf $\mathcal{H}$ und L der zugehörige Operator. Dann sind äquivalent:*

(i) *Q ist eine Dirichletform.*
(ii) *Jedes Dirichletproblem (DP) $Lu = 0$ auf A, $u = g$ auf B (mit $A \cup B = X$ und $A \cap B = \emptyset$) ist auf X eindeutig loesbar und fuer die Loesung gilt $0 \leq f \leq 1$ falls $0 \leq g \leq 1$.*
(iii) *Jedes Kondensatorproblem (KP) auf X ist eindeutig loesbar.*

*B*eweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Das ist der Inhalt des vorangehenden Theorems.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): Das folgt sofort (vgl. Beweis der vorangehenden Folgerung).

(iii)$\Longrightarrow$ (i): Sei $x \in X$ beliebig. Mit $E = \{x\}$ und $F = X \setminus \{x\}$ also $u = 1_x$ ergibt sich aus (KP) sofort $Lu \leq 0$ auf F und damit fuer alle $y \neq x$

$$0 \geq L1_x(y) = -L(x, y).$$

Mit $E = X$ also $u \equiv 1$ ergibt sich aus (KP) sofort $Lu \geq 0$ also

$$0 \leq \sum_y L(x, y).$$

Damit folgt dass Q eine Dirichletform ist. □

Bemerkung. Das Theorem besagt, dass Dirichletformen genau die 'richtigen' Objekte sind, um Elektrostatik zu betreiben. Es geht auf die schon erwähnte Arbeit von Beurling / Deny '58 zurück.

Bemerkung. Es ist bemerkenswert, dass dieselbe mathematische Struktur viz Dirichletformen sowohl in der Elektrostatik als auch der Theorie der Waermeleitung auftritt. Vereinfachend kann man sagen, dass es bei Wärmeleitung um e^{-tL}, $t \geq 0$, geht und bei Elektrostatik um $(L + \alpha)^{-1}$, $\alpha \geq 0$.

Ende der 9. Vorlesung

3. Etwas Variationsrechnung

In diesem Abschnitt lernen wir ein allgemeinen Zusammenhang zwischen Loesungen gewisser Gleichungen und Minimierern von Formen kennen. Das wird unter dem Namen Variationsrechnung viel genutzt. Wir werden es im kommenden Abschnitten verwenden und haetten es auch im vorigen Abschnitt verwenden können (s.u.).

Wir beginnen mit ein bisschen **Wiederholung** zu Räumen mit Skalarprodukt. In diesem Abschnitt ist V ein Vektorraum, s ein Skalarprodukt auf V und

$$q(x) = s(x, x)$$

die zugehoerige Diagonale (Quadrat der Norm).

Proposition. *(Parallelogrammidentitaet) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Sei s eine Skalarprodukt auf V und $q(x) = s(x,x)$. Dann gilt fuer alle $x, y \in V$*

$$q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y)).$$

Zeichnung

*B*eweis. Das folgt durch direkte Rechnung. □

Bemerkung. (Jordan/von Neumann) Eine Norm auf einem Vektorraum wird genau dann durch ein Skalarprodukt induziert, wenn die Parallelogrammidentitat gilt. Die Norm ist dann durch sogenannte Polarisierung bestimmt. In diesem Sinne ist die Parallelogrammidentität die fundamentale Eigenschaft eines Raumes mit innerem Produkt.

Definition. *(Orthogonalität) Sei V Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann heissen $x, y \in V$ orthogonal $x \perp y$, wenn gilt*

$$s(x,y) = 0.$$

Ist $A \subset V$ beliebig, so definiert man das orthogonale Komplement von A durch $A^\perp := \{u \in V : s(u,a) = 0 \text{ fuer alle } a \in A\}$.

Bemerkung. Fuer jedes $A \subset V$ ist $A^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum (Uebung).

Definition. *Ein Vektorraum V mit Skalarprodukt s heisst Hilbertraum, wenn er bzgl. q vollstaendig ist, d.h. jede Cauchy Folge einen Grenzwert hat.*

Theorem. *(Approximationssatz) Sei (V,s) ein Hilbertraum. Ist C eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von V, so gibt es zu jedem $x \in V$ genau ein $y \in C$ mit*

$$q(x-y)^{1/2} = d(x,Y) := \inf\{q(x-z)^{1/2} : z \in C\}.$$

Damit existiert also die beste Approximation an x in C. ***Zeichnung.***

*B*eweis. Bei dem Satz handelt es sich um eine fundamentale Eigenschaft eines Hilbertraum. Entsprechend spielen die fundamentalen Eigenschaften des Hilbertraum naemlich Vollttändigkeit und Parallelogrammidentität eine Rolle:

$$q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y).$$

Sei $d := d(x,C)$.

Eindeutigkeit. Seien y_1, y_2 solche Punkte. Anwenden von Parallelogrammidentität mit $x - y_1$ statt x und $x - y_2$ statt y liefert

$$q(2x - y_1 - y_2) + q(y_1 - y_2) = 2q(x - y_1) + 2q(x - y_2).$$

Damit folgt (aufgrund von $d^2 = q(x-y_1) = q(x-y_2)$)

$$4q(x - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)) + q(y_1 - y_2) = 4d^2.$$

Aufgrund der Konvexitaet und der Definition von d laesst sich der linkeste Term durch $4d^2$ nach unten abschaetzen. Damit folgt

$$q(y_1 - y_2) = 0.$$

Existenz. Sei (y_n) eine Folge in C mit

$$q(x - y_n) \to d^2.$$

Einsetzen in Parallelogrammidentität mit $x - y_n$ statt x und $x - y_m$ statt y liefert (wie im Eindeutigkeitschluss)

$$q(2x - y_n - y_m) + q(y_n - y_m) = 2q(x - y_n) + 2q(x - y_m).$$

Damit folgt (Details, Zeichnung Parallelogramm)

$$q(y_n - y_m) \to 0.$$

Daher ist (y_n) eine Cauchy Folge. Aufgrund der Hilbertraumeigenschaft konvergiert dann (y_n). Da A abgeschlossen ist, gehoert der Grenzwert y wieder zu A. Weiterhin gilt nach Definition

$$q(x - y) = \lim_{n \to \infty} q(x - y_n) = d^2.$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkungen. (a) Sowohl die Voraussetzung der Konvexitaet als auch der Abgeschlossenheit sind noetig. (Uebung):

- Ist die Menge konvex, aber nicht abgeschlossen, so muss es keine beste Approximation geben (sie koennte ja gerade fehlen). Beispiel?
- Ist die Menge abgeschlossen und nicht konvex, kann es z.b. mehrere beste Approximationen geben. Beispiel?. Es kann dann auch keine beste Approximation geben: $x = e_1$. $A = \{(1 + \frac{1}{j})e_j : j > 1\}$.
- Im endlichdimensionalen Hilbertraum gibt es natuerlich beste Approximationen fuer beliebige abgeschlossenen Mengen. Warum?

(b) In Raeumen, die keine Hilbertraeume sind, muss die Aussage nicht gelten. (Uebung).

Bemerkung. Geht man den Beweis durch, so sieht man, dass man die Voraussetzungen der Nichtausgeartetheit von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der Vollstaendigkeit von V etwas abschwaechen kann. Man braucht lediglich, dass

- $d(x, y) := \langle (x - y), (x - y) \rangle^{1/2}$ eine Metrik auf C definiert (also nicht ausgeartet ist).
- (C, d) ein vollstaendiger metrischer Raum ist.

THEOREM. *(Projektionssatz) Sei (V, s) ein Hilbertraum und $\mathcal{U}$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann laesst sich jedes $x \in V$ eindeutig schreiben als*

$$x = y + z \ \ \textit{mit} \ \ y \in U \ \ \textit{und} \ \ z \in U^{\perp}.$$

*B*eweis. *Eindeutigkeit.* Sei $x = y + z = y' + z'$ mit $y, y \in \mathcal{U}$ und $z, z' \in \mathcal{U}^{\perp}$. Dann gilt

$$y - y' = z' - z \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{\perp} = \{0\}.$$

Damit folgt die Eindeutigkeit.

Existenz: Es ist $\mathcal{U}$ abgeschlossen und konvex. Daher existiert nach dem vorigen Satz ein (eindeutiges) $y \in Y$ mit

$$q(x-y) = d(x,\mathcal{U}) = \inf\{q(x-z) : z \in \mathcal{U}\}.$$

Sei $z = x - y$. Dann gilt also

$$x = y + z$$

mit $y \in \mathcal{U}$.
Noch zu zeigen $z \perp \mathcal{U}$: Sei $u \in \mathcal{U}$ beliebig. Dann hat die Funktion

$$F = F_u : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty), F(t) = q((x-y) + tu)$$

ein Minimum bei $t = 0$ nach Konstruktion von $z = x - y$. Es gilt

$$F(t) = q(x-y) + ts(x-y,u) + ts(u,(x-y)) + t^2 q(u),$$

also

$$F(t) = q(x-y) + 2t\Re s((x-y),u) + t^2 q(u).$$

Da F differenzierbar ist und ein Minimum in $t = 0$ hat folgt

$$0 = F^{'}(0) = \Re s((x-y),u)$$

fuer jedes beliebige $u \in \mathcal{U}$. Damit folgt

$$0 = \Re s((x-y),\lambda u)$$

fuer alle $u \in \mathcal{U}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Mit $\lambda = \overline{s((x-y),u)}$ folgt

$$0 = |s((x-y),u)|^2.$$

Das liefert die gewuenschte Orthogonalitaet. $\square$

Folgerung. *Ist $\mathcal{U}$ ein abgeschlossener Unterraum, so gilt $(\mathcal{U}^\perp)^\perp = \mathcal{U}$.*

*B*eweis. Offenbar gilt $\mathcal{U} \subset (\mathcal{U}^\perp)^\perp$. Sei umgekehrt $v \in (\mathcal{U}^\perp)^\perp$ gegeben. Dann gilt $v = u + u^\perp$ mit $u \in \mathcal{U}$ und $u^\perp \in \mathcal{U}^\perp$. Damit gehoert dann

$$u^\perp = v - u$$

zu $\mathcal{U}^\perp$ und zu $(\mathcal{U}^\perp)^\perp$ und muss also verschwinden. $\square$

Definition. *Ist $\mathcal{U}$ ein abgeschlossener Unterraum und $x = y + z$ mit $y \in \mathcal{U}$ und $z \in \mathcal{U}^\perp$, so nennt man y die orthogonale Projektion von x auf $\mathcal{U}$ und z die orthogonale Projektion von x auf $\mathcal{U}^\perp$.*

Bemerkung. Nach der vorangehenden Folgerung ist das wohldefiniert.

Wir können den vorigen Satz nun folgendermassen umformulieren:

Theorem. *(Variationsrechnung im Hilbertraum) Sei $\mathcal{V}$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt s und Normquadrat q. Sei $\mathcal{U}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{A} = g + \mathcal{U}$ fuer ein $g \in \mathcal{V}$. Dann hat q auf $\mathcal{A}$ einen eindeutigen Minimierer und fuer $f \in \mathcal{V}$ sind aequivalent*

(i) *Es ist f Minimierer von q auf $\mathcal{A}$.*
(ii) *Es gilt $f = g + u$ mit $u \in \mathcal{U}$ und $s(f,v) = 0$ fuer alle $v \in \mathcal{U}$.*

Zeichnung

*B*eweis. Wir zeigen zunaechst Aequivalenz von (i) und (ii):
(ii)$\Longrightarrow$ (i): Fuer jedes $h \in \mathcal{A}$ gilt $h = g + v = f + u$ mit geeigneten $u, v \in \mathcal{U}$. Damit folgt nach (ii) also

$$q(h) = q(f + u) = q(f) + 2s(f, u) + q(u) = q(f) + q(u) \geq q(f).$$

(i)$\Longrightarrow$ (ii): Sei f ein Minimierer von q auf $\mathcal{A}$. Dann gilt fuer $u \in \mathcal{U}$, dass die differenzierbare Funktion

$$\lambda \mapsto q(f + \lambda u) = q(f) + 2\lambda s(f, u) + \lambda^2 q(u)$$

ein Minimum in $\lambda = 0$ hat. Damit folgt nach Ableiten $s(f, u) = 0$.
Nach (ii) und dem vorigen Satz handelt es sich bei dem Minimierer f gerade um die (eindeutige) orthogonale Projektion von g auf $\mathcal{U}^\perp$. □

Ende der 10. Vorlesung

Wir werden in den folgenden beiden Abschnitten Anwendungen dieses Satzes geben. Dabei wird sich zeigen, dass die Orthogonalitaetsbedingung in (ii) zur Gueltigkeit einer Differential / Differenzengleichung aequivalent ist. Das liefert dann die strukturelle Verbindung von Loesungstheorie von Differential/Differenzengleichungen und Minimierungsproblemen im Hilbertraum. Der grosse Vorteil des Zugangs mittels Hilbertraeumen ist, dass er fuer sehr allgemeine Situationen passt.

Anwendung / Uebung: Als erste Anwendung skizzieren wir einen alternativen Beweis der Loesbarkeit des Dirichletproblem (DP)

$$Lu = 0 \text{ auf } A \text{ und } u = g \text{ auf } B \text{ (mit } A \cup B = X \text{ und } A \cap B = \emptyset)$$

aus dem vorigen Abschnitt. Dazu betrachtet man das Skalarprodukt (!)

$$(f, g) \mapsto Q(f, h) + f(o)h(o) = s(f, h)$$

auf den Funktionen auf X, wobei o ein beliebiger Punkt aus B ist. Sei g auf B gegeben. Es geht dann um den Minimierer der zugehoerigen Form q auf

$$\mathcal{A}_g = \{f : f = g \text{ auf } B\} = \widetilde{g} + \mathcal{U}$$

mit der kanonischen Fortsetzung $\widetilde{g}$ von g auf X (durch 0) und dem Unterraum $\mathcal{U}$ der auf B verschwindenden Funktionen. Der Minimierer f erfuellt dann $f = g$ auf B sowie aufgrund der Orthogonalitaetsaussage des vorigen Resultats

$$0 = Q(f, h) + f(o)h(o) = Q(f, h) = \langle Lf, h \rangle$$

fuer alle h die auf B verschwinden. Das liefert (!) gerade die gewuenschte Loesung des (DP).

4. Resolventen und Minimierer

In diesem Abschnitt untersuchen wir Resolventen. Wir werden sie mit Variationsrechnung charakterisieren.

Theorem. *(Charakterisierung Resolvente) Sei Q eine Dirichletform und L der zugehoerige Operator auf $\mathcal{H}$. Sei $\alpha > 0$. Dann gibt es zu jedem $f \in \mathcal{H}$ ein eindeutiges $u \in \mathcal{H}$ mit $(L + \alpha)u = f$. Es ist u der eindeutige Minimierer von*

$$\psi(v) = Q(v) + \alpha \| \frac{1}{\alpha} f - v \|^2.$$

Es gilt
$$\psi(v) = \psi(u) + Q_\alpha(u - v)$$
mit $Q_\alpha(f,g) = Q(f,g) + \alpha\langle f, g\rangle$.

*B*eweis. Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ mit dem (Semi)-Skalarprodukt
$$s((a,b),(c,d)) = Q(a,c) + \alpha\langle b, d\rangle.$$
Sei der Unterraum $\mathcal{U} := \{(f,f) : f \in \mathcal{H}\}$ und
$$\mathcal{A} = -(0, \frac{1}{\alpha} f) + \mathcal{U}.$$
Dann ist s auf $\mathcal{U}$ ein Skalarprodukt und $\mathcal{U}$ bzgl s vollstaendig. Dann gilt
$$\psi(v) = q((v,v) - (0, \frac{1}{\alpha} f)).$$
Nun folgt der erste Teil der Aussagen aus dem Theorem zur Variationsrechnung: Nach diesem Theorem existiert naemlich ein eindeutiger Minimierer in $\mathcal{A}$ und es ist $(u,u) - (0, \frac{1}{\alpha} f)$ und der Minimierer genau dann, wenn gilt
$$(u,u) - (0, \frac{1}{\alpha} f) \perp \mathcal{U}$$
d.h. (kleine Rechnung) wenn gilt
$$\langle (L + \alpha) u, v\rangle = \langle f, v\rangle.$$
fuer alle v. Damit gehoert also u zu dem Minimierer genau dann, wenn gilt $(L + \alpha)u = f$. Damit folgen Existenz und Eindeutigkeit der Loesung sowie ihr Ubereinstimmen mit dem Minimierer.
Die letzte Aussage folgt durch eine direkte Rechnung. □

Aus der Charakterisierung koennen wir sofort die (uns schon bekannte) Markoveigenschaft der Resolventen herleiten:

FOLGERUNG. *Sei Q eine Dirichletform und L der zugehoerige Operator auf $\mathcal{H}$. Sei $\alpha > 0$. Sei $0 \leq f \leq \alpha$. Dann gelten fuer $u = (L + \alpha)^{-1} f$ die Ungleichungen* $0 \leq u \leq 1$.

*B*eweis. Da Q eine Dirichletform ist und $0 \leq f \leq \alpha$ gilt fuer ψ mit $\psi(v) = Q(v) + \alpha\|\frac{1}{\alpha} f - v\|^2$ die Abschaetzung
$$\psi(C_I v) \leq \psi(v)$$
fuer alle v. Ist also u der eindeutige Minimierer von ψ so muss gelten $u = C_I u$. Das liefert die Behauptung. □

5. Das Poissonproblem

In diesem Abschnitt untersuchen wir das allgemeine Poissonproblem $(L + \alpha)u = f$ auf A $u = g$ auf B.

THEOREM. *Sei (b,c) ein Graph ueber X und L der zugehoerige Operator. Seien A, B Teilmengen von X mit $X = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$ und $B \neq \emptyset$. Sei g auf A beliebig und f auf B beliebig. Dann gibt es genau eine Loesung des allgemeinen Poissonproblems*

- $Lu = g$ *auf* A

- $u = f$ *auf* B.

Bemerkung. Da wir im Theorem allgemeine $c \geq 0$ zulassen, ist auch der Fall enthalten, dass statt L der Operator $L + \alpha$ mit $\alpha > 0$ betrachtet wird.

*B*eweis. Wir gehen ganz aehnlich wie bei der Loesung des Dirichletproblems im entsprechenden Abschnitt vor: Wir wandeln das Problem in ein aequivalentes Problem (PP) um, das wir dann loesen:
Sei u eine Loesung von $f = Lu$ auf A sowie $u = g$ auf B. Dann gilt fuer $x \in A$

$$\begin{aligned} f(x) = Lu(x) &= \sum_{y \in X} b(x,y)(u(x) - u(y)) \\ &= \sum_{y \in A} b(x,y)(u(x) - u(y)) + \sum_{y \in B} b(x,y)u(x) - \sum_{y \in B} b(x,y)u(y) \\ &= \sum_{y \in A} b(x,y)(u(x) - u(y)) + u(x) \sum_{y \in B} b(x,y) - \sum_{y \in B} b(x,y)g(y) \\ &= \sum_{y \in A} b(x,y)(u(x) - u(y)) + C_x f(x) - h(x) \end{aligned}$$

mit $C_x := \sum_{y \in B} b(x,y)$ und $h(x) = \sum_{y \in B} b(x,y)g(y)$ (die nicht von f abhängen). Bezeichnen wir mit $\widetilde{L}$ den Operator der zu dem Graphen (A, b_A, C) assoziierte ist und mit $\widetilde{f}$ die Einschraenkung von f auf A, so laesst sich dies schreiben als

(PP) $\widetilde{L}_A \widetilde{u} = f + h$.

Ist also u eine Loesung des Poisson Problems, so ist $\widetilde{u}$ eine Loesung von (PP)
Umgekehrt, sieht man leicht, dass aus einer Loesung $\widetilde{u}$ von (PP) durch Fortsetzen mit g eine Loesung f des (PP) wird. Damit gilt also

$$f \text{ loest das Poissonproblem} \iff \widetilde{f} \text{ loest (P)}.$$

Es reicht es also zu zeigen, dass (PP) eindeutig loesbar ist. Das folgt aus der Bijektivitaet von $\widetilde{L}_A$, die im Abschnitt zum Dirichletproblem gezeigt wurde.
□

Frage/Uebung. Wie kann man die Loesung in obigem Theorem durch einen Minimierer charakterisieren?

KAPITEL 3

Untere Abschaetzungen fuer Dirichletformen auf $X = \{1, \ldots, N\}$

In diesem Abschnitt untersuchen wir weiterhin Operatoren L, die zu Dirichletformen auf X gehoeren und befassen uns mit Abschaetzungen fuer die Spektrale Luecke $\lambda_2 = \lambda_2 - \lambda_1$ falls $\lambda_1 = 0$ bzw. fuer den untersten Eigenwert λ_1 (d.h. den Abstand von λ_1 zu 0) falls $\lambda_1 > 0$. Die spektrale Luecke hat schon eine Rolle gespielt, bei der Geschwindigkeit der Konvergenz von e^{-tL} gegen den Grundzustand E_1. Wie wir an entsprechender Stelle gesehen haben, gilt naemlich (falls $\lambda_1 = 0$)

$$\|e^{-tL} - E_1\| \leq e^{-\lambda_2 t}.$$

1. Co-Area Formeln

Ein entscheidendes technisches Hilfsmittel bei den folgenden Abschaetzungen von Formen nach unten bildet die Co-Area - Formel.

Wir betrachten folgende Situation. Sei X endlich und $b : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ symmetrisch mit $c(x) = 0$ fuer $x \in X$ gegeben.
Zu $K \subset X$

$$L_K = \sum_{x \in K, y \notin K} b(x, y).$$

Zu $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$ sei

$$K_t := K_t^f := \{x \in X : f(x) \geq t\}.$$

Seien $t_0 < t_1 < \ldots < t_N$ die verschiedenen Werte von f und

$$K_i := K_{t_i}.$$

Schliesslich definieren wir fuer $a, b, t \in \mathbb{R}$

$$1_{(a,b]}(t) \equiv \begin{cases} 1 & : \quad a < t \leq b \\ 0 & : \quad sonst. \end{cases}$$

Ende der 11. Vorlesung

THEOREM. *(Co-Area-Formel) Sei $b : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ symmetrisch mit $b(x,x) = 0$ fuer $x \in X$ und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2} \sum_{x,y \in X} b(x, y)|f(x) - f(y)| = \int_{-\infty}^{\infty} L_{K_t} dt = \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{i-1}) L_{K_{t_i}}.$$

Bemerkung. Den ersten Term kann man als Integral ueber dem Raum der Kanten (mit dem Mass $m(e) = b(x, y)$ fuer $e = \{x, y\}$) deuten. Die Aussage ist dann, dass man das Integral im Kantenraum als Integral ueber geeigente

Oberflaechen 'desintegrieren' kann. **Zeichnung** (vgl. Bemerkung nach dem Beweis).

*B*eweis. Wir nennen die drei auftretenden Terme T_1, T_2, T_3 und zeigen 'alle' Gleichheiten (auch wenn eigentlich nur zwei Gleichheiten zu zeigen sind.)
$T_1 = T_2$. Offenbar gilt
$$L_{K_t} = \sum_{x\in K_t, y\notin K_t} b(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{x,y}(1_{(f(x),f(y)]}(t) + 1_{(f(y),f(x)]}(t))b(x,y).$$
Damit folgt
$$\int_{-\infty}^{\infty} L_{K_t}dt = \frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)\int_{-\infty}^{\infty}(1_{(f(x),f(y)]}(t) + 1_{(f(y),f(x)]}(t))dt.$$
Man ueberzeugt sich leicht davon, dass der Wert des Integrals gerade $|f(x)-f(y)|$ ist (Unterscheide die drei Faelle $f(x) < f(y)$, $f(x) > f(y)$ und $f(x) = f(y)$...).
$T_2 = T_3$. Offenbar gilt $L_{K_t} = 0$ fuer $t \leq t_0$ (da Komplement von K_t dann leer ist) sowie
$$K_t = K_i \text{ fuer } t_{i-1} < t \leq t_i.$$
$T_1 = T_3$: Betrachte $x, y \in X$ mit o.E. $f(x) < f(y)$. Seien k, l mit $t_k = f(x)$ und $t_l = f(y)$ gewaehlt. Bestimme nun den Vorfaktor von $b(x,y)$ auf beiden Seiten der Gleichung d.h. in T_1 und T_3:
Linke Seite (T_1): Vorfaktor ist $f(y) - f(x) = \sum_{j=k}^{l-1}(t_{j+1} - t_j)$.
Rechte Seite (T_3): Wegen $x \in K_k$ und $x \notin K_{k+1}$ gilt $x \notin K_i$ genau dann wenn
$$k + 1 \leq i.$$
Wegen $y \in K_l$, $y \notin K_{l+1}$ gilt $y \in K_i$ genau dann wenn
$$i \leq l.$$
Damit erhaelt man den Term $b(x,y)$ fuer alle i mit
$$k + 1 \leq i \leq l.$$
Der Vorfaktor vor $b(x,y)$ ist demnach
$$\sum_{i=k+1}^{l}(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=k}^{l-1}(t_{i+1} - t_i).$$
Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Den Kern des Beweises kann man als eine Art Fubini/Cavalieri Argument sehen. Dazu zeichnet man ein Koordinatensystem in der Ebene. Auf der Ordinate traegt man die Funktionswerte ein und auf der Abszisse traegt man zu jeder Kante (x,y) ein Intervall der Laenge $b(x,y)$ ab. Die gesuchte Summe laesst sich dann als Flaeche von Rechtecken veranschaulichen. 'Schoepft' man diese Rechtecke von der Ordinate her aus, so erhaelt man die angegebenen Darstellungen der Summe. **Zeichnung.**

Sei X eine endliche Menge und $m : X \longrightarrow [0,\infty)$ gegeben. Dann definiert man zu $K \subset X$ die Groesse A_K durch

$$A_K := \sum_{x \in K} m(x).$$

Zu weiterhin (s.o.) zu $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$ die Menge K_t definiert durch

$$K_t := K_t^f := \{x \in X : f(x) \geq t\}.$$

THEOREM. *('Area Formel') Sei $m : X \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. S Dann gilt*

$$\sum m(x)(f(x) - \min f) = \int_{\min f}^{\max f} A_{K_t} dt = \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{i-1}) A_{K_i}.$$

Bemerkungen.

- Die obere Schranke des Integrals kann auch ∞ gewaehlt werden (da $A_{K_t} = 0$ fuer $t \geq \max f$).
- Die untere Schranke ist wesentlich, da $A_{K_t} = m(X) := \sum_{x \in X} m(x)|$ fuer $t \leq \min f$. Man kann jedoch $\min f$ in den Formeln durch ein beliebiges $c \leq \min f$ ersetzen. Dann muss man lediglich im dritten Term noch einen Summanden $(\min f - c)m(x)$ hinzufuegen.
- Statt mit K_t kann man auch mit $\widetilde{K}_t := \{x : f(x) > t\}$ rechnen.

*B*eweis. Wir nennen die drei auftretenden Terme T_1, T_2, T_3 und zeigen 'alle' Gleichheiten (auch wenn eigentlich nur zwei Gleichheiten zu zeigen sind.)
Seien
$T_1 = T_2$. Es gilt

$$A_{K_t} = \sum_{x \in K_t} m(x) = \sum_x m(x) 1_{[\min f, f(x)]}(t).$$

Damit folgt

$$\int_{\min f}^{\infty} A_{K_t} dt = \sum_x m(x) \int_{\min f}^{\infty} 1_{[\min f, f(x)]}(t) dt = \sum m(x)(f(x) - \min f).$$

$T_2 = T_3$. Wieder gilt

$$K_t = K_i \text{ fuer } t_{i-1} < t \leq t_i.$$

$T_1 = T_3$. Zu zeigen

$$\sum_x m(x)(f(x) - \min f) = \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{i-1}) \sum_{x \in K_i} m(x).$$

Sei $x \in X$. Sei $f(x) = t_k$. Bestimme nun den Vorfaktor von $m(x)$ auf beiden Seiten der vorangehenden Gleichung. *Linke Seite.* Vorfaktor ist $f(x) - \min f = \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1})$.
Rechte Seite. Es gehoert x zu K_i fuer $i = 0, \ldots, k$. Damit ist der Vorfaktor $\sum_{i=0}^{k} (t_i - t_{i-1})$. Damit folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Das Vorzeichen von b spielt keine Rolle. In diesem Sinne scheint es sich nicht um ein Resultat fuer Dirichletformen zu handeln.

Bemerkung. Auch diese Formel kann man einfach mit einer entsprechenden Zeichnung deuten.

2. Dirichlet Randbedingungen vs. Absorptionspotential

In diesem Abschnitt lernen wir ein allgemeines Verfahren kennen, wie man das Absorptionspotential c eines Graphen (X, b, c) gegen eine Dirichletrandbedingung 'tauschen' kann. Das wird es uns im folgenden Abschnitt ermoeglichen Graphen mit Absorptionspotential auf Graphen mit verschwindendem Absorptionspotential zurueckzufuehren. Das ist praktisch, da wir nur fuer Graphen mit $c = 0$ die Co-Area-Formel kennen.

Ersetze x mit $c(x) \neq 0$ durch Dirichletrandbedingung:
Wir betrachten zunaechst einen Graphen (X, b, c) mit assoziierter Form Q. Wir fuehren einen zusaetzlichen Punkt ∞ ein und betrachten

$$\widetilde{X} := X \cup \{\infty\}$$

mit

$$\widetilde{b} : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \longrightarrow [0, \infty), \ \ \widetilde{b}(x, y) := \begin{cases} b(x,y) & : \ x, y \in X \\ c(x) & : \ x \in X, y = \infty \\ c(y) & : \ x = \infty, y \in X \\ 0 & : \ sonst \end{cases}$$

Sei $\widetilde{Q}$ die zum Graphen $(\widetilde{X}, \widetilde{b}, 0)$ assoziierte Form. Dann gilt

$$Q(f) = \widetilde{Q}(\widetilde{f})$$

wobei die Funktion $\widetilde{f}$ auf $\widetilde{X}$ definiert ist durch $\widetilde{f}(x) = f(x)$ fuer $x \in X$ und $\widetilde{f}(\infty) = 0$. In dieser Weise haben wir den urspruenglichen Graphen durch einen Graphen mit verschwindendem c ersetzt.

Ersetze Dirichletbedingung durch x mit $c(x) \neq 0$: Sei (X, b, c) gegeben. Sei $K \subset X$. Dann kann man jedes f auf X mit $f = 0$ auf $X \setminus K$ auffassen als f_K auf K. Die Form Q induziert dann auf

$$\mathcal{H}_K := \text{Funktionen auf } K$$

die Form Q_K definiert durch

$$Q_K(f, g) := Q(i_K f, i_K g)$$

mit der kanonischen Inklusion

$$i_K : \mathcal{H}_K \longrightarrow \mathcal{H}(= \text{Funktionen auf } X).$$

Es ist (Uebung!) Q_K wieder eine Dirichletform. Damit gibt es also $b_K : K \times K \longrightarrow [0, \infty)$ und $c_K : K \longrightarrow [0, \infty)$ mit

$$Q_K(f, f) = \sum_{x \in K} b_K(x, y)(f(x) - f(y))^2 + \sum c_K(x) f(x)^2.$$

Es gilt (Uebung)

$$b_K(x, y) = b(x, y)$$

sowie

$$c_K(x) = c(x) + \sum_{y \in X \setminus K} b(x, y).$$

Hierbei 'entstehen' also die Beitraege zu $c_K(x)$ gerade durch Gewichte $b(x, y)$ von Kanten von $x \in K$ zu $y \in X \setminus K$.

Man kann sich leicht davon ueberzeugen, dass die beiden geschilderten Prozesse zueinander Inverse sind.

Ende der 12. Vorlesung

3. Eine untere Abschaetzung fuer die Form

In diesem Abschnitt nutzen wir die Betrachtungen der vergangenen beiden Abschnitte zu Co-Area Formel bzw. Dirichletrandbedingungen, um eine Dirichletform auf einem Graphen nach unten abzuschaetzen. Ist $c \neq 0$, so liefert dies eine Abschaetzung des untersten Eigenwertes. Eine entscheidende Rolle spielen Verhaeltnisse von Volumina des Randes zu Volumina von Mengen. Die Grundidee kann man so formulieren: Ist $f \neq 0$ und $f(x) = 0$ in einem x, so muss ∇f gross sein und das fuehrt dazu, dass auch $Q(f) = \langle \nabla f, \nabla f \rangle$ gross wird.

Sei (X, b, c) ein Graph. Zu $K \subset X$ assoziieren wir nun 'Volumen' bzw. 'Massen' des Randes der Menge und der Menge. Dazu definieren wir wie folgt:

$$\begin{aligned} L_K &:= \sum_{x \in K, y \notin K} b(x,y) + \sum_{x \in K} c(x) \\ &= \text{Gesamtmasse der Kanten zwischen } K \text{ und } K^c \end{aligned}$$

Man kann sich L_K als Gesamtmasse des Randes von K vorstellen.
Zu $x \in X$ sei weiterhin definiert

$$m_x := c(x) + \sum_y b(x,y).$$

Zu $K \subset K$ definiert man dann

$$\begin{aligned} A_K &:= \sum_{x \in K} m(x) \\ &= \sum_{x \in K} \left(c(x) + \sum_{y \in X} b(x,y) \right) \\ &= \text{Gesamtmasse der von } K \text{ ausgehenden Kanten (einschliesslich Kanten nach } \infty) \end{aligned}$$

Man kann sich A_K als die Gesamtmasse von K vorstellen.

Bemerkung - Deutung der Massen mittels Q.
(a) Zu jeder Menge $K \subset X$ koennen wir die auf K eingeschraenkte Form Q_K betrachten (s.o.). Diese ist wieder eine Dirichletform. Sie wird also durch eine Funktionen $b_K : K \times K \longrightarrow [0, \infty)$, $c_K : K \longrightarrow [0, \infty)$ beschrieben. Es gilt

$$L_K = Q(1_K) = Q_K(1) = \sum_{x \in K} c_K(x,x).$$

(Randterm = Wert der Form auf char. Funktion = Werte der c auf Diagonalen). Insbesondere gilt

$$L_X = Q(1) = \sum_{x \in X} c(x).$$

(b) Eine direkte Rechnung zeigt

$$Q(1_K) = -Q(1_K, 1_{X \setminus K})$$

falls $c = 0$.
(Volumen = Wert der Form zwischen char. Funktion der Menge und ihres Komplementes).

(c) Ist (X, b, c) zusammenhaengend, so gilt $L_K > 0$ fuer alle $K \neq X$. (Uebung)

(d) Wir haben sowohl A_K als auch L_K ueber die (b, c) definiert. Grundsaetzlich koennten wir auch A_K als $A_K = \sharp K$ definieren. Das wird spaeter von Nutzen sein.

Das folgende Ergebnis geht auf Dodziuk '84 und Dodziuk/Kendall '85 zurueck.

Theorem. *(Allgemeine Cheeger Ungleichung) Sei (X, b, c) ein zusammenhaengender Graph. Sei $U \subset X$ mit $U \neq \emptyset$ beliebig und*

$$\alpha := \min_{K \subset U, K \neq \emptyset} \frac{L_K}{A_K}.$$

Dann gilt

$$Q(f) \geq \frac{\alpha^2}{2} \sum_{x \in V} m(x) f^2(x)$$

fuer alle f, die ausserhalb von U verschwinden.

Bemerkung. Ist $U = X$ und $c = 0$, so ist $\alpha = 0$ (Waehle $K = X$). Im Falle von verschwindendem c ist die Aussage also nur fuer nichtleere Teilmengen U interessant. Fuer solche U ergibt sich dann (vgl. Teil (c) obiger Bemerkung bzw. verschiedene Betrachtungen in vorhergehenden Abschnitten), dass das Spektrum des Graphen durch Einfuehren von Dirichletrandbedingungen gehoben wird.

*B*eweis. Ohne Einschraenkung sei $f \geq 0$
(Denn: $Q(f) \geq Q(|f|)$ und $\sum m(x) f(x)^2 = \sum m(x) |f(x)|^2$.)
Der Fall $U = X$ und $c = 0$ ist trivial (da dann $\alpha = 0$ gilt, s.o.). Wir nehmen, daher an, dass wir nicht in diesem Fall sind.

Gemaess den Betrachtungen des vorigen Abschnittes erweitern wir nun (X, b, c) zu $(\widetilde{X}, \widetilde{b}, 0)$ mit assoziierter Form $\widetilde{Q}$, wobei $\widetilde{X} := X \cup \{\infty\}$ gilt. Weiterhin erweitern wir f zu $\widetilde{f}$ durch Fortsetzen durch 0. Damit sind wir in der Situation, dass der Absoptionsteil verschwindet.

Da wir den Fall $U = X$, $c = 0$ ausgeschlossen haben, gibt es ein x mit $\widetilde{f}(x) = 0$ (naemlich $x = \infty$ falls $c \neq 0$ oder $x \in X \setminus U$ falls $c = 0$). Insbesondere ist also $\min f = 0$ (da $f \geq 0$ nach Annahme).

Entscheidend ist nun die Beobachtung, dass die Groessen L_K und A_K auch im neuen Graphen ihren urspruenglichen Wert behalten, falls K eine Teilmenge von X ist. (Die auftretenden Summen bleiben gleich. Die Terme werden nur etwas anders interpretiert: Was vorher ein Absorptionsterm war, wird nun als Kante zum neuen Punkt ∞ gezaehlt). Ebenso gilt (s.o.) auch $\widetilde{Q}(\widetilde{f}) = Q(f)$.

Wir betrachten

$$A := \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \widetilde{X}} \widetilde{b}(x,y) |\widetilde{f}^2(x) - \widetilde{f}^2(y)|.$$

Wir beweisen die obere Abschaetzung (OA)

$$A \leq Q(f)^{1/2} \sqrt{2} (\sum_{x \in X} m(x) f(x)^2)^{1/2}$$

und die untere Abschaetzung (UA)

$$A \geq \alpha \sum_{x \in X} m(x) f^2(x).$$

Dann folgt die Aussage sofort.

Obere Abschaetzung. Es gilt $|\widetilde{f}^2(x) - \widetilde{f}^2(y)| = |\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(y)||\widetilde{f}(x) + \widetilde{f}(y)|$. Damit folgt nach Definition von A also

$$A = \frac{1}{2} \sum_{x,y} \widetilde{b}(x,y)^{1/2} |\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(y)| \widetilde{b}(x,y)^{1/2} |\widetilde{f}(x) + \widetilde{f}(y)|.$$

Anwenden von Cauchy-Schwarz und Nutzen von

$$|\widetilde{f}(x) + \widetilde{f}(y)|^2 \leq 2\widetilde{f}(x)^2 + 2\widetilde{f}(y)^2$$

liefert dann die Abschaetzung. (Wegen $\widetilde{f}(\infty) = 0$, traegt, der Punkt ∞ nicht zu der Summe bei.)

Untere Abschaetzung. Seien $t_0 < t_1 < \ldots < t_M$ die verschiedenen Werte von f^2 und $K_i := \{x : f(x) \geq t_i\}$. Dann gilt nach der Co-Area-Formel (angewendet auf f^2) also

$$A = \sum_{i=1}^{M} (t_i^2 - t_{i-1}^2) L_{K_i}.$$

Nach Definition von α koennen wir dies Abschaetzen zu

$$A \geq \alpha \sum_{i=1}^{M} (t_i^2 - t_{i-1}^2) A_{K_i}.$$

Nach der Area Formel gilt fuer die rechte Seite aber gerade ($\min f = 0$)

$$\sum_{i=1}^{M} (t_i^2 - t_{i-1}^2) A_{K_i} = \sum m(x) f^2(x).$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Bemerkung. Man erhaelt unter Umstaenden durch Nutzen einer Cheeger Konstante, die nicht Kantenvolumina sondern Vertexvolumina beruecksichtigt, ein etwas besseres Ergebnis (s.u.). Allerdings entsteht dann noch ein zusaetzlicher Faktor des Vertexgrades. Daher kann die entsprechende Abschaetzung fuer unendliche Graphen mit unbeschraenktem Kantengrad nicht direkt angewendet werden. Die obige Abschaetzung hat denn Vorteil, dass sowohl ihre Aussage und Beweis genauso auch fuer unendliche Graphen gueltig bleiben.

Als eine erste Folgerung erhalten wir eine Abschaetzung fuer den untersten Eigenwert (falls $c \neq 0$).

FOLGERUNG. *Sei (X, b, c) ein zusammenhaengender Graph und $c \neq 0$. Sei $\beta := \min(Bild(b) \cup Bild(c)) \setminus \{0\}$ und $M := \sum_{x,y} b(x, y) + \sum_x c(x)$. Dann gilt*

$$\alpha := \min_{K \subset X} \frac{L_K}{A_K} \geq \frac{\beta}{M} > 0$$

und es erfuellt der kleinste Eigenwert λ_1 des assoziierten Operator L die Abschaetzung

$$\lambda_1 \geq \frac{\alpha^2}{2} d > 0$$

mit

$$d := \min\{m(x) : x \in X\}.$$

Beweis. Es reicht die Abschaetzung fuer α zu zeigen. (Dann folgt die Aussage aus dem vorigen Satz). Wir untersuchen $\frac{L_K}{A_K}$ und unterscheiden zwei Faelle:

$K = X$: Wegen $c \neq 0$ gilt dann

$$L_K = \sum_{x \in K, y \notin K} b(x, y) + \sum_{x \in K} (x) = \sum_{x \in X} c(x) > 0.$$

$K \neq X$: Dann ist $X \setminus K$ nicht leer. Da der Graph zusammenhaenend ist, gibt es dann also ein $x \in K$ und $y \notin K$ mit $b(x, y) > 0$. Damit folgt auch in diesem Fall $L_K > 0$. $\square$

Bemerkung.

- Gilt $c = \kappa 1_p$ fuer ein $p \in X$ mit $\kappa > 0$, so zeigt die Abschaetzung

$$\lambda_1 \geq Constant \kappa^2$$

fuer kleine κ.

- Nehmen β und c nur Werte in $\{0, 1\}$ an, so erhaelt man

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{2M^2}$$

mit $M :=$ 2Anzahl der Kanten + Anzahl der x mit $c(x) \neq 0$.

Ende der 13. Vorlesung

Wir kommen nun noch zu einer anderen Variante der Cheeger-Ungleichung, bei der das Vertexvolumen gemessen wird.

THEOREM. *(Cheeger Ungleichung - Variante) Sei (X, b, c) ein zusammenhaengender Graph. Sei $U \subset X$ beliebig. Sei*

$$h := \min_{K \subset U, K \neq \emptyset} \frac{L_K}{\sharp K}$$

und $D := \max\{m(x) : x \in U\}$. *Dann gilt*

$$Q(f) \geq \frac{h^2}{2D}\|f\|^2$$

fuer alle f*, die ausserhalb von* U *verschwinden.*

*B*eweis. Ohne Einschraenkung (s.o.) betrachten wir $c = 0$ und $U \neq X$. Dann verschwindet also f auf X irgendwo. Setze

$$A := \frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)|f^2(x) - f^2(y)|.$$

Wir beweisen eine obere und eine untere Abschaetzung wie folgt:

Obere Abschaetzung: Wegen $|f^2(x) - f^2(y)| = |f(x) - f(y)||f(x) + f(y)|$ gilt

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)^{1/2}|f(x) - f(y)|b(x,y)^{1/2}|f(x) + f(y)| \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)|f(x) - f(y)|^2\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)|f(x) + f(y)|^2\right)^{1/2} \\ &\leq Q(f)^{1/2}\sqrt{D}\sqrt{2}\|f\|. \end{aligned}$$

Untere Abschaetzung: Aufgrund der Voraussetzung und der Co-Area Formeln gilt mit

$$K_t = \{x \in X : f^2(x) \geq t\}.$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty L_{K_t} dt \\ &\geq \int_0^\infty h\sharp K_t dt \\ &= h\int_0^\infty \sharp K_t dt \\ &= h\sum_{x\in U} f(x)^2. \end{aligned}$$

(Hierbei wird im letzten Schritt die Area formel mit $m \equiv 1$ sowie $\sharp K = \sum_{x\in K} m(x)1$ benutzt.) Nimmt man die beiden Abschaetzungen zusammen, so erhaelt man

$$h\|f\|^2 \leq A \leq Q(f)^{1/2}\sqrt{2D}\|f\|.$$

Damit folgt die gewuenschte Aussage. □

Bemerkung.

- Mit h bzw. α kontrollieren wir die Quotienten $Q(1_K)/\|1_K\|$ bzw. $Q(1_K)/\sum_{x\in K} m(x)$. Die Co-Area Formel erlaubt es dann, damit eine beliebige Funktion zu kontrollieren.
- Fuer unendliche Graphen ist in obigem Schluss etwas Vorsicht geboten. Es kann naemlich dann $h = \infty$ und $D = \infty$ gelten.

Bemerkung. Ist $m(x) = c(x) + \sum_y b(x,y) \equiv m$ konstant, so liefern beide Cheeger Ungleichungen die gleiche Abschaetzung. Dann gilt naemlich $A_K = m\sharp K$, $D = m$ und $m(x) = m$ und es folgt $h = m\alpha$ und damit

$$\frac{h^2}{2D} \sum_{x \in X} f(x)^2 = \frac{\alpha^2 m^2}{2D} \sum_{x \in X} f(x)^2 = \frac{\alpha^2}{2} \sum_{x \in X} m(x) f(x)^2.$$

Die obigen Resultat beruhen auf der Abschaetzung $L_K \geq \alpha A_K$. Auch mit der (etwas schwaecheren) Abschaetzung $L_K \geq C A_K^{1-1/n}$ laesst sich ein Satz beweisen. Das geht auf Chung/Grigoryan/Yau '99 zurueck. Es wird manchmal unter dem Stichwort Farber-Krahn Ungleichung diskutiert.

THEOREM. *(Faber-Krahn-Ungleichung) Sei (X, b, c) ein Graph. Sei $U \subset X$ beliebig. Gibt es ein $C > 0$ und $n \geq 1$ mit $L_K \geq C A_K^{1-1/n}$ bzw. $L_K \geq C \sharp K^{1-1/n}$ fuer alle $K \subset U$ mit $K \neq \emptyset$, so folgt*

$$Q(f) \geq \frac{C^2}{2} A_U^{-2/n} \sum_{x \in U} m(x) f(x)^2$$

bzw.

$$Q(f) \geq \frac{C^2}{2D\sharp U^{2/n}} \sum_{x \in U} f(x)^2$$

fuer alle f, die ausserhalb von U verschwinden.

*B*eweis. Wir zeigen nur die erste Abschaetzung. Die zweite folgt analog. Es gilt fuer $K \subset U$ natuerlich aufgrund der Monotonie von $K \mapsto A_K$

$$\frac{L_K}{A_K} = \frac{L_K}{A_K^{(1-1/n)} A_K^{1/n}} \geq \frac{L_K}{A_K(1-1/n)} \frac{1}{A_U^{1/n}} \geq \frac{C}{A_U^{1/n}}.$$

Mit $\alpha = \frac{C}{A_U^{1/n}}$ folgt dann die Aussage aus den vorhergehenden Cheeger Ungleichungen. □

Bemerkung. Im $\mathbb{R}^n$ gilt folgende Isomeperimetrische Ungleichung: Ist B eine beschraenkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand und $|B|$ ihr Volumen und $|\partial B|$ die Oberflaeche ihres Randes so gilt

$$|\partial B| \geq n C_n |B|^{1-1/n}$$

mit C_n = Volumen der Einheitskugel$^{1/n}$. (Fuer Wuerfel / Kugeln macht man sich diese Ungleichung leicht klar.) Es gilt Gleichheit genau fuer die Kugeln. In diesem Sinne kann man einen Graphen, der die Voraussetzung des vorigen Satzes erfuellt, als einen n-dimensionalen Graphen auffassen.

4. Noch eine Abschaetzung fuer die Form

In diesem Abschnitt lernen wir noch eine weitere untere Abschaetzung fuer die Form kennen. Im Gegensatz zu den vorigen Abschaetzungen gilt sie erst einmal nur fuer endliche Graphen. Sie findet sich z.b. bei Chung.

Fuer einen Graphen (X, b, c) und $x \neq y$ in X bzeichnen wir mit $P(x, y)$ die Menge der ueberschneidungsfreien Wege von x nach y. Jeder solche Weg kann also als

$$(x_0, \ldots, x_M)$$

mit

- $x_0 = x, x_M = y,$
- x_j, paarweise verschiededen
- $b(x_{j-1}, x_j) > 0$

geschrieben werden. Fuer einen solchen Weg $\gamma = (x_0, \ldots, x_M)$ definieren wir die Laenge

$$l(\gamma) := \sum_{j=0}^{M-1} \frac{1}{b(x_j, x_{j+1})}.$$

(Dabei ist die Idee also, dass Punke umso naeher aneinandern sind, je groesser der zugehoerige Wert von b ist.) Den Abstand $d(x, y)$ von x und y definieren wir dann als die Laenge des kuerzesten Pfades zwischen x und y d.h. durch

$$d(x, y) = \min_{\gamma \in P(x,y)} l(\gamma) =: l(x, y).$$

Der Durchmesser des Graphen $\operatorname{diam}(X, b)$ ist dann definiert als

$$\operatorname{diam}(X, b) := \max_{x \neq y} \min_{P(x,y)} \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{b(x_{j-1}, x_j)}.$$

(Laenge des laengsten kuerzesten Weges ;-)
Weiterhin definieren wir die Menge $\mathcal{L}$ der 'lauen' Funktionen ϕ auf X fuer die gilt:

- $\phi \neq 0$
- ϕ ist nicht strikt positiv.
- ϕ ist nicht strikt negativ.

Eine Funktion ϕ gehoert also genau dann zu $\mathcal{L}$, wenn es $x, y \in X$ gibt mit $\phi(x) \neq 0$ und $\phi(x)\phi(y) \leq 0$. Offenbar gilt $\mathcal{L} = -\mathcal{L}$.

Theorem. *Sei (X, b, c) ein zuzammenhaengender Graph und Q die assoziierte Form. Dann gilt*

$$\inf_{\phi \in \mathcal{L}} \frac{Q(\phi)}{\|\phi|^2} \geq \frac{1}{|X| \, diam \ (X,b)}.$$

*B*eweis. Ohne Einschraenkung $c = 0$. Sei $\phi \in \mathcal{L}$ gegeben. Sei x mit $|\phi(x)| = \max |\phi|$ gewaehlt. Ohne Einschraenkung (sonst Multiplizieren von ϕ mit -1), koennen wir annehmen

$$\phi(x) = \max |\phi|.$$

Wegen $\phi \neq 0$ gilt weiterhin $\phi(x) > 0$. Nach Definition von D gibt es ein $y \in X$ mit $\phi(y) \leq 0$. Damit folgt also insgesamt

(*) $\phi(x) > 0 \geq \phi(y)$
(**) $\phi(x) \geq |\phi(z)|$ fuer alle $z \in X$.

Sei nun $(x_0, \ldots, x_M)$ ein Pfad von x nach y mit kuerzester Laenge $l(x, y)$. Dann gilt nach Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(y)| &\leq \sum_j b(x_{j-1}, x_j)^{1/2} |\phi(x_{j-1}) - \phi(x_j)| \frac{1}{b(x_{j-1}, x_j)^{1/2}} \\ &\leq Q(\phi)^{1/2} l(x, y)^{1/2} \\ &\leq Q(\phi)^{1/2} \mathrm{diam}(X, b)^{1/2}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$Q(\phi) \geq \frac{1}{\mathrm{diam}(X, b)} |\phi(x) - \phi(y)|^2.$$

Nach $(*)$ und $(**)$ gilt weiterhin

$$|\phi(x) - \phi(y)|^2 \geq \phi(x)^2 \geq \frac{1}{|X|} \|\phi\|^2.$$

Damit folgt die Aussage. □

5. Abschaetzungen fuer den zweiten Eigenwert

In diesem Abschnitt stellen stellen wir Abschaetzungen fuer den zweiten Eigenwert vor. Wir werden diese aus der allgemeinen Abschaetzung des vorigen Abschnittes erhalten. Der Grundgedanke ist dabei, dass die Eigenfunktion zum zweiten Eigenwert die Vertexmenge in zwei Teile teilt: den Teil auf dem der Positivteil der Eigenfunktion getragen ist und den Teil auf dem der Negativteil der Eigenfunktion getragen ist. Auf Positiv. bzw. Negativteil koennen wir dann die Abschaetzung des vorigen Abschnttes anwenden.

Der grundlegende Schritt der Zerlegung in Positiv- und Negativteil wird in folgender Proposition ausgefuehrt.

Proposition. *Sei (V, b, c) ein zusammenhaengender Graph mit assoziierter Form Q und assoziiertem Operator L. Seien $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ die Eigenwerte von L und ϕ eine Eigenfunktion zu λ_2. Seien ϕ_+ und ϕ_- der Positiv- bzw. Negativteil von ϕ. Dann verschwinden weder ϕ_+ noch ϕ_- und es gilt*

$$Q(\phi_+, \phi_+) \leq \lambda_2 \|\phi_+\|^2 \text{ und } Q(\phi_-, \phi_-) \leq \lambda_2 \|\phi_-\|^2.$$

Bemerkung.

- Die Proposition fuehrt die Abschaetzung des zweiten Eigenwertes effektiv auf eine Abschaetzung des ersten Eigenwertes geeigneter Einschraenkungen des Operators zurueck.
- Im Falle $c = 0$, haendelt es sich bei λ_2 gerade um die spektrale Luecke $\lambda_2 = \lambda_2 - \lambda_1$.

Ende der 14. Vorlesung.

Beweis. Da der Graph zusammenhaengend ist, ist der Eigenraum zum ersten Eigenwert eindimensional und wird von einer strikt positiven Funktion aufgespannt (s.o.). Damit koennen weder ϕ_+ noch ϕ_- verschwindent (da ja ϕ auf der Eigenfunktion zu λ_1 senkrecht ist). Wir zeigen die Abschaetzung fuer ϕ_+. Die andere Abschaetzung folgt analog (z.B. nach Multiplikation von ϕ mit -1). Da Q eine Dirichletform ist, gilt

$$Q(\phi_+, \phi_-) \leq 0.$$

(Denn: $Q(|\phi|) \leq Q(\phi)$...)
Damit folgt

$$\begin{aligned} Q(\phi_+, \phi_+) &\leq Q(\phi_+, \phi_+) - Q(\phi_+, \phi_-) \\ &= Q(\phi_+, \phi) \\ &= \langle \phi_+, L\phi \rangle \\ &= \lambda_2 \langle \phi_+, \phi \rangle \\ &= \lambda_2 \|\phi_+\|^2. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Wir koennen diese Proposition mit den Abschaetzungen der vorigen Abschnitte verbinden. Das fuehrt auf die folgenden Aussagen.

FOLGERUNG. *Sei (X, b, c) ein zusammenhaengender Graph und $N = \sharp X$. Sei*

$$\alpha := \min_{K \subset X, 0 < A_K \leq A_X/2} \frac{L_K}{A_K}, \quad h := \min_{K \subset X, 0 < |K| \leq N/2} \frac{L_K}{\sharp K}$$

und $d := \min\{m(x) : x \in X\}$ (kleinster Vertexgrad) und $D := \max\{m(x) : x \in X\}$. Dann gilt

$$\lambda_2 \geq \frac{\alpha^2}{2} d, \quad \frac{h^2}{2D}.$$

*B*eweis. Wir zeigen nur die zweite Abschaetzung: Aufgrund der vorangegangenen Proposition reicht es Abschaetzungen fuer $Q(\psi)$ zu geben, wobei ψ auf einer Menge getragen ist, deren Volumen $N/2$ nicht uebersteigt. Nun folgt die Aussage aus der allgemeinen Cheeger Ungleichung des vorigen Abschnittes. □

Bemerkung. Es haengt von der konkreten Situation ab, welcher der beiden Terme $\frac{\alpha^2}{2} d$, $\frac{h^2}{2D}$ der groessere ist. Hat der Graph konstanten Grad, sind beide Terme gleich.

FOLGERUNG. *Sei (X, b, c) ein zusammenhaengender Graph, Q die assoziierte Form und $\lambda_1 < \lambda_2$ die beiden kleinsten Eigenwerte des zugehoerigen Operator. Dann gilt*

$$\lambda_2 \geq \frac{1}{|X| \, diam \ (X,b)}.$$

*B*eweis. Wir wissen schon, dass es zum kleinsten Eigenwert eine strikt positive Eigenfunktion gibt. Damit hat jede Eigenfunktion zum zweiten Eigenwert sowohl echt positive als auch echt negative Werte an, gehoert also zu $\mathcal{L}$. Damit folgt die Aussage sofort aus der Abschaetzung im vorigen Abschnitt. □

Bemerkung. Nimmt b nur Werte in $\{0, 1\}$ an, so erhaelt man folgende Abschaetzung:

$$\lambda_2 \geq \frac{1}{|X|^2}.$$

In diesem Fall erhaelt man fuer die Cheeger Konstante h die Abschaetzung $h \geq \frac{2}{|X|}$ (klar). Damit liefert dann die entsprechende Cheeger Ungleichung $\lambda_2 \geq \frac{h^2}{2D}$ also

$$\lambda_2 \geq \frac{2}{|X|^2 D}.$$

Fuer $D > 2$ ist obiges also die bessere Abschaetzung. Der Fall $D = 2$ kann explizit behandelt werden (da es sich dann um eine Strecke bzw. einen Kreis handeln muss).

Wir schliessen den Abschnitt mit einer o b e r e n Abschaetzung fuer den zweiten Eigenwert ab.

Proposition. *Sei $(X, b, 0)$ ein zusammenhaengender Graph und*

$$h := \min\{\frac{L_K}{\sharp K} : 0 < |K| \leq \sharp X/2\}.$$

Dann gilt $\lambda_2 \leq 2h$.

*B*eweis. Da die konstante Funktion 1 eine Eigenfunktion zum Eigenwert 0 ist, gilt gilt (NR)

$$\lambda_2 = \inf\{\frac{Q(f)}{\|f\|^2} : f \perp 1\}.$$

(Denn $Q(f) = \langle f, Lf \rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \|P_j f\|^2$ mit den Eigenwerten λ_j und den Projektionen auf die zugehoerigen Eigenraeume P_j....)
Zerlege X in disjunkte nichtleere Mengen S und T mit Maechtigkeit s bzw. t. Ohne Einschraenkung sei $0 < s \leq t$. Definiere die Funktion ϕ durch $\phi(x) = t$ auf S und $\phi(x) = -s$ auf T. Dann gilt $\phi \perp 1$ und damit

$$\lambda_2 \leq \frac{Q(\phi)}{\|\phi\|^2}.$$

Wir berechnen nun die rechte Seite zu

$$\frac{Q(\phi)}{\|\phi\|^2} = \frac{(t+s)^2 L_S}{st^2 + ts^2} = \frac{L_S(s+t)}{st}.$$

Mit

$$\frac{s+t}{st} \leq \frac{2t}{st} = \frac{2}{s}$$

folgt

$$\frac{Q(\phi)}{\|\phi\|^2} \leq 2\frac{L_S}{\sharp S}.$$

Da dies fuer jede beliebige Zerlegung $X = S \cup T$ in disjunkte nichtleere Mengen gilt, folgt die Behauptung. □

6. Variationelle Charakterisierung der Cheeger Konstanten

In diesem Abschnitt lernen wir eine variationelle Charakterisierung der Cheeger Konstanten fuer Graphen mit verschwindendem c kennen. Im Unterschied zu den vorigen Abschnitten handelt es sich in diesem Abschnitt nicht um Theorie im Hilbertraum ℓ^2, sondern um ℓ^1-Theorie.

THEOREM. *Sei $(X, b, 0)$ ein zusammenhaengender Graph mit $\sharp X \geq 2$. Sei $m : X \longrightarrow (0, \infty)$ gegeben und $A_K := \sum_{x \in K} m(x)$ fuer $K \subset X$. Sei*

$$\beta = \beta_m := \min\{\frac{L_K}{A_K} : 0 < A_K \leq A_X/2\}.$$

Dann gilt

$$\beta = \inf_{\phi} \sup_{\gamma \in \mathbb{R}} \frac{\frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)|\phi(x) - \phi(y)|}{\sum_{x \in X} m(x)|\phi(x) - \gamma|},$$

wobei das Infimum ueber alle nichtkonstanten ϕ genommen wird.

Bemerkung.

- Es handelt sich nicht um ein Resultat im Hilbertraum, sondern um eine Minimierung in ℓ^1. Die Minimierung im Hilbertraum fuehrt auf die Eigenwerte. Entsprechende Minimierungen in ℓ^p fuer beliebige p mit $1 \leq p \leq \infty$ werden ebenfalls untersucht.
- Man koennte auch im Zaehler ϕ durch $\phi - c$ ersetzen. Das wuerde aber nichts aendern.
- Minimiert bei gegebenem nichtkonstanten ϕ die Zahl γ_{min} den Nenner $\sum_{x \in X} |\phi(x) - \gamma|$, so verschwindet $\psi = \phi - \gamma_{min}$ nicht und erfuellt

$$\sum_{x \in X} |\psi(x) - \gamma| m(x) \geq \sum_{x \in X} |\psi(x)| m(x)$$

fuer alle $\gamma \in \mathbb{R}$. Daher kann man sich das Supremum ueber $\gamma \in \mathbb{R}$ sparen, in dem man das Infimum bildet ueber alle nichtverschwindenden ϕ mit

$$\sum_{x \in X} |\phi(x) - \gamma| m(x) \geq \sum_{x \in X} |\phi(x)| m(x)$$

fuer alle $\gamma \in \mathbb{R}$.
- Das kontinuierliche Analogon zu obigen Abschaetzungen beschaeftigt sich mit

$$S = \inf \sup_{\gamma} \frac{\int_X |\nabla f| dx}{\int_X |f - \gamma| dx}.$$

Diese Groesse wird manchmal als Sobolevkonstante bezeichnet. Die Ungleichung

$$\int_X |f - \gamma| dx \leq S \int_X |\nabla f| dx$$

heisst Poincaré Ungleichung.

*B*eweis. Es sind zwei Ungleichungen zu zeigen. Wir bezeichnen den Term auf der rechten Seite mit S.
Es gilt $\beta \geq S$*:* Waehle $K \subset X$ mit $A_K \leq \sharp A_X/2$ und

$$\beta = \frac{L_K}{A_K}.$$

Sei $\psi := 1_S$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sup_{c\in\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)|\psi(x)-\psi(y)|}{\sum_{x\in X} m(x)|\psi(x)-\gamma|} &= \sup_{\gamma\in\mathbb{R}} \frac{L_K}{|1-\gamma|A_K + |\gamma|A_{X\setminus K}} \\
&= \frac{L_K}{\inf_{\gamma\in\mathbb{R}} |1-\gamma|A_K + |c|A_{X\setminus K}} \\
&= \frac{L_K}{A_K} \\
&= \beta.
\end{aligned}$$

Hier nutzen wir im vorletzen Schritt $A_{X\setminus K} \geq A_K$ und das daraus folgende

$$|1-\gamma|A_K + |\gamma|A_{X\setminus K} \geq A_K(|1-\gamma| + |\gamma|) \geq A_K.$$

Das zeigt die gewuenschte Ungleichung.

Ende der 15. Vorlesung

Es gilt $\beta \leq S$*:* Das folgt mit der Co-Area Formel: Sei $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ nicht konstant. Fuer $t \in \mathbb{R}$ sei

$$K_t := \{x \in X : \phi(x) \geq t\}.$$

Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $A_{K_s} \leq \sharp A_X/2$ fuer alle $s > \gamma$ und $A_{(S\setminus K_s)} \leq A_X/2$ fuer alle $s < \gamma$ gewaehlt. Dann gilt nach Co-Area Formel und Area Formel

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{x,y\in X} b(x,y)|\phi(x)-\phi(y)| &= \int_{\mathbb{R}} L_{K_t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\gamma} L_{K_t} dt + \int_{\gamma}^{\infty} L_{K_t} dt \\
(L_K = L_{X\setminus K}) \quad &= \int_{-\infty}^{\gamma} L_{X\setminus K_t} dt + \int_{\gamma}^{\infty} L_{K_t} dt \\
&\geq \beta\int_{-\infty}^{\gamma} A_{X\setminus K_t} dt + \beta\int_{\gamma}^{\infty} A_{K_t} dt \\
&= \beta\int_{-\infty}^{0} A_{X\setminus K_{t+\gamma}} dt + \beta\int_{0}^{\infty} A_{K_{t+\gamma}} dt \\
&= \beta\sum_{x\in X} m(x)|\phi(x)-\gamma|.
\end{aligned}$$

Damit folgt die gewuenschte Ungleichung.
(Hier haben wir im vorletzen Schritt auf beide Terme die Area - Formel angewendet auf $f_+ := \max\{0, \phi - \gamma\}$ und auf $f_- := \max\{\gamma - \phi, 0\}$ und erhalten

$$\sum_{x\in X} f_+(x)m(x) = \sum_{x\in X} (f_+(x) - 0)m(x) = \int_0^\infty A_{K_t^+} dt$$

mit

$$K_t^+ = \{x : f_+(x) \geq t\} = \{x : \phi(x) - \gamma \geq t\} = K_{t+\gamma}.$$

bzw.

$$\sum_{x \in X} f_-(x)m(x) = \sum_{x \in X}(f_-(x) - 0)m(x) = \int_0^\infty A_{K_t^-} dt = \int_{-\infty}^0 A_{K_{-t}^-} dt$$

mit

$$K_{-t}^- = \{x : f_-(x) \geq -t\} = \{x : \gamma - \phi(x) \geq -t\} = \{x : \phi(x) \leq \gamma + t\} = X \setminus \widetilde{K}_{\gamma+t}$$

mit $\widetilde{K}_s := \{x : \phi(x) > s\}$.

□

Mit der Aussage erhaelt man eine einfache Abschaetzung fuer β:

FOLGERUNG. *Sei die Situation wie im vorangegangenen Theorem. Dann gilt die Abschaetzung*

$$\frac{\beta}{2} \leq \inf_\psi \frac{\frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)|\psi(x) - \psi(y)|}{\sum_x |\psi(x)|m(x)} \leq \beta,$$

wobei das Infimum genommen wird ueber alle $\psi \neq 0$ mit

$$\sum_{x \in X} \psi(x)m(x) = 0$$

(d.h. $\psi \perp_m 1$).

*B*eweis. Ist ϕ nichtkonstant, so verschwindet $\psi = \phi - \gamma$ fuer kein $\gamma \in \mathbb{R}$ und erfuellt fuer geeignetes $\gamma = \gamma_\phi$ noch $\sum_x \psi(x)m(x) = 0$. Damit folgt die zweite Ungleichung direkt aus dem vorangegangenen Theorem wegen

$$\begin{aligned} \beta &= \inf \sup_\gamma \frac{\frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)|\phi(x) - \phi(y)|}{\sum_{x \in X} m(x)|\phi(x) - \gamma|} \\ &\geq \inf \frac{\frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)|\phi(x) - \phi(y)|}{\sum_{x \in X} m(x)|\phi(x) - \gamma_\phi|} \\ &\geq \inf_{\psi : \psi \perp_m 1} \frac{\frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)|\psi(x) - \psi(y)|}{\sum_{x \in X} m(x)|\psi|}. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die erste Ungleichung. Waehle dazu γ zu ψ wie im Beweis des vorigen Theorem. Dann liefert der Beweis des vorigen Theorems also

$$\beta \leq \frac{\frac{1}{2}\sum_{x,y \in X} b(x,y)|\psi(x) - \psi(y)|}{\sum_x |\psi(x) - \gamma|m(x)}.$$

Weiterhin gilt (!s.u.)

$$\sum_{x \in X} |\psi(x)|m(x) \leq 2\sum_x |\psi(x) - \gamma|m(x).$$

Nimmt man dies zusammen so folgt

$$\frac{\beta}{2} \leq \frac{\frac{1}{2}\sum_{x,y \in X} b(x,y)|\phi(x) - \phi(y)|}{2\sum_x |\psi(x) - \gamma|m(x)} \leq \frac{\frac{1}{2}\sum_{x,y \in X} b(x,y)|\phi(x) - \phi(y)|}{\sum_{x \in X} |\psi(x)|m(x)}.$$

((!) Wir unterscheiden zwei Faelle:

Es gilt $\gamma \geq 0$: Dann gilt

$$\sum_{x:\psi(x)\geq 0} |\psi(x)|m(x) = \sum_{x:\psi(x)\geq 0} \psi(x)m(x) = \sum_{x:\psi(x)\leq 0} |\psi(x)|m(x) \leq \sum_{x:\psi(x)\leq \gamma} |\psi(x)-\gamma|.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in X} |\psi(x)|m(x) &= \sum_{x:\psi(x)\geq 0} |\psi(x)|m(x) + \sum_{x:\psi(x)\leq 0} |\psi(x)|m(x) \\
&\leq 2 \sum_{x:\psi(x)\leq \gamma} m(x)|\psi(x) - \gamma| \\
&\leq 2 \sum_{x} m(x)|\psi(x) - \gamma|.
\end{aligned}$$

Es gilt $\gamma \leq 0$: Dann folgt analog (nach Ersetzen von ψ durch $-\psi$)

$$\sum_{x\in X} |\psi(x)|m(x) \leq 2\sum_{x} |\psi(x) - \gamma|.$$

In jedem Fall folgt die gewuenschte Ungleichung.) $\square$

Offenbar lassen sich die obigen Aussagen spezialisieren: Sei dazu ein zusammenhaengender Graph $(X, b, 0)$ mit $\sharp X \geq 2$ gegeben.

- Sei $m : X \longrightarrow \mathbb{R}, m(x) = \sum_{y\in X} b(x, y)$ und $\alpha := \min_{K\subset X, 0<A_K\leq A_X/2} \frac{L_K}{A_K}$. Dann gilt $\alpha = \beta_m$.
- Sei $h := \min_{K\subset X: 0<\sharp K\leq \sharp X/2} \frac{L_K}{\sharp K}$. Dann gilt $h = \beta_1$.

Bemerkung. In der ℓ^1 Theorie erscheinen also h und α gleichberechtigt. Der Unterschied liegt nur in der Wahl des 'Masses' auf der Menge X.

7. Eine obere Abschaetzung fuer die Form

PROPOSITION. *Sei (X, b, c) ein zusammenhaengender Graph und L der zugehoerige Operator. Sei $m : X \longrightarrow m(x) = \sum b(x, y) + c(x)$ und $D :=$* $\max m(x)$*. Dann gilt*

$$D \leq \|L\| \leq 2D.$$

Insbesondere folgt

$$Q(f) \leq 2D\|f\|^2.$$

Bemerkung. Es ist L nichtnegativ d.h. symmetrisch mit nichtnegativen Eigenwerten. Es ist $\|L\|$ dann gerade der groesste Eigenwert von L. Die Proposition liefert also insbesondere, dass das Spektrum von L in $[0, 2D]$ enthalten ist.

Beweis. *Wir zeigen zunaechst die untere Abschaetzung:* Waehlt man $f = 1_p$, so folgt

$$Q(f) = \frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x, y)(1_p(x) - 1_p(y))^2 + \sum_{x} 1_p(x)c(x) = m(p).$$

Damit folgt mit Cauchy Schwartz also

$$\|Lf\| = \|Lf\|\|f\| \geq Q(f, f) \geq m(p).$$

Da das fuer alle $p \in X$ gilt, folgt $D \leq \|L\|$.

Wir zeigen nun die obere Abschaetzung: Es gilt

$$\begin{aligned}
Q(f) &= \frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)(f(x)-f(y))^2 + \sum_x c(x)f(x)^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)(2f(x)^2+2f(y)^2) + \sum_x c(x)f(x)^2 \\
&= 2\sum_{x,y} b(x,y)f(x)^2 + \sum_x c(x)f(x)^2 \\
&\leq 2\sum_x f(x)^2(\sum_y b(x,y)+c(x)) \\
&= 2D\|f\|^2.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Aussage, da $\|L\|$ der groesste Eigenwert von L ist. $\square$

KAPITEL 4

Einige konkrete Graphen

In diesem Abschnitt untersuchen wir einige konkrete Graphen. Dabei werden wir sehen, dass die obigen Abschaetzungen fuer den zweiten Eigenwert gar nicht so schlecht waren.

1. Einzelne Beispiele

Ende der 16. Vorlesung

Beispiel - Vollstaendiger Graph K_N.

Beispiel - Sterngraph S_N.

Beispiel - Ringgraph R_N.

Beispiel - Linearer Graph.

2. Jacobi-Operatoren.

In diesem Abschnitt fuehren wir die Jacobi-Operatoren $\Delta = \Delta_{b,a}$ ein. Es zeigt sich, dass diese gerade Operatoren zu geeigneten Graphen sind (ggf mit einem Potential gestoert). Uns wird es darum gehen die Eigenwerte solcher Operatoren zu untersuchen und eine Formel fuer die Resolvente $(\Delta+\lambda)^{-1}$ fuer λ ausserhalb des Spektrums herzuleiten. Dazu erweist sich die Untersuchung einer assoziierten Differenzengleichung als hilfreich.

Wir betrachten durchweg folgende **Situation**: Sei $X = \{1, \ldots, N\}$. Sei $\mathcal{H}$ der Vektorraum aller komplexwertigen Funktionen auf X mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \sum_{x\in X} f(x)\overline{g(x)}.$$

Sei $b' : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $b'(x,y) = \overline{b'(y,x)}$ fuer alle $x, y \in X$ und $b'(x,y) \neq 0$ fuer $|x-y| = 1$ und $b'(x,y) = 0$ fuer $|x-y| \geq 2$. Wir setzen dann

$$b(n) := -b'(n, n+1) \quad a(n) := b'(n,n) + b'(n, n+1) + b'(n-1, n).$$

Der zu (b,a) gehoerige Operator $\Delta = \Delta_{(b,a)}$ hat dann auf den ersten Nebendiagonalen die Eintrage b und auf der Hauptdiagonalen die Eintraege a. Ein solcher Operator wird als (endliche) Jacobimatrix bezeichnet. Der wichtige Spezialfall $b \equiv 1$ wird als diskreter eindimensionaler (endlicher) Schroedingeroperator bezeichnet.

Fuer Spektraltheorie spielt das Vorzeichen der b keine Rolle. Genauer gilt folgendes: Sei Δ_1 der Operator zu a, b_1. Sei Δ_2 der Operator zu a, b_2 wobei $|b_1| = |b_2|$. Dann sind Δ_1 und Δ_2 unitaer equivalent.

Beweis (Uebung) Zu $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $j \in \{1, \ldots, N\}$ sei $E(z, j)$ die unitaere Diagonalmatrix, die aus der Einheitsmatrix durch Ersetzen des j-ten Diagonalelementes durch z entsteht. Dann wird Δ durch zukzesive Konjugation mit geeigneten $E(z_1, 1)$, $E(z_2, 2)$,... zu Δ' konjugiert. (Konjugieren mit so einem E multipliziert die j-Spalte und j Zeile z bzw $\overline{z}$...)

Aufgrund dieses Zusammenhanges koennen wir uns im folgenden uns auf den Fall reellwertiger b und sogar $b > 0$ zurueckziehen. Damit handelt es sich bei Δ dann im wesentlichen um einen der Operatoren, wie sie in den vorigen Abschnitten untersucht wurden (abgesehen vom Potential auf der Diagonalen).

Wir interessieren uns fuer Eigenwerte von Δ. Wir beginnen mit einer einfachen Beobachtung.

Proposition. *Die Vielfachheit jedes Eigenwertes von Δ ist 1.*

*B*eweis. Da b nirgends verschwindet ist der Rang von $\Delta - \lambda$ immer mindestens $N - 1$. □

Zur Untersuchung von spektralen Eigenschaften von Δ erweist sich die Untersuchung von Loesungen der entsprechenden Differenzengleichung als sehr zweckmaessig.
Wir setzen $b_0 := b_1$ und definieren den Differenzenoperator τ durch

$$\tau : \text{Funktionen auf } \{0, \ldots, N+1\} \longrightarrow \text{Funktionen auf } \{1, \ldots, N\},$$

$$\tau u(n) := b_{n-1}u_{n-1} + a_n u_n + b_n u_{n+1}.$$

Strukturell entscheidend ist nun folgende einfache Beobachtung.

Proposition. *Sei u eine Funktion auf X und $\widetilde{u}$ die Fortsetzung von u auf $\{0, \ldots, N+1\}$ durch 0 (d.h. $\widetilde{u}(0) = \widetilde{u}(N+1) = 0$ und $\widetilde{u}(n) = u(n)$ fuer $1 \leq n \leq N$). Dann gilt*

$$\tau\widetilde{u} = \Delta u$$

auf X.

*B*eweis. Das folgt durch direkte Rechnung. □

Bemerkung. Der Sachverhalt der Proposition wird manchmal in die Worte gefasst, dass 'Δ eine Dirichletrandbedingung bei 0 und bei $N + 1$ erfuellt'.

Bei $(\tau - \lambda)u = 0$ d.h.

$$(*) \quad b_{n-1}u_{n-1} + (a_n - \lambda)u_n + b_n u_{n+1} = 0 \;\; n = 1, \ldots, N$$

handelt es sich um eine Differenzengleichung/Rekursionsgleichung zweiter Ordnung. Entsprechend ist jede Loesung durch ihre Werte an zwei aufeinanderfolgenden Stellen eindeutig bestimmt. Die Abbildung die die Loesung an zwei aufeinderfolgenden Stellen auf die Loesung and zwei (anderen) aufeinanderfolgenden Stellen abbildet ist linear (da es sich um eine lineare Gleichung handelt). Genauer gilt wegen $(*)$ folgendes

$$u_n = 0u_{n-1} + 1u_n, \;\; u_{n+1} = -\frac{b_{n-1}}{b_n}u_{n-1} + \frac{\lambda - a_n}{b_n}u_n.$$

Mit den *Einschritttransfermatrizen*

$$T_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b_{n-1}}{b_n} & \frac{\lambda - a_n}{b_n} \end{pmatrix}$$

und der Bezeichnung

$$\underline{u}_n := \begin{pmatrix} u(n-1) \\ u(n) \end{pmatrix}$$

gilt also die folgende Kette von Aequivalenzen:

$$u \text{ loest } (\tau - \lambda)u = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$T_n \underline{u}_n = \underline{u}_{n+1},\ n = 1, \ldots, N.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\underline{u}_{n+1} = T_n \cdots T_1 \underline{u}_1,\ n = 1, \ldots, N.$$

Wir setzen

$$M_0 := T_0 := I, \quad M_n := T_n \cdots T_1$$

und bezeichnen die M_n als *Transfermatrizen.* Dann wird die Loesungstheorie von $(\tau - \lambda)$ also komplet durch die Transfermatrizen kodiert. Daher diskutieren wir nun etwas die Transfermatrizen.

Definition. *Sei $s = s_\lambda$ und $c = c_\lambda$ die Loesungen von $(\tau - \lambda)u = 0$ mit $s(0) = 0$, $s(1) = 1$ bzw. $c(0) = 1$, $c(1) = 0$.*

Bemerkung. Die Bezeichnungen s, c erinnern an 'sinus' und 'cosinus'.

Notation. Die Abhaengigkeit von λ in s und c wird oft unterdrueckt und die Variable n als Subskript notiert d.h. es wird s_n statt $s_\lambda(n)$ und c_n statt $c_{lambda}(n)$ geschrieben.

Proposition. *Fuer festes $n \in \{0, \ldots, N+1\}$ sind die Funktionen $\lambda \mapsto s_\lambda(n)$ und $\lambda \mapsto c_\lambda(n)$ Polynome in λ vom Grad n bzw $n-1$. Es gilt*

$$M_n = \begin{pmatrix} c_n & s_n \\ c_{n+1} & s_{n+1} \end{pmatrix}.$$

*B*eweis. Wie oben diskutiert 'erzeugen' die Matrizen M_n gerade die Loesungen aus den Anfangsbedingungen. Damit folgt die zweite Aussage sofort. Nun folgt die erste Aussage aufgrund von $M_n = T_n \cdots T_1$ direkt aus der Definition der T_j. □

Ende der 17. Vorlesung

Ist $J = [k, \ldots, n] \subset [1, \ldots, N]$ so definieren wir

$$\Delta_J := p_J \Delta i_J$$

mit der kanonischen Inklusion

$$i_J : \mathcal{H}_J \longrightarrow \mathcal{H}$$

und der kanonischen Projektion $p_J : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_J$, wobei $\mathcal{H}_J$ den Vektorraum der Funktionen auf J bezeichnet.
Wir halten folgende Konsequenz aus dem bisher diskutieren fest.

FOLGERUNG. *(a) Die folgenden Aussagen sind aequivalent:*

(i) λ *ist ein Eigenwert von* Δ.
(ii) *Es gibt eine nichtverschwindende Loesung* u *von* $(\tau - \lambda)u = 0$ *mit* $u(0) = u(N+1) = 0$.
(iii) *Es gilt* $s(N+1) = 0$.

(b) Die folgenden Aussagen sind aequivalent:

(i) λ *ist ein Eigenwert von* $\Delta_{[2,N]}$.
(ii) *Es gibt eine nichtverschwindende Loesung* u *von* $(\tau - \lambda)u = 0$ *mit* $u(1) = u(N+1) = 0$.
(iii) *Es gilt* $c(N+1) = 0$.

Bemerkung. Die jeweils letzten Punkte geben einen Test ob λ ein Eigenwert ist. Dieser laeuft darauf hinaus die Loesung s bzw. c an der Stelle $N+1$ zu berechnen. Das geschieht mittels der Rekursion. Man kann zeigen (Uebung, bzw. folgende Proposition), dass die charakterisitschen Polynome ebenfalls einer Rekursion genuegen.

Damit koennen wir nun die Loesungen mittels Determinanten ausrechnen.

PROPOSITION. *(a) Es gilt* $s_\lambda(1) = 1$ *und* $s_\lambda(n+1) = \frac{1}{b_n \cdots b_1} \det(\lambda - \Delta_{[1,n]]})$ *fuer* $n \geq 1$.
(b) Es gilt $c_\lambda(2) = -1$ *und* $c_\lambda(n+1) = \frac{-1}{b_n \cdots b_2} \det(\lambda - \Delta_{[2,n]})$ *fuer* $n \geq 2$.

*B*eweis. Es reicht (a) zu zeigen. Die Aussage (b) folgt dann einfach (Check! c loest das Dirichletproblem fuer $\Delta_{[2,N]}$...) Sei

$$q(\lambda) := \frac{1}{b_n \cdots b_1} \det(\lambda - \Delta_{[1,n]]}).$$

Dann ist $q(\lambda)$ ein Polynom vom Gradn n dessen Nullstellen gerade die Eigenwerte von $\Delta_{[1,n]]}$ sind. Nach dem vorhergehenden Corollar ist weiterhin $s_\lambda(n+1) = 0$ ebenfalls ein Polynom vom Grad n, dessen Nullstellen die Eigenwerte von $\Delta_{[1,n]]}$. Damit stimmen also q und s bis auf einen Faktor uebere in. Betrachtet man den Koeffizienten beim fuehrenden Term λ^n, so sieht man dass dieser Faktor gerade $1/a_1 \dots a_n$ ist. $\square$

Uebung. Zeige durch Entwickeln (nach der letzten Zeile/Spalte), dass die angegebenen Determinanten gerade die Rekusionsgleichung erfuellen. Zusammen mit einer Untersuchung der Anfangsbedingungen liefert dies einen alternativen Beweis der Proposition.

Wir schliessen diesen Abschnitt mit der Kalkulation der Determinanten von M_n ab.

PROPOSITION. *Es gilt* $\det M_n = \frac{b_0}{b_n}$.

*B*eweis. Es gilt $\det T_k = \frac{b_{k-1}}{b_k}$. Damit folgt leicht

$$\det M_n = \det(T_n T_{n-1} \cdots T_1) = \frac{b_{n-1}}{b_n} \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}} \cdots \frac{b_0}{b_1} = \frac{b_0}{b_n}.$$

$\square$

Neben Transfermatrizen spielen die Wronskideterminanten eine wichtige Rolle bei der Untersuchung von Jacobimatrizen.

Definition. *Fuer Funktionen u, v auf $\{0,\dots,N+1\}$ wird die Wronskideterminante $W(u,v):\{0,\dots,N\}\longrightarrow\mathbb{C}$ definiert durch*

$$W(u,v)(n) := b_n(u_n v_{n+1} - u_{n+1}v_n) = b_n\det(\underline{u}_{n+1},\underline{v}_{n+1}).$$

Die Wronskideterminante ist eine Art Randterm:

Proposition. *(Greensche Formel) Es gilt*

$$W(u,v)(k) - W(u,v)(k-1) = u(k)\tau v(k) - v(k)\tau u(k)$$

fuer $k=1,\dots,N$. Insbesondere folgt fuer $[n,m]\subset[1,N]$

$$\sum_{k=n}^{m}(u(k)\tau v(k) - v(k)\tau u(k)) = W(u,v)(m) - W(u,v)(n-1).$$

*B*eweis. Die erste Aussage folgt durch direkte Rechnung. Die zweite Aussage ist eine einfache Konsequenz der ersten Aussage. □

Aus der (Fast)Konstanz der Determinante der Transfermatrizen folgt die Konstanz der Wronskideterminante von Loesungen.

Proposition. *(Konstanz der Wronskideterminante) Sind u,v Loesungen von $(\tau-\lambda)u=0$, so gilt*

$$W(u,v)(n) = W(u,v)(0)$$

fuer $n=1,\dots N$.

*B*eweis. Es gilt

$$W(u,v)(n) = b_n\det(\underline{u}_{n+1},\underline{v}_{n+1}) = b_n\det(M_n(\underline{u}_1,\underline{v}_1)) = b_n\det M_n\det(\underline{u}_1,\underline{v}_1).$$

Mit $\det M_n = \frac{b_0}{b_n}$ und der Definition der Wronskideterminante folgt die Behauptung. □

Proposition. *(Variation der Konstanten) Seien u_1, u_2 zwei linear unabhaengige Loesungen von $(\tau-\lambda)u=0$ und W ihre (konstante) Wronskideterminante. Sei $f:\{1,\dots,N\}\longrightarrow\mathbb{C}$ beliebig und $\widetilde{f}$ die Fortsetzung (durch 0) von f auf $\{0,\dots,N+1\}$. Dann erfuellt*

$$w:\{0,\dots,N+1\}\longrightarrow\mathbb{C}$$

$$w(n) = \frac{1}{W}(u_2(n)\sum_{k=1}^{n}u_1(k)\widetilde{f}(k) - u_1(n)\sum_{k=1}^{n}u_2(k)\widetilde{f}(k))$$

die Gleichung $(\tau-\lambda)w=f$.

*B*eweis. Ohne Einschraenkung koennen wir $W=1$ voraussetzen. (Sonst: Skalieren von u_1...) Ohne Einschraenkung koennen wir $\lambda=0$ voraussetzen.

(Sonst: Ersetze a durch $a-\lambda$). Dann gilt

$$\begin{aligned}
\tau w(n) &= b_{n-1}w_{n-1} + a_n w_n + b_n w_{n+1}\\
&= b_{n-1}u_2(n-1)\sum_{k=0}^{n-1} u_1(k)\widetilde{f}(k) - b_{n-1}u_1(n-1)\sum_{k=0}^{n-1} u_2(k)\widetilde{f}(k)\\
&+ a_n u_2(n)\sum_{k=0}^{n} u_1(k)\widetilde{f}(k) - a_n u_1(n)\sum_{k=0}^{n} u_2(k)\widetilde{f}(k)\\
&+ b_n u_2(n+1)\sum_{k=0}^{n+1} u_1(k)\widetilde{f}(k) - b_n u_1(n+1)\sum_{k=0}^{n+1} u_2(k)\widetilde{f}(k).
\end{aligned}$$

Zusammenfassen der jeweils linken (rechten) Terme und nutzen der Loesungseigenschaft liefert dann

$$\begin{aligned}
\tau w(n) &= -b_{n-1}u_2(n-1)u_1(n)\widetilde{f}(n) + b_n u_2(n+1)u_1(n+1)\widetilde{f}(n+1)\\
&\quad +b_{n-1}u_1(n-1)u_2(n)\widetilde{f}(n) - b_n u_2(n+1)u_1(n+1)\widetilde{f}(n+1)\\
&= -b_{n-1}u_2(n-1)u_1(n)\widetilde{f}(n) + b_{n-1}u_1(n-1)u_2(n)\widetilde{f}\\
&= W(u,v)(n-1)\widetilde{f}(n)\\
&= f(n).
\end{aligned}$$

. Das beendet diesen Beweis. □

Wir geben nun noch eine Umformulierung der vorigen Proposition. Fuer Vektoren $x, y \in \mathbb{C}^2$ schreiben wir $x \sim y$, wenn x und y parallel sind.

Ende der 18. Vorlesung

FOLGERUNG. *(Umformulierung) Seien u_1, u_2, linear unabhaengige Loesungen von $(\tau-\lambda)u = 0$. Dann ist $G_{u_1,u_2}f$ definiert durch*

$$G_{u_1,u_2}f(n) := \frac{1}{W(u_1,u_2)}(u_2(n)\sum_{k=1}^{n-1} u_1(k)\widetilde{f}(k) + u_1(n)u_2(n)\widetilde{f}(n) + u_1(n)\sum_{k=n+1}^{N} u_2(k)\widetilde{f}(k))$$

die eindeutige Loesung u von $(\tau-\lambda)u = f$ mit

$$(u(0),u(1)) \sim (u_1(0),u_1(1)) \text{ und } (u(N),u(N+1)) \sim (u_2(N),u_2(N+1)).$$

(Hier wird eine leere Summe als 0 gesetzt.)

*B*eweis. Addieren der homogenen Loesung $\frac{u_1}{W}\sum_{k=1}^{N} u_2(k)f(k)$ zur Loesung aus der vorigen Proposition liefert, dass $u = G_{u_1,u_2}f$ eine Loesung ist.

Nachrechnen zeigt, dass u die angegebenen Parallelitaetsbedingungen erfuellt. Genauer gilt

$$(u(0),u(1)) = (\sum u_2(k)f(k)) \cdot (u_1(0),u_1(1))$$

und

$$(u(N),u(N+1)) = (\sum u_1(k)f(k)) \cdot (u_2(N),u_2(N+1)).$$

Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen: Seien u und v zwei Loesungen mit den angegebenen Eigenschaften. Sei $w := u - v$. Dann loest w die Gleichung $(\tau-\lambda)w = 0$ und es gilt $w(0,1) \sim (u_1(0),u_1(1))$ sowie $(w(N),w(N+1)) \sim$

$(u_2(N), u_2(N+1))$. Daher ist w ein Vielfaches von u_1 und ein Vielfaches von u_2. Da u_1 und u_2 linear unabhaengig sind, folgt $w = 0$. □

Theorem. *(Darstellung der Resolventen) Sei $\lambda \in \rho(\Delta)$. Seien s, $\widehat{s}$ die Loesungen von $(\tau - \lambda)s = 0$ mit $s(0) = 0$, $s(1) = 1$ und $\widehat{s}(N) = 1$, $\widehat{s}(N+1) = 0$. Sei*

$$G : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H},\ f \mapsto G_{s,\widehat{s}} f|_{\{1,\ldots,N\}}.$$

Dann gilt $G = (\Delta - \lambda)^{-1}$.

*B*eweis. Wegen $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ sind s und $\widehat{s}$ linear unabhaengig (Sonst: s erfuellt Randbedingung bei N und λ ist Eigenwert...). Damit existiert also $G_{s,\widetilde{s}}$ und es gilt nach dem vorangegangenen Korollar fuer $u = G_{s,\widehat{s}} f$

$$(\tau - \lambda)u = f,\ \ u(0) = s(0) = 0, \quad u(N+1) = \widehat{s}(N+1) = 0.$$

Damit folgt aber (wegen $\Delta u = \tau \widetilde{u})$)

$$(\Delta - \lambda)(u|_{\{1,\ldots,N\}}) = f.$$

Das zeigt die Behauptung. □

Bemerkung.

- Fuer alle linear unabhaengigen Loesungen u_1, u_2, ist $G_{u_1,u_2} f$ eine Loesung von $(\tau - \lambda)u = f$. Aber nur fuer die genannte Wahl erfuellt u die richtigen 'Randbedingungen', um eine Loesung der Gleichung $(\Delta - \lambda)u = 0$ zu liefern.
- Ist λ eine Eigenwert so sind s und $\widehat{s}$ nicht linear unabhaengig. Waehlt man in diesem Fall $u_1 = s$ und u_2 linear unabhaengig von u_1 so gilt fuer f mit $f \perp s$ und $u = G_{s,u_2} f$ ebenfalls

  $$(\tau - \lambda)u = f,\ \ u(0) = s(0) = 0 \quad u(N+1) = 0.$$

  Dabei folgt $u(N+1) = 0$ aus der Orthogonalitaet (denn der Faktor vor $u(N+1)$ ist ja gerade wie oben ausgerechnet $\sum f(k)s(k)$. Beachte, dass s reellwertig ist.). Es loest also in diesem Fall u ebenfalls die Gleichung

  $$(\Delta - \lambda)u = f.$$

  (Das ist kein Widerspruch zur Invertierbarkeit. Tatsaechlich ist $\Delta - \lambda$ auf dem orthogonalen Komplement von s invertierbar, da jeder Eigenwert die Vielfachheit 1 hat.)

Folgerung. *Situation wie im Satz. Dann sind die Matrixelemente der Resolvente gegeben durch*

$$G(x, y) = \frac{1}{W(s, \widehat{s})} \begin{cases} s(y)\widehat{s}(x) & : \quad y < x \\ s(x)\widehat{s}(x) & : \quad x = y \\ s(x)\widehat{s}(y) & : \quad x < y \end{cases}$$

Bemerkung. Diese Formel zeigt, wie die Resolvente durch von 'links' die Loesung s und von 'rechts' die Loesung $\widehat{s}$ gebildet wird. Damit ist also sowohl das Problem der Bestimmung der Eigenwerte als auch der Berechnung der Resolvente auf das Finden von Loesungen der Gleichung d.h. Anwenden der Rekursion zurueckgefuehrt.

Uebung. Berechne diese Form der Resolventen mittels Kramerscher Regel.

Wir kommen nun zu einem Beweis des Spektralsatzes fuer endliche Jacobimatrizen. Fundamental ist folgender Zusammenhang.

LEMMA. *Sei* $s : \mathbb{R} \times \{0, \ldots, N+1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *gegeben sodass* $s(\lambda, \cdot)$ *die Loesung von* $(\tau - \lambda)s = 0$ *mit* $s(0) = 0$ *und* $s(1) = 1$ *ist. Dann gilt*

$$s(\Delta, n)\delta_1 = \delta_n$$

fuer $n = 1, \ldots, N$.

Beweis. Der Beweis wird mit Induktion nach n gefuehrt:

Ende der 19. Vorlesung

$n = 1$: $s(\cdot, 1) = 1$ impliziert $s(\Delta, 1) = I$ und die Behaupung folgt im Fall $n = 1$.

$n = 2$: Aus der Gleichung $(\tau - \lambda)s = 0$ folgt fuer $n = 1$ die Behiehung

$$b_1 s(\lambda, 2) + (a_1 - \lambda)1 = 0.$$

Das liefert $s(\lambda, 2) = 1/b_1(\lambda - a_1)$ und die Behauptung fuer $n = 2$ folgt einfach.

$n - 1, n \Longrightarrow n + 1$: Aus der Gleichung $(\tau - \lambda)u = 0$ folgt an der Stelle n die Beziehung

$$b_{n-1}s(\lambda, n-1) + b_n s(\lambda, n+1) + (a_n - \lambda)s(\lambda, n) = 0.$$

Das liefert

$$b_{n-1}s(\Delta, n-1)\delta_1 + b_n s(\Delta, n+1)\delta_1 + (a_n - \Delta)s(\Delta, n)\delta_1 = 0.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung fuer $n-1$ und n und der (in Matrixschreibweise offensichtlichen) Gleichung

$$\Delta\delta_n = b_{n-1}\delta_{n-1} + a_n\delta_n + b_n\delta_{n+1}$$

folgt

$$s(\Delta, n+1)\delta_1 = \delta_{n+1}$$

und der Beweis ist beendet. □

FOLGERUNG. *Fuer jedes* $\lambda \in \sigma(\Delta)$ *gilt* $P_\lambda\delta_1 \neq 0$.

Beweis. Angenommen: $P_\lambda\delta_1 = 0$. Dann folgt

$$0 = s(\Delta, n)P_\lambda\delta_1 = P_\lambda s(\Delta, n)\delta_1 = P_\lambda\delta_n$$

fuer jedes $n = 1, \ldots, N$. Das liefert den Widerspruch $P_\lambda = 0$. □

LEMMA. *Sei* $\Delta = \Delta_{a,b}$ *gegeben mit den (einfachen) Eigenwerten* $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ *und den Projektionen* $E_1, \ldots, E_N$ *auf die entsprechenden Eigenraeume. Sei* μ *das Punktmass auf* $\mathbb{R}$ *mit* $\mu(\{\lambda_n\}) = \|E_n\delta_1\|^2$. *Dann gilt*

$$\int \phi(\lambda)d\mu = \langle\phi(\Delta)\delta_1, \delta_1\rangle.$$

Beweis. Das folgt durch eine direkte Rechnung:

$$\int \phi(\lambda)d\mu = \sum_n \phi(\lambda_n)\|E_n\delta_1\|^2 = \sum_n \langle\phi(\lambda_n)E_n\delta_1, E_n\delta_1\rangle = \langle\phi(\Delta)\delta_1, \delta_1\rangle.$$

□

Definition. *Das Mass μ aus dem Lemma heisst Spektralmass von Δ zu δ_1.*

Theorem. *(Enwicklung in verallgemeinerte Eigenfunktionen) Sei $\Delta = \Delta_{a,b}$ gegeben mit den (einfachen) Eigenwergten $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ und den Projektionen $E_1, \ldots, E_N$ auf die entsprechenden Eigenraeumen. Sei μ das Punktmass auf $\mathbb{R}$ mit $\mu(\{\lambda_n\}) = \|E_n\delta_1\|^2$. Dann gibt es genau eine unitare Abbildung*

$$U : \mathcal{H} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \mu)$$

mit $\delta_j \mapsto s(\cdot, j)$. Fuer diese gilt

$$U\Delta U^* = M_{id}.$$

*B*eweis. Da die $s(\cdot, j)$ Polynome vom jeweils Grad j sind, sind sie linear unabhaengig auf der Menge $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ und damit in $L^2(\mathbb{R}, \mu)$. Wir berechnen nun unter Verwendung des vorigen und des vorvorigen Lemma

$$\begin{aligned} \int s(\lambda, j)s(\lambda, k)d\mu &= \langle s(\Delta, j)\delta_1, s(\Delta, k)\delta_1)\rangle \\ &= \langle \delta_j, \delta_k\rangle \\ &= \delta_{j,k}. \end{aligned}$$

Damit bilden die $s(\cdot, j)$ eine Orthonormalbasis. Damit ist U unitaer. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} U\Delta\delta_j &= (b_{j-1}\delta_{j-1} + a_j\delta_j + b_j\delta_{j+1}) \\ &= b_{j-1}s(\cdot, j-1) + a_js(\cdot, s) + +b_js(\dot{;}j+1) \\ ((\tau - \lambda)s = 0) \quad &= \lambda s(\dot{;}j) \\ &= M_{id}U\delta_j. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Teil 2

Operatoren auf unendlichen Graphen

KAPITEL 5

Definition des Laplaceoperator auf unendlichen Graphen

In diesem Abschnitt fuehren wir unendliche Graphen ein und den assoziierten Laplaceoperator und studieren einfache Eigenschaften.

Wir beginnen mit der Definition von Graphen.

DEFINITION. *Sei V eine abzaehlbare Menge. Ein gewichteter symmetrischer Graph ist ein Paar (b,c) bestehend aus einer Abbildung $b : V \times V \longrightarrow [0,\infty)$ und einer Abbildung $c : V \longrightarrow [0,\infty)$ mit*

- $b(x,x) = 0$ *fuer alle* $x \in V$,
- $b(x,y) = b(y,x)$ *fuer alle* $x, y \in V$,
- $\sum b(x,y) < \infty$ *fuer jedes* $x \in V$.

Bemerkung.

- Geht man von einem Graphen mit Kantengewichten 1 aus, so bedeutet die Summierbarkeitsbedingung, dass jeder einzelne Vertex einen endlichen Grad hat.
- Die Endlichkeit der Summe impliziert, dass hoechstens abzaehlbar unendlich viele Kanten von einem Vertex ausgehen. Insbesondere ist die Zusammenhangskomponenten eines Vertex (= Menge der Vertices die durch Pfade endlicher Laenge erreicht werden koennen) abzaehlbar (da Vereinigung der abzaehlbaren Mengen der Vertices, die durch n Schritte erreicht werden koennen.)
- An c gibt es keine Bedingungen (ausser der Nichtnegativitaet).

Wie im Falle eines endlichen (X,b,c) kann man sich (V,b,c) als Graph mit Kantengewichten und Vertexgewichten vorstellen. Insbesondere kann man wieder Pfade, Zusammenhangskomponenten etc. definieren.

Im folgenden sei V eine gegebene abzaehlbare Menge. Wir werden es mit Graphen (b,c) ueber V zu tun haben.
Wir definieren zwei fuer uns relevante Raeume von Funktionen als

$$C(V) := \{u : V \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

und

$$C_c(V) := \{u \in C(V) : \text{es gilt } u(x) \neq 0 \text{ fuer nur endlich viele } x \in V\}.$$

Sei $\ell^2(V)$ der relle Hilbertraum der reellen quadratintergrierbaren Funktionen auf V mit Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle = \sum_{x\in V} u(x)v(x).$$

Zum Graphen (b,c) ueber V assoziieren wir die Form $Q = Q_{b,c}$ gegeben durch

$$D(Q) = \{u \in \ell^2(V) : \frac{1}{2}\sum_{x,y\in V} b(x,y)(u(x)-u(y))^2 + \sum_{x\in V} c(x)u^2(x) < \infty\}$$

$$Q(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{x,y\in V} b(x,y)(u(x)-u(y))(v(x)-v(y)) + \sum_{x\in V} c(x)u(x)v(x).$$

Grundlegende Eigenschaften von Q werden in der folgenden Proposition zusammengefasst.

PROPOSITION. *Sei (b,c) ein Graph ueber V und $Q = Q_{b,c}$ die assoziierte Form. Dann gilt:*
(a) Q ist bilinear und symmetrisch.
(b) $C_c(V) \subset D(Q)$.
(c) $\widetilde{Q} : \ell^2(V) \longrightarrow [0,\infty]$, $\widetilde{Q} = \frac{1}{2}\sum_{x,y\in V} b(x,y)(u(x)-u(y))^2 + \sum_{x\in V} c(x)u^2(x)$ ist unterhalbstetig.
(d) $Q(|u|) \le Q(u)$ fuer alle u und $Q(u\wedge 1) \le Q(u)$ fuer alle $u \ge 0$.

*B*eweis. (a): klar.

(b) folgt aus den Summierbarkeitseigenschaften von b.

(c) folgt aus dem Lemma von Fatou.

(d) Das gilt sogar 'termweise' (vgl. Situation eines endlichen V). □

Bemerkung. (Beweis unten) Die Eigenschaften der Proposition charakterisieren gerade die Formen der Form $Q = Q_{b,c}$, d.h. ist Q eine Form auf $\ell^2(V)$ mit
(a) Q ist bilinear und symmetrisch,
(b) $C_c(V) \subset D(Q)$,
(c) $\widetilde{Q} : \ell^2(V) \longrightarrow [0,\infty]$ ist unterhalbstetig,
(d) $Q(|u|) \le Q(u)$ fuer alle u und $Q(u\wedge 1) \le Q(u)$ fuer alle $u \ge 0$,
dann gilt $Q = Q_b$ mit mit $b : V \times V \longrightarrow [0,\infty)$ wie oben.

DEFINITION. *Eine Form Q auf $\ell^2(V)$ mit $Q(u,u) \ge 0$ fuer alle $u \in D(Q)$ heisst abgeschlossen, wenn die Abbildung*

$$\widetilde{Q} : \ell^2(V) \longrightarrow [0,\infty]$$

$\widetilde{Q} = Q(u,u)$ fuer $u \in D(Q)$ und $\widetilde{Q}(u) = \infty$ sonst, unterhalbstetig ist.

Fuer eine abgeschlossene nichtnegative Form Q auf $\ell^2(V)$ (also zum Beispiel fuer $Q = Q_{b,c}$; vgl. Proposition) existiert nach allgemeiner Theorie ein eindeutiger selbstadjungierter Operator L auf $\ell^2(V)$ mit

$$D(Q) = D(L^{1/2}),\ Q(u,v) = \langle L^{1/2}u, L^{1/2}v\rangle.$$

Dieser ist gegeben durch

$$D(L) := \{u \in \ell^2(V) : \text{es existiert } w \in \ell^2(V) \text{ mit } Q(u,v) = \langle w, v\rangle \text{ fuer alle } v \in D(Q)\}$$

$$Lu = w.$$

Ende 20. Vorlesung

Wir koennen den zu $Q = Q_{b,c}$ assoziieten Operator L explizit beschreiben wie folgt: Fuer eine beschraenkte Funktionen u auf V definiert man die Funktion $\widetilde{L}u$ auf V durch

$$\widetilde{L}u(x) = \sum_{y\in V} b(x,y)(u(x) - u(y)) + c(x)u(x).$$

Der Operator $\widetilde{L}$ hat folgende Symmetrieeigenschaft.

Proposition. *Fuer $v \in C_c(V)$ und $u \in \ell^\infty(V)$ gilt $\widetilde{L}v \in \ell^1(V) \subset \ell^2(V)$ und*

$$\sum_x \widetilde{L}u(x)v(x) = \sum_x u(x)\widetilde{L}v(x).$$

Gehoert u weiterhin noch zu $D(Q)$ so gilt sogar

$$\sum_x \widetilde{L}u(x)v(x) = \sum_x u(x)\widetilde{L}v(x) = Q(u,v).$$

*B*eweis. Wir untersuchen nur den Fall $c = 0$.
Eine einfache Rechnung zeigt

$$(*)\ \sum_x\sum_y b(x,y)|v(x)| = \sum_x\sum_y b(x,y)|v(y)| \leq \sum_{x\in \operatorname{supp} v} |v(x)| \sum_y b(x,y) =: C < \infty.$$

(Erste Gleichung folgt aus Symmetrie von b; Abschaetzung ist klar.)
Zur ersten Aussage: Nach $(*)$ gilt dann

$$\sum_x\sum_y b(x,y)|v(x)| < \infty \sum_x\sum_y b(x,y)|v(y)| < \infty$$

liefert leicht die erste Aussage.

Zur zweiten und dritten Aussage: Mit $(*)$ folgt leicht

$$\sum_{x,y} b(x,y)|u(x)v(x)| \leq C\|u\|_\infty < \infty \text{ und} \sum_{x,y} b(x,y)|u(x)v(y)| < C\|u\|_\infty < \infty.$$

Damit folgen die zweite und dritte Aussage. □

Theorem. *Sei (V,b,c) wie oben und L der zu $Q = Q_{b,c}$ assoziierte Operator. Dann gilt*

$$D(L) = \{u \in \ell^2(V) : \widetilde{L}u \in \ell^2(V)\},\ Lu = \widetilde{L}u$$

und es ist $C_c(V)$ dicht in $D(Q)$ ist bzgl. der Norm $\|u\|_Q := \sqrt{Q(u,u) + \|u\|^2}$.

Bemerkung. Das Ergebnis geht auf Wojciechowski '07 zurueck (vgl. auch Weber '07 sowie Jorgensen '08, wobei der Beweis in Jorgensen '08 nicht komplett richtig ist).

Beweis. Sei L_m der minimale zu $\widetilde{L}$ assoziierte Operator d.h. L_m ist die Einschraenkung von $\widetilde{L}$ auf $C_c(V)$. Sei L_M der maximale zu $\widetilde{L}$ assoziierte Operator d.h. es ist L_M die Einschraenkung von $\widetilde{L}$ auf $\{u \in \ell^2(V) : \widetilde{L}u \in \ell^2(V)\}$. Der Beweis wird in drei Schritten gefuehrt.

Schritt 1. $L_m^* = L_M$.
Bew. Mehr oder weniger Standard unter Nutzen der vorigen Proposition. Genauer:
$L_M \subset L_m^*$: Sei $g \in D(L_M)$. Dann gilt fuer alle $h \in D(L_m)$

$$\langle L_M g, h\rangle = \sum \widetilde{L}g(x)h(x) = \sum g(x)\widetilde{L}h(x) = \langle g, L_m h\rangle.$$

(Mittlerer Schritt nutzt vorige Proposition.) Damit gilt $g \in D(L_m^*)$ und $L_m^* g = L_M g$.
$L_m^* \subset L_M$: Sei $g \in D(L_m^*)$ und $f = L_m^* g$. Dann gilt fuer jedes $h \in C_c(V)$ also

$$\sum f(x)h(x) = \langle f, h\rangle = \langle g, L_m h\rangle = \sum g(x)\widetilde{L}h(x) = \sum \widetilde{L}g(x)h(x).$$

(Letzte Gleichung folgt aus voriger Proposition.) Damit folgt (h beliebig) $\widetilde{L}g = f \in \ell^2(V)$. Das zeigt $L_m^* g = f = \widetilde{L}g$.

Schritt 2. Es gibt keine nichtriviale $\ell^2(V)$ Loesung u von $(\widetilde{L}+1)u = 0$.
Bew. Sei u eine solche Loesung. Dann nimmt u ohne Einschraenkung echt positive Werte an (sonst: Betrachte $-u$.) Wegen $u \in \ell^2(V)$ gibt es dann ein $x \in V$ mit $u(x)$ maximal. Dann folgt

$$0 = (\widetilde{L}+1)u(x) = \sum_y b(x,y)(u(x) - u(y)) + c(x)u(x) + u(x) > 0.$$

(> 0 da alle Terme ≥ 0 und $u(x) > 0$). Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung.

Mit Schritt 1 und Schritt zwei gilt also $L_M = L_m^*$ sowie $\langle L_m v, v\rangle = Q(v,v) \geq 0$ fuer alle $v \in D(L_m)$. Damit folgt nach allgemeiner Theorie, dass L_M selbstadjungiert ist.

Wir zeigen nun, dass L_M zur Form Q assoziiert ist: Sei $u \in D(L)$. Dann gilt also

$$\langle Lu, v\rangle = Q(u,v) = \langle \widetilde{L}u, v\rangle$$

fuer $v \in C_c(V)$, wobei die vorige Proposition im letzten Schritt genutzt wurde. Da $v \in C_c(V)$ beliebig ist, folgt also, dass L eine Einschraenkung von $\widetilde{L}$ ist. Damit ist L also eine Einschraenkung von L_M. Damit folgt $L = L_M$. (Denn aus $L \subset L_M$ folgt nach Bilden des Adjungierten ja $L = L_M^* \subset L^* = L$.)

Schliesslich kommen wir zur Aussage ueber die Dichtheit: D_0 die kleinste bzgl. $\|\cdot\|_Q$ abgeschlossene Menge, die $C_c(V)$ enthaelt. Dann ist D_0 offenbar in $D(Q)$ enthalten. Damit kann man also Q auf $D_0 \times D_0$ einschraenken. zu dieser Einschraenkung gehoert ein selbstadjungierter Operator L_0. Dieser ist nach Konstruktion (und einer vorhergehenden Proposition) eine Fortsetzung von L_m. Da L_m nur eine selbstadjungierte Fortsetzung hat, folgt $L_0 = L_M$ und damit $D_0 = D(Q)$.) $\square$

Damit kommen wir zum grundlegenden Ergebnis ueber Dirichleteformen auf Graphen.

THEOREM. *Sei Q eine nach unten beschraenkte symmetrische bilineare Form auf $\ell^2(V)$ mit $C_c(V) \subset D(Q)$, so dass $C_c(V)$ dicht ist in $D(Q)$ bzgl. $\|u\|_Q := \sqrt{Q(u,u) + \|u\|^2}$. Dann sind aquivalent:*

(i) *Es gilt $Q = Q_{b,c}$ mit mit $b : V \times V \longrightarrow [0, \infty)$ und $c : V \longrightarrow [0, \infty)$ wie oben.*

(ii) *Q ist abgeschlossen und erfuellt $Q(|u|) \leq Q(u)$ fuer alle u und $Q(u \wedge 1) \leq Q(u)$ fuer alle $u \geq 0$.*

(iii) *Q ist abgeschlossen und fuer den zugehoerigen Operator L gilt $0 \leq e^{-tL} f \leq 1$ fuer alle $t \geq 0$ und alle $f \in \ell^2(V)$ mit $0 \leq f \leq 1$.*

(iv) *Q ist abgeschlossen und fuer den zugehoerigen Operator gilt $0 \leq \alpha(L+\alpha)^{-1} f \leq 1$ fuer alle $\alpha > 0$ und alle $f \in \ell^2(V)$ mit $0 \leq f \leq 1$.*

*B*eweis. Die Aequivalenz von (ii), (iii) und (iv) folgt aus allgemeinen Prinzipien (vgl. Beweis fuer endliche Graphen).

Die Implikation (i) $\Longrightarrow$ (ii) wurde in einer obigen Proposition schon gezeigt.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Wegen $C_c(V) \subset D(Q)$ ist fuer jedes endliche $K \subset V$ die Form

$$Q_K : \ell^2(K) \times \ell^2(K) \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; Q_K(f,g) := Q(f,g)$$

eine Dirichletform. Damit gilt (vgl. endlichdimensionaler Fall)

$$Q_K(f,g) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in K} b_K(x,y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) + \sum_{x \in K} c_K(x) f(x) g(x)$$

mit geeigneten Funktionen $b_K : K \times K \longrightarrow [0, \infty)$ und $c_K : K \longrightarrow [0, \infty)$.
Wir zeigen nun:

- Fuer $x \neq y$ gibt es $b(x,y) \geq 0$ mit $b(x,y) = b_K(x,y)$ fuer jedes $K \subset V$ mit $x, y \in K$. (Bew. Nebendiagonalelement ist durch $Q(1_x, 1_y)$ festgelegt).
- Fuer $x = y$ gibt es $c_(x) \geq 0$ mit $c_K(x) \to c(x)$ fallend fuer $K \to V$ wachsend (Nachrechnen).

Ende der 21. Vorlesung

Ist dann $f \in C_c(V)$ beliebig so gilt (fuer jedes endliche K mit $\operatorname{supp} f \subset K$) also

$$Q(f,f) = Q_K(f,f) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in K} b_K(x,y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) + \sum_{x \in K} c_K(x) f(x) g(x).$$

Grenzuebergang fuer $K \to V$ (linke Seite haengt nicht von K ab!) liefert dann

$$Q(f,f) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in K} b(x,y)(f(x) - f(y))^2 + \sum_{x \in K} c(x) f(x)^2.$$

Einsetzen von $f = 1_z$ liefert

$$\sum_y b(z,y) < \infty.$$

Es bleibt $Q = Q_{b,c}$ zu zeigen: Das folgt aus der Dichtheit von $C_c(V)$ in $D(Q)$. $\square$

Bemerkung. Mithilfe dieses Satzes und Interpolation kann man zeigen, dass sich die Einschraenkung von e^{tL} auf $\ell^2(V) \cap \ell^p(V), \|\cdot\|_p)$ eindeutig zu einem Operator mit Normschranke 1 auf den Abschluss von $(\ell^2(V) \cap \ell^p(V), \|\cdot\|_p)$ in $\ell^p(V)$, $1 \leq p \leq \infty$ fortsetzen laesst. Damit erhaelt man stark stetige Halbgruppen P_t^p fuer $1 \leq p < \infty$. Unter Beachtung der Positivitaetserhaltung erhaelt man auch eine eindeutige (schwach stetige) Fortsetzung auf $\ell^\infty(V)$. Fuer $f \in \ell^p(V)$ und $u_t := P_t^p f$ gilt

$$u_t'(x) = -\widetilde{L}u(x), \text{ fuer jedes } x \text{ in } V.$$

(Dualisieren mit 1_x). Wir werden im kommenden Abschnitt (im Rahmen der Konstruktion von Loesungen der Waermeleitungsgleichung) einen Alternativen Zugang zu diesen Aussagen skizzieren.

Notation. Wir schreiben e^{-tL} statt P_t^p.

Fuer $p = \infty$ kann man man die Halbgruppe / Resolvente so fortsetzen: Zunaechst definiert man sie fuer $0 \leq f$ als Supremum ueber die Halbgruppe /Resolvente der $0 \leq g \leq f$ mit $g \in C_c(V)$. (Das ist wohldefiniert aufgrund der Markoveigenschaft. Anschliessend definiert man sie fuer beliebige f, indem man $f = f_+ - f_-$ mit $f_+, f_- \geq 0$ zerlegt.

Lemma. *(Maximumsprinzip) Sei (V, b, c) zusammenhaengend und $\alpha > 0$. Sei $u \geq 0$ und $u \neq 0$. Dann gilt:*
(a) Gilt $(\widetilde{L} + \alpha)u \geq 0$ so verschwindet u nirgends.
(b) Gilt $(\widetilde{L} + \alpha)u = 0$, so nimmt die Einschraenkung von u auf endliche Mengen ihr Maximum am Rand an.

*B*eweis. Es gilt nach Voraussetzung

$$(*) \quad (\widetilde{L} + \alpha)u = \sum_y b(x,y)(u(x) - u(y)) + c(x)u(x) + \alpha u(x).$$

(a) Angenommen $u(x) = 0$ fuer ein x. Dann liefert $(*)$ auch $u(y) = 0$ fuer alle $y \sim x$. Damit folgt dann (zusammenhaengend) der Widerspruch $u \equiv 0$.
(b) Nach (a) ist u strikt positiv. Es liefert dann $(*)$ sofort, dass es kein lokales Maximum geben kann. $\square$

Theorem. *Ist (V, b) zusammenhaengend, so ist die Halbgruppe positivitaetsverbessernd (auf jedem $\ell^p(V)$).*

*B*eweis. Aus Positivitaetserhaltung auf $\ell^2(V)$ folgt leicht Positivitaetserhaltung auf $\ell^p(V)$. (Dualisieren) Damit reicht es, zu zeigen, dass $e^{-tL}1_x > 0$ fuer jedes $x \in V$. Es reicht also zu zeigen, dass die Halbgruppe auf $\ell^2(V)$ positivitaetsverbessernd ist. Dann reicht es aber nach allgemeinen Prinzipien, die Resolvente zu betrachten. Sei $f \in \ell^2(V)$ mit $f \geq 0$ und $u := (L + \alpha)^{-1} f$. Dann gilt $f \geq 0$ (positivitaetserhaltend). Damit folgt

$$(L + \alpha)u = f \geq 0$$

und nach dem vorigen Lemma $u > 0$ oder $u \equiv 0$. $\square$

DEFINITION. *Eine Funktion u mit* $(\widetilde{L}+\alpha)u = 0$ *heisst* α*-harmonisch. Eine Funktion u mit* $(\widetilde{L}+\alpha)u \leq 0$ *heisst* α*-subharmonisch.*

Zum Abschluss des Abschnittes gehen wir auf Beschraenktheit des Operator L ein.

THEOREM. *Sei* (b,c) *ein Graph ueber* V*. Sei* Q *die assoziierte Form und* L *der assoziierte Operator. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es ist* Q *beschraenkt, d.h. es gibt ein* $C \geq 0$ *mit* $Q(f) \leq C$ *fuer alle* $f \in D(Q)$ *mit* $\|f\| \leq 1$.
(ii) *Es ist* L *beschraenkt, d.h. es gibt ein* $C \geq 0$ *mit* $\|Lf\| \leq C$ *fuer allef* $\in D(L)$ *mit* $\|f\| \leq 1$.
(iii) *Es gibt ein* $D \geq 0$ *mit*

$$deg(x) := \sum_{y\sim x} b(x,y) + c(x) \leq D$$

fuer alle $x \in V$.

In diesem Fall gilt $D(Q) = \ell^2(V) = D(L)$.

*B*eweis. (iii)$\Longrightarrow$ (i): Eine direkte Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} Q(f) &= \frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)(f(x)-f(y))^2 + \sum_x c(x)f(x)^2 \\ &\leq 2\sum_{x,y} b(x,y)f(x)^2 + \sum_x c(x)f(x)^2 \\ &\leq 2D\sum_x f(x)^2 \\ &= 2D\|f\|^2 \end{aligned}$$

Das liefert (iii) mit $C = 2D$.

(i)$\Longrightarrow$ (ii): Nach (i) ist $L^{1/2}$ ein beschraenkter dicht definierter Operator. Da $L^{1/2}$ abgeschlossen ist, ist es dann also ueberall definiert (und beschraenkt). Damit ist dann $L = L^{1/2}L^{1/2}$ ein beschraenkter ueberall definierter Operator.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): Da L beschraenkt und dicht definiert ist, ist es dann (da abgeschlossen) auf ganz $\ell^2(V)$ definiert. Damit ist auch die Form auf ganz $\ell^2(V)$ definiert und es gilt aufgrund der angenommenen Beschraenktheit und der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$deg(x) = Q(1_x, 1_x) = \langle L1_x, 1_x\rangle \leq C$$

Das beendet den Beweis. $\square$

KAPITEL 6

Etwas zur Waermeleitungsgleichung

In diesem Abschnitt betrachten wir einen unendlichen Graphen (V, b, c) und untersuchen die Gleichung

$$\widetilde{L}u = \frac{d}{dt}u_t.$$

1. Halbgruppen und Loesungen der Waermeleitungsgleichung

Sei (V, b) ein Graph und $\widetilde{L}$ der zugehoerige Operator. Dann heisst eine Funktion

$$u : [0, \infty) \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Loesung der Waermeleitungsgleichung mit Anfangsbedingung u_0, wenn gilt

- $t \mapsto u(t, x)$ ist stetig auf $[0, \infty)$ und differenzierbar auf $(0, \infty)$ fuer alle $x \in V$.
- $u'(t, x) + \widetilde{L}u(t, x) = 0$ fuer alle $t > 0$ und $x \in V$.
- $\lim_{t \to 0} u(t, x) = u_0(x)$ fuer alle $x \in V$.

Bemerkung. Ist u beschraenkt, so gilt dann sogar, dass $t \mapsto u(t, x)$ stetig differenzierbar auf $[0, \infty)$ ist und $u'(t, x) + \widetilde{L}u(x) = 0$ fuer alle $t \geq 0$ und $x \in V$ erfuellt. (Bew. $u'(t, x) = \sum b(x, y)(u(t, x) - u(t, y)) + c(x)u(t, x)$ ist stetig bei 0....)

Wir konstruieren nun beschraenkte Loesungen zu beschraenkten Anfangsbedingungen auf zwei verschiedene Arten. Wir beginnnen mit der spektralen Konstruktion.

Lemma. *Sei $f \in \ell^2(V)$. Dann ist $(0, \infty) \longrightarrow \ell^2(V)$, $t \mapsto u_t := e^{-tL}f$ beliebig oft differenzierbar mit $u^{(n)} = (-L)^n u_t$ und $\lim_{t \to 0} u_t = f$.*

*B*eweis. Da $s^n e^{-ts}$ eine beschraenkte Funktion auf $[0, \infty)$ ist, ist $L^n u_t$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$ definiert.
Wir zeigen

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s}(u_{t+s} - u_t) = -Lu_t$$

fuer alle $t > 0$. (Die uebrigen Aussagen folgen dann aehnlich...)

$$
\begin{aligned}
\|\frac{1}{s}(e^{-(t+s)L}-e^{-tL})f+Le^{-tL}f\|^2 &= \int\left|\frac{1}{s}(e^{-(t+s)r}-e^{-tr})+re^{-tr}\right|^2 d\mu_f(r)\\
&= \int\left|\frac{-re^{-tr}}{s}\int_0^s e^{-\tau r}d\tau+re^{-tr}\right|^2 d\mu_f(r)\\
&= \int r^2e^{-2tr}\left|\frac{-1}{s}\int_0^s e^{-\tau r}d\tau+1\right|^2 d\mu_f(r).
\end{aligned}
$$

Ende der 22. Vorlesung

Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Lebesgue. □

Damit koennen wir folgenden Satz beweisen.

Theorem. *(Spektrale Konstruktion einer Fundamentalloesung) Sei (b,c) ein Graph ueber V mit zugehoerigem Operator L und assoziierter Halbgruppe e^{-tL}. Sei*

$$p:[0,\infty)\times V\times V\longrightarrow[0,\infty),\ \text{definiert durch } p_t(x,y)=\langle 1_x,e^{-tL}1_y\rangle.$$

Dann gilt:

(a) $p_t(x,y)=p_t(y,x)$ fuer alle $x,y\in V$ und $t\geq 0$.
(b) $p_t(x,y)\geq 0$ fuer alle $x,y\in V$ sowie $\sum_y p_t(x,y)\leq 1$ fuer alle $x\in V$ und $t\geq 0$
(c) Sei $z\in V$ beliebig. Dann ist $u_t:=p_t(\cdot,z)$ eine Loesung der Waermeleitungsgleichung zum Anfangswert 1_z.

Beweis. (a) Symmetrie folgt leicht aus Eigenschaften von e^{-tL}.

(b) Das folgt, da es sich um die Halbgruppe einer Dirichletform handelt (Approximiere 1 durch Funktionen aus $\ell^2(V)$...).

(c) Nach Definition gilt $u_t=e^{-tL}1_z$. Damit folgt die Aussage sofort aus dem vorigen Lemma. □

Wir erinnern an folgende Aussage.

Proposition. *Sei $a:V\times V$ eine symmetrische Funktion mit $\sum_y|a(x,y)|\leq 1$. Dann ist der Operator*

$$A:\ell^p(V)\longrightarrow\ell^p(V),\ \ Af(x)=\sum_y a(x,y)f(y),$$

beschraenkt mit Norm kleiner gleich 1.

Beweis. Der Fall $p=\infty$ ist klar. Sei also nun $1\leq p<\infty$. Dann gilt

$$\sum_x|Af(x)|^p=\sum_x|\sum_y a(x,y)f(y)|^p\leq\sum_x|\sum_y|a(x,y)|^{1/q}|a(x,y)|^{1/p}f(y)|^p.$$

Nun Hoelder und Symmetrie.... □

Damit koennen wir die Halbgruppe aus dem vorigen Theorem auf alle ℓ^p fortsetzen.

Lemma. *(Halbgruppen auf ℓ^p) Der Operator*

$$P_t:\ell^p(V)\longrightarrow\ell^p(V),P_tf(x)=\sum_y p_t(x,y)f(y),$$

hat Norm nicht groesser als 1 *und erfuellt* $P_{t+s} = P_t P_s$ *fuer alle* $t, s \geq 0$. *Ist* $1 \leq p < \infty$ *so ist* $P_t f$ *stetig in* t. *Fuer* $p = \infty$, *ist* $P_t f(x)$ *stetig in* t *fuer jedes* $x \in V$.

*B*eweis. Die Schranke an die P_t folgt aus der vorigen Proposition. Die Halbgruppeneigenschaft folgt aus der Halbgruppen eigenschaft in $\ell^2(V)$ durch Approximation. (o.E. $f \geq 0$. Waehle $f_n \to f$ punktweise, monoton, $f_n \in \ell^2(V)$. Dann $P_t P_s f = \lim P_t P_s f_n = \lim P_{t+s} f_n = P_{t+s} f$.)
Wir beweisen nun die Stetigkeit: Sei $u_t := P_t f$
Fall 1: $p = \infty$ Sei $f \in \ell^\infty(V)$. Fuer jedes $x \in V$ ist $t \to u_t(x)$ stetig.
Bew. Es gilt:

$$p_t(x,x) = \langle 1_x, e^{-tL} 1_x \rangle \to 1, \quad t \to 0$$

sowie

$$\sum p_t(x,y) \leq 1.$$

Damit folgt

$$\sum_{y \neq x} p_t(x,y) \longrightarrow 0, \ t \to 0.$$

Das liefert leicht die Stetigkeit bei $t = 0$ und mit der Halbgruppeneigenschaft die Stetigkeit ueberall. ($P_t g(x) - g(x) = p_t(x,x) g(x) - g(x) + \sum_{y \neq x} p_t(x,y) g(y)$. Damit haengt die Differenz nur von $\|g\|_\infty$ und der Konvergenz von $p_t(x,x)$ gegen 1 ab...)
Fall 2: $1 \leq p < \infty$: Gehoert f zu $\ell^p(V)$ mit $1 \leq p < \infty$, so ist sogar $t \to u_t$ stetig:
Bew: Es reicht Stetigkeit bei $t = 0$ zu zeigen (da es sich um eine Halbgruppe handelt, also

$$\|P_{t-s} f - P_t f\| = \|P_{t-s}(P_s - 1) f\| \leq \|P_{t-s}\| \|(P_s - 1) f\|$$

bzw.

$$\|Pt + sf - P_t f\| = \|P_t(P_s - 1) f\| \leq \|P_t\| \|(P_s - 1) f\|.$$

gilt. Sei $\varepsilon > 0$. Waehle $K \subset V$ mit

$$\|1_K f\|_p^p \geq \|f\|_p^p - \varepsilon.$$

Fuer t genuegend nahe an 0 gilt aufgrund der in Fall 1 gezeigten punktweisen Stetigkeit dann

$$\|1_K u_t\|_p^p \geq \|f\|_p^p - 2\varepsilon \text{ und } \|1_K(u_t - f)\|_p \leq \varepsilon.$$

Schliesslich gilt aufgrund der Kontraktionseigenschaft auch

$$\|u_t\|_p^p \leq \|f\|_p^p.$$

Die letzten beiden Gleichungen liefern (fuer kleine t)

$$\|(1 - 1_K) u_t\|_p^p \leq 2\varepsilon.$$

Damit folgt die Stetigkeit bei 0 wegen

$$\|u_t - f\|_p \leq \|1_K(u_t - f)\|_p + \|(1 - 1_K) u_t\|_p + \|(1 - 1_K) f\|_p.$$

(Hier sind alle Terme klein fuer kleine t....) □

Damit kommen wir nun zum Hauptergebnis des Abschnittes.

THEOREM. *(Konstruktion der Waermeleitung) Sei* (b, c) *ein Graph ueber* V*. Fuer jedes* $f \in \ell^\infty(V)$ *ist* $u_t := P_t f$ *eine beschraenkte Loesung der Waermeleitungsgleichung mit Anfangsbedingung* f*.*

Bemerkung. Wegen $l^p \subset l^\infty$ werden inbesondere Anfangsbedingungen in l^p zugelassen fuer jedes $p \geq 1$.

*B*eweis. Ohne Einschraenkung sei $c = 0$. Sei $u_t := P_t f$. Wir zeigen, dass u die Differentialgleichung fuer $t > 0$ erfuellt.
O.E. $f \geq 0$ (sonst Zerlegen in Positiv- und Negativteil...). Sei (f_n) eine Folge in $C_c(V)$ mit $0 \leq f_n \to f$ aufsteigend. Sei $u_n := P_t f_n$. Dann konvergiert fuer jedes feste x die Folge $u_n(\cdot, x)$ monoton gegen $u(t, x)$. Da $u(\cdot, x)$ nach dem schon bewiesenen stetig ist, folgt aus dem Satz von Dini die gleichmaessige Konvergenz auf Kompakta in $[0, \infty)$. Weiterhin erfuellt u_n (als endliche Linearkombination von Loesungen) die Gleichung

$$u_n'(t, x) = -Lu_n(t, x) = \sum_y b(x, y)(u_n(t, x) - u_n(t, y)).$$

Damit folgt aus der gleichmaessigen Konvergenz der $u_n(\cdot, x)$ dann einfach, dass $u(\cdot, x)$ ebenfalls differenzierbar ist mit

$$u_n'(t, x) = -Lu_n(t, x).$$

Damit ist der Beweis beendet. □

Wir lernen nun ein grundlegende Eigenschaft der Waermeleitung kennen. Zu einem Graphen (V, b) und $D \subset V$ sei der aeussere Rand ∂D von D bzw. der Abschluss $\overline{D}$ von D definiert durch

$$\partial D := \{x \in V \setminus D : \exists y \in D \text{ s.t. } b(x, y) \neq 0\}$$

$$\overline{D} := D \cup \partial D.$$

THEOREM. *(Maximumprinzip/Minimumprinzip) Sei* (V, b) *ein symmetrischer Graph mit* $c(x) = 0$ *fuer alle* $x \in V$*. Sei* $D \subset V$ *eine endliche zusammenhaengede Menge mit* $\partial D \neq \emptyset$*. Sei* $u : [0, T] \times \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig. Dann gilt:*
(a) Gilt $u' + \widetilde{L}u \geq 0$ *auf* $(0, T] \times D$*, so folgt*
$\min u|_{[0,T]\times D} \geq \min\{u_0|_D, \inf u|_{[0,T]\times\partial D}\}$.
(b) Gilt $u' + \widetilde{L}u \leq 0$ *auf* $(0, T] \times D$*, so folgt*
$\max u|_{[0,T]\times D} \leq \max\{u_0|_D, \sup u|_{[0,T]\times\partial D}\}$

Bemerkung. (a) Es handelt sich um eine Aussage ueber Loesungen einer Differenzengleichung und NICHT um eine spektraltheoretische Aussage.
(b) Die Aussage wird falsch fuer $c(x) \neq 0$. Beispiel: Betrachte Graph mit zwei Vertices genannt 1 und 2 und einer Kante mit Gewicht 1 zwischen den Vertices d.h. $b(1, 2) = b(2, 1) = 1$. Sei ausserdem $b(2, 2) = 0$ und $b(1, 1) = b > 0$ mit $1/2(1 + b) - 1 > 2$ gewaehlt. Waehle die Funktion $u = (u_1, u_2)$ auf $[0, 1/2]$ als $u_1 = 1 - t$, $u_2 = (1 - t)(1 + b) - 1$. Dann gilt $u_2 > u_1$ auf ganz $[0, 1/2]$ und $u_1(0) > u_1(1/2)$. Das Minimum von u_1 auf $[0, 1/2]$ wird also weder durch das Minimum von $u_1(0)$ noch durch das minimum von u_2 auf $[0, 1/2]$ unterboten....

*B*eweis. Wir zeigen nur (a). (Der Beweis von (b)) ist analog.) Sei $m := \min u|_{[0,T]\times D}$. Gibt es $x \in D$ mit $u_0(x) = m$ so folgt die Behauptung. Wir untersuchen nun den Fall, dass es kein solches x gibt. Dann existiert also ein $t \in (0,T]$ und $x \in D$ mit $u_t(x) = m$. Sei

$$U_m := \{z \in \overline{D} : u_t(z) = m\}.$$

Angenommen $u_t(y) > m$ fuer alle $y \in \partial D$.
Dann gilt fuer jedes $z \in U_m$

$$u'(t,z) \leq 0, \ \ \widetilde{L}u_t(z) = \sum_y b(x,y)(u_t(z) - u_t(y)) \leq 0.$$

(Erste Ugl, da Minimum in t auf $(0,T]$, zweite Ugl. da Minimum bzgl Raumvariable). Mit $u' + \widetilde{L}u \geq 0$, folgt dann also $\widetilde{L}u(z) = 0$. Damit ergibt sich

$$u_t(y) = u_t(z) \ \text{ fuer alle } y \sim z. \ \ (*)$$

Da D zusammenhaengend ist, folgt zunaechst $U_m \subset D$. Weiterhin folgt dann aus $(*)$ sogar $U_m = \overline{D}$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme. □

Als erste Konsequenz aus dem Maximum/Minimum Prinzip beweisen wir Gebietsmonotonie.
Zu $U \subset V$ sei $L_U := p_U L i_U$ und $p_t^U := e^{-tL_U}$. Wir setzen p^U durch 0 auf ganz V fort.

Theorem. *(Gebietsmonotonie) Sei (V,b) gegeben. Sei $U_1 \subset V$ endlich und zusammenhaengend und $U_2 \subset V$ mit $U_1 \subset U_2$ gegeben. Seine $p^{(i)} := p^{U_i}$, $i = 1,2$ die zugehoerigen Halbgruppen. Dann gilt $p_t^{(1)}(x,y) \leq p_t^{(2)}(x,y)$ fuer alle $t \geq 0$ und $x,y \in V$.*

Bemerkung. Es handelt sich um eine spektrale Aussage.
*B*eweis. *Wir setzen zunaechst $c(x) = 0$ fuer alle $x \in V$ voraus:*
Fuer $x \notin U_1$ oder $y \notin U_1$ ist die Behauptung klar. (Da $p^{(2)} \geq 0$.)
Sei nun $x \in U_1$ fest und $g_1(t,y) := p_t^{(1)}(x,y)$ und $g_2(t,y) := p_t^{(2)}(x,y)$. Dann gilt

$$g_i' = \widetilde{L}g_i, \ \text{ auf } U_i$$

fuer $i = 1,2$. Sei $g := g_2 - g_1$. Dann folgt

- $g' = \widetilde{L}g$ auf U_1. (klar, da U_1 die kleinere Menge...)
- $g_0 = 1_x - 1_x = 0$.
- $g|_{[0,T]\times\partial D} \geq 0$ (Fuer $z \notin U_1$ ist $p^1(x,z) = 0$ und $p^2(x,z) \geq 0$).

Nach dem Minimumprinzip gilt dann $g \geq 0$.
Wir behandeln nun $c(x) \neq 0$ beliebig: In diesem Fall koennen wir die Trotter Produkt Formel anwenden und erhalten aus dem schon gezeigten die Behauptung. □

Sei (V,b) ein zusammenhaengender Graph. Dann koennen wir die die endlichen zusammenhaengenden Teilgraphen ordnen durch

$$(U, b_{U\times U}) \prec (W, b_{W\times W}) :\Longleftrightarrow U \subset W.$$

Lemma. *Fuer alle $t \geq 0$, $x,y \in V$ existiert*

$$q_t(x,y) := \lim p_t^U(x,y) = \sup\{p_t^U(x,y) : U \ \textit{endlicher zushg. Subgraph}\}$$

*B*eweis. Folgt sofort aus der Gebietsmonotonie. □

Wir kommen nun zu folgender alterntiver Konstruktion (vgl. Weber '07, Wojciekowski '07.)

THEOREM. *(Konstruktion der Waermeleitung) Sei (V, b) ein zusammenhaengender Graph und q wie im vorangehenden Lemma. Dann gilt:*
(a) Es gilt $q_t(x,y) = q_t(y,x)$ sowie $0 \leq q_t(x,y)$, $\sum_y q_t(x,y) \leq 1$ fuer alle $x \in V$ sowie $q_{t+s}(x,y) = \sum_z q_t(x,z)q_s(z,y)$. Insbesondere sind die durch q_t induzierten Operatoren Q_t Kontraktionen.
(b) Fuer jedes $x \in V$ loest $u : [0,\infty) \times V, u_t(y) := p_t(x,y)$ die Waermeleitungsgleichung mit Anfangswert 1_x und ist die kleinste nichtnegative Loesung mit dieser Eigenschaft.
(c) Fuer jedes $f \in \ell^\infty(V)$ ist $u_t(x) := \sum_y p_t(x,y)f(y)$ eine (beschraenkte) Loesung der Waermeleitungsgleichung.

*B*eweis. Teil (a) folgt leicht aus der Definition.
(b) Schritt 1: Es handelt sich um eine Loesung.
Bew. Waehle eine Folge U_n von endlichen zusammenhaengenden Graphen, die V ausschopfen. Bezeichne die zugehoerigen Halbgruppen als $p^{(n)}$. Waehle $z \in V$ fest und setze $u_n(t,x) := p_t^{(n)}(z,x)$. Dann gilt fuer $t \geq 0$ und $x \in V$ beliebig

$$u_n'(t,x) = -\widetilde{L}u_n(x) = -\sum_y b(x,y)(u_n(t,x) - u_n(t,y)) \quad (*)$$

fuer n genuegend gross (so dass $x \in U_n$). Die Schranken an die p^n liefern dann

$$|u_n'(t,x)| \leq 2\sum b(x,y) \leq C$$

unabhaengig von $t \geq 0$ und $x \in V$ und $n \in \mathbb{N}$ (genuegend gross). Damit folgt (Uebung) die gleichmaessige Konvergenz der $u_n(\cdot,x)$ auf jedem kompakten Teilintervall von $[0,\infty)$. Damit ist der Grenzwert $u(\cdot,x)$ stetig. Weiterhin sind die u_n gleichmaessig beschraenkt (durch 1). Damit liefert die gleichmaessige Konvergenz und $(*)$ auch die gleichmaessige Konvergenz der $u_n'(\cdot,x)$. Damit ist u ebenfalls differenzierbar und es gilt

$$u'(x) = \lim u_n'(x) = -\lim \widetilde{L}u_n(\cdot,x) = -\widetilde{L}u(\cdot,x).$$

Schritt 2: Es handelt sich um die kleinste nichtnegative Loesung.
Bew. Sei $z \in V$ und sei l eine weitere nichtnegative Loesung mit Anfangswert L_z. Sei U_n endlich zusammehaengend mit $z \in U_n$ beliebig und p^n die zugehoerige Halbgruppe. Sei $g(t,x) := l(t,x) - p_t^n(z,x)$. Dann gilt

- $g'(x) = -\widetilde{L}g(x)$ fuer jedes $x \in U_n$.
- $g(0,\cdot) \equiv 0$.
- $g|_{[0,T]\times\partial U_n} = q \geq 0$.

Damit gilt $g \geq 0$. Bilden des Grenzwertes $n \to \infty$ zeigt dann

$$l(t,x) - p_t(z,x) \geq 0$$

und die Behauptung folgt.
(c) Reicht $u \geq 0$ zu betrachten. Nun folgt die Ausage in bekannter Manier.
□

Tatsaechlich stimmen q und p ueberein (vgl. Weber '07, Wojciekowski '07).

THEOREM. *Sei (V, b) ein Graph und seien q und p wie oben konstruiert. Dann gilt $q = p$.*

*B*eweis. Der Beweis wird in zwei Schritten gefuehrt (vgl. Weber '07).

Schritt 1: Es gilt $\widetilde{L}Q_t 1_x = Q_t \widetilde{L} 1_x$ fuer alle $x \in V$. Insbesondere gehoert $\widetilde{L}Q_t 1_x$ zu $\ell^1(V)$ und damit zu $\ell^2(V)$.
Bew. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
Q_t \widetilde{L} 1_x(z) &= \sum_y Q_t(z,y) \widetilde{L} 1_x(y) \\
(NR) \quad &= \sum_y L_F Q_t(z,\cdot)(y) 1_x(y) \\
&= \widetilde{L} Q_t(z,\cdot)(x) \\
(Loesung) \quad &= \frac{d}{dt} Q_t(z,x) \\
&= \widetilde{L} Q_t(\cdot,x)(z) \\
&= \widetilde{L}(Q_t 1_x)(z).
\end{aligned}$$

(Erste Gleichung: Definition; zweite Gleichung: $Q_t(z,\cdot) \in \ell^\infty$, $1_x \in C_c(V)$;
Zum 'Insbesondere': $\widetilde{L}Q_t 1_x = Q_t \widetilde{L} 1_x \in \ell^1(V)$, da $\widetilde{L} 1_x \in \ell^1(V)$ und Q_t eine Kontraktion.
Schritt 2: Sei $v_t := Q_t 1_x - P_t 1_x$. Dann gilt $v \equiv 0$.
Bew. Da Q_t eine Kontraktion ist gehoert $Q_t 1_x$ zu $\ell^1(V)$ und damit zu $\ell^2(V)$. Nach dem ersten Schritt gehoert auch $\widetilde{L}Q_t 1_x$ zu $\ell^2(V)$. Weben $P_t = e^{-tL}$ gehoeren sowohl $P_t 1_x$ als auch $\widetilde{L}P_t 1_x$ zu $\ell^2(V)$. Damit liegt v_t und $\widetilde{L}v_t$ zu $\ell^2(V)$. Weiterhin gilt $v(0,x) = 0$ fuer alle $x \in V$. Nun koennen wir rechnen.

$$\begin{aligned}
\sum_x v^2(t,x) &= \sum_x \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} v^2(\tau,x) d\tau \\
&= -2 \sum_x \int_0^t v(\tau,x) \widetilde{L} v(\tau,x) d\tau \\
(!) \quad &= -2 \int_0^t \sum_x v(\tau,x) \widetilde{L} v(\tau,x) d\tau \\
&= -2 \int_0^t Q(v(\tau,\cdot)) d\tau \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Damit gilt $v(t,\cdot) \equiv 0$.
Zu (!):

$$\sum_x |v(\tau,x) \widetilde{L} v(\tau,x)| \leq \|v_\tau\| \|\widetilde{L} v_\tau\| \leq \|v_0\| \|(Q_\tau - P_\tau) \widetilde{L} 1_x\| \leq 2 \|v_0\| \|\widetilde{L} 1_x\|.$$

$\square$

Es gibt auch ein Minimumprinzip/Maximumprinzip fuer Loesungen der 'Eigenwertgleichung'.

THEOREM. *Sei (V, b) ein Graph. Sei $D \subset V$ zusammenhängend und es gelte für die Funktion u auf V*

- $\widetilde{L}u \geq 0$ *auf* D,
- $u \geq 0$ *auf* D^c.
- u *nimmt auf* D *sein Minimum an.*

Dann folgt $u \equiv 0$ oder $u > 0$ auf D.

Bemerkung. (a) Es muss b auf der Diagonale nicht verschwinden. Insbesondere gilt die Aussage auch fuer $\widetilde{L} + \alpha$ mit $\alpha > 0$ statt $\widetilde{L}$.
(b) Es ist $D = V$ erlaubt. In diesem Fall gilt, die Bedinung, daßu sein Minimum annimt z.B. fuer $u \in l^2(V)$.

PROOF. Sei $x \in D$ mit $u(x)$ minimal auf D. Angenommen $u(x) \leq 0$. Dann gilt $u(x) - u(y) \leq 0$ fuer alle $y \in V$ ($y \in D$: da Minimum; $y \in D^c$, da $u(y) \geq 0$ nach Voraussetzung und $u(x) \leq 0$). Damit folgt aus der Gleichung

$$0 \leq \sum b(x, y)(u(x) - u(y)) + c(x)u(x) \leq 0.$$

Aus dem ueblichen Schluss folgt, dass $u \equiv 0$ auf D. □

Zu tun. Zeige mithilfe dieses Minimumprinzipes, dass auch die Resolventen der Einschraenkungen monoton gegen die Resolvente des Operators konvergieren. Auf diese Weise sollte wieder folgen, dass die Resolvente des Operators die kleinste Loesung der Gleichung ergibt....
Zu tun. Untersuche ob Domain Monotonicity aequivalent ist zu $b \geq 0$. Dann waere das eine weitere Charakterisierung von Dirichlet formen.
Zu tun Zeige mit den ueblichen Methoden, dass Domain Monotonicitz der Resolvente aquivaelent ist zu Domain Monotonicity der Halbgruppe. (Dabei werden jeweils alle Kerne durch 0 fortgesetzt).

2. Stochastische Unvollstaendigkeit

Die Betrachtungen des vorigen Abschnittes zeigen, dass

$$0 \leq e^{-tL}1 \leq 1$$

fuer alle $t \geq 0$. Wie im Falle endlicher Graphen sieht man leicht, dass ein x mit $c(x) > 0$ automatisch zu 'Verlust von Masse' d.h. einer stikten zweiten Ungleichung fuehrt. Daher gilt dem Fall $c(x) = 0$ fuer alle $x \in V$ besonderes Interesse.

DEFINITION. *Ein Graph (b, c) ueber V mit $c(x) = 0$ fuer alle $x \in V$ heisst stochastisch vollstandig, wenn gilt $e^{-tL}1 = 1$ fuer alle $t \geq 0$.*

Hier wollen wir das folgende Resultat von Wojciechowski '07 diskutieren.

THEOREM. *Sei (b, c) ein zusammenhaengender Graph ueber V mit $c(x) = 0$ fuer alle $x \in V$. Dann sind die folgenden Aussagen aequivalent:*

(i) *Es gibt ein $t_0 > 0$ und ein $x_0 \in V$ mit $e^{-t_0 L}1(x_0) < 1$.*
(ii) *Fuer alle $t > 0$ und $x \in V$ gilt $e^{-tL}1(x) < 0$.*

(iii) *Fuer jedes* $\alpha > 0$ *gibt es eine positive beschraenkte Funktion* v *auf* V *mit* $(\widetilde{L} + \alpha)v = 0$.
(iv) *Fuer jedes* $\alpha > 0$ *gibt es eine positive beschraenkte Funktion* v *auf* V *mit* $(\widetilde{L} + \alpha)v \leq 0$.
(v) *Fuer ein* $T > 0$ *gibt es eine nichttriviale beschraenkte Loesung der Gleichung*

$$\widetilde{L}u_t(x) + u_t'(x) = 0 \text{ fuer alle } x \in V \text{ und } 0 < t < T,$$
$$u_0(x) = 0 \text{ fuer alle } x \in V.$$

(vi) *Es gibt eine nichttriviale beschraenkte Loesung der Gleichung*

$$\widetilde{L}u_t(x) + u_t'(x) = 0 \text{ fuer alle } x \in V \text{ und } 0 < t,$$
$$u_0(x) = 0 \text{ fuer alle } x \in V.$$

*B*eweis. (ii) $\Longrightarrow$ (i): klar.
(i) $\Longrightarrow$ (ii): Der Beweis erfolgt in zwei Schritten:
Schritt 1. Gibt es ein $s > 0$ mit $e^{-tL}1 = 1$ fuer alle $t < s$, so gilt $e^{-tL}1 = 1$ fuer alle $t \geq 0$.
Bew. Das ist klar nach der Halbgruppeneigenschaft.
Schritt 2. Gibt es $t_0 > 0$ und $x_0 \in V$ mit $e^{-t_0 L}1(x_0) < 1$, so gilt $e^{-tL}1(x) < 1$ fuer alle $t > t_0$ und $x \in V$.
Bew. Da die Halbgruppe auf $\ell^2(V)$ positivitaetsverbessernd ist, ist sie auch positivitaetsverbessernd auf $\ell^\infty(V)$. Damit folgt die Aussage leicht. (Betrachte Differenz $1 - e^{-tL}1$...)
Mit Schritt 1 und Schritt 2 folgt die gewuenschte Implikation.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Sei $\alpha > 0$ beliebig. Sei die Funktion w auf V definiert durch

$$w(x) := \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-tL} 1(x) dt.$$

Schritt 1. Es gilt $0 < w < \frac{1}{\alpha}$. Insbesondere ist also $v = 1 - \alpha w$ positiv und beschraenkt.
Bew. Da der Graph zusammenhaengend ist, ist die Halbgruppe positivitaetsverbessernd, und es gilt $0 < w$. Nach (ii) gilt ausserdem

$$w < \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}.$$

Schritt 2. Die Funktion $v = 1 - \alpha w$ erfuellt $(\widetilde{L} + \alpha)v = 0$.
Bew. Sei $u_t := e^{tL}1$. Dann ist $t \mapsto \widetilde{L}u_t(x)$ beschrankt fuer jedes $x \in V$. Ebenso ist (nach Schritt 1) die Funktion w beschraenkt auf V. Damit gilt dann:

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}w &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \widetilde{L}u_t(x) dt \\
&= -\int_0^\infty e^{-\alpha t} u_t'(x) dt \\
&= -e^{\alpha t} u_t(x)|_0^\infty - \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t} u_t(x) dt \\
&= 1 - \alpha w.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung von Schritt 2.

Mit Schritt 2. ist die gewuenschte Implikation bewiesen.

(iii)$\Longrightarrow$ (iv): klar.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii): Der Beweis wird in mehreren Schritten gefuehrt. Zunaechst erinnnern wir an folgendes Minimumprinzip:
Schritt 0: Sei $\alpha > 0$. Ist $D \subset V$ endlich und erfuellt u die Gleichung $(\widetilde{L} + \alpha)u \geq 0$ auf D und $u \geq 0$ auf D^c so folgt $u \geq 0$.
Bew. Da D endlich ist, nimmt u auf D sein Minimum an. Es nehme u auf D sein Minimum in x an. Angenommen $u(x) < 0$. Dann laesst sich auf die uebliche Weise eine Widerspruch fuehren

$$0 \leq \sum_y b(x,y)(u(x) - u(y)) + c(x)u(x) + \alpha u(x) \leq \alpha u(x) < 0.$$

(Erste Ungleichung folgt durch Fallunterscheidung: $y \in D$: $u(x)$ minimal; $y \in D^c$ $u(x) < 0$ $u(y) \geq 0$.) Es folgt also $u \geq 0$ auf D. Auf D^c gilt sowieso $u \geq 0$. Damit folgt die Aussage.

Schritt 2: Sei $D \subset V$ endlich und L^D die Einschrankung von $\widetilde{L}$ auf D. Funktionen auf D seinen durch 0 auf ganz V fortgestezt. Sei 1_D die charakteristische Funktion von D und 1 die konstante Funktion 1 auf V. Dann erfuellt $v_D := -\alpha(L^D + \alpha)^{-1} 1_D + 1$ die Bedingungen

- $v_D \equiv 1$ auf D^c,
- $(\widetilde{L} + \alpha)v_D = 0$ auf D.

Bew. Das laesst sich direkt nachrechnen.

Schritt 3: Es gilt $0 \leq v_D \leq 1$. Ist D zusammenhaengend, so gilt $0 < v_D$ auf D.
Bew. Nach den ueblichen Satzen ueber Dirichletformen auf endlichen Mengen gilt $0 \leq \alpha(L^D + \alpha)^{-1} 1_D \leq 1$. Damit folgt die erste Behauptung. Die strikte Ungleichung folgt durch Betrachten des Minimum (vgl. Minimumprinzip).

Schritt 4: Gilt $D \subset D'$ so folgt $v_D \geq v_{D'}$.
Bew. Das ist klar auf D^c (da $0 \leq v_{D'} \leq 1$ und $v_D = 1$ auf D^c.
Auf D wiederum erfuellt $w := v_D - v_{D'}$ die Gleichung $(L + \alpha)w = 0$. Nach dem Minimumprinzip aus Schritt 0 gilt dann $w \geq 0$ ueberall.

Schritt 5: Der Grenzwert $v = \lim v_D$ (genommen uber zusammenhaengende endliche Teilmengen von V) ist eine beschränkte nichtnegative Funktion nichttriviale Funktion und erfuellt $(\widetilde{L} + \alpha)v = 0$.
Bew. Grenzwert existiert nach Monotonie. Aufgrund der gleichmaessigen Beschraenktheit von v_D und da die v_D die Gleihung 'fast' erfuellen, erfuellt v die Gleichung $(\widetilde{L} + \alpha)v = 0$. Es bleibt zu zeigen, dass v nichttrival ist.
Dazu zeigen wir: $v \geq w$, wobei w eine nach Voraussetzung existierende nichttriviale Loesung mit $0 \leq w \leq 1$ von $(\widetilde{L} + \alpha)w \leq 0$ ist: Betrachte fuer beliebiges $D \subset V$ die Funktion $u_D := v_D - w$. Dann zeigt das Minimumprinzip aus Schritt 0, dass $u_D \geq 0$. Damit folgt durch Grenzuebergang (D beliebig) $v \geq w$. Da w nichttrivial ist, ist dann auch v nichttrivial.

(iii) $\Longrightarrow$ (v): Wir konstruieren zwei beschraenkte Loesungen w und u der Waermeleitungsgleichung und zeigen, dass diese verschieden sind.

Sei $w_t := e^{\alpha t} v$ (fuer eine positive beschraenkte Loesung v von $(\widetilde{L}+\alpha)v = 0$). Dann ist w positiv und beschraenkt auf $(0,1) \times V$ und erfuellt

$$\widetilde{L}w_t + w_t' = e^{\alpha t}(\widetilde{L} + \alpha)v = 0$$

sowie

$$w_0(x) = v(x) \text{ fuer alle } x \in V.$$

Weiterhin ist $u_t = e^{-tL}v$ ebenfalls positiv und beschraenkt auf $(0,1) \times V$ und erfuellt

$$\widetilde{L}u_t + u_t' = 0$$

sowie

$$u_0(x) = v(x) \text{ fuer alle } x \in V.$$

Schliesslich ist $w \neq u$ da fuer jedes $t > 0$ gilt

$$\sup_{x\in V} w_t(x) = e^{\alpha t} \sup_{x\in V} v(x) > \sup_{x\in V} v(x) \geq \sup_{x\in V} u_t(x).$$

(Hier folgt: Erste Gleichung nach Definition, von w, $>$, da $\alpha > 0$, letzte Ungleichung, da e^{tL} Normschranke 1 auf $\ell^\infty(V)$ hat.) Damit liefert die Differenz $u = w - v$ eine wie in (v) gewuenschte Funktion.

(v) $\Longrightarrow$ (i): Sei u eine beschränkte nichttriviale Loesung der Waermeleitungsgleichung mit Anfangswert 0. . Sei ohne Einschraenkung (Skalieren) $|u| < 1$. Sei (t_0, x_0) mit $u(t_0, x_0) > 0$ gegeben. (Sonst $-u$ betrachten). Sei $w := 1 - u$. Dann loest w die Warmeleitungsgleichung zum Anfangsert 1 und erfuellt $w(x_0, t_0) < 1$. Sei nun

$$v := w - P^D 1.$$

Dann gilt $v \geq 0$ auf D^c und v loest die Waermeleitungsgleichung auf $D \times [0, T]$ zum Anfangswert 0. Nach dem Minimumprinzip gilt dann $v \geq 0$. Da D beliebig ist, folgt dann durch Grenzuebergang $w - P1 \geq 0$ und damit $1 \geq w(x_0, t_0) \geq P_t 1(x_0)$.

(vi) $\Longrightarrow$ (v): klar.

(i)$\Longrightarrow$ (vi): Betrachte $u_t := 1 - e^{-tL}1$. Dann ist u beschrankt mit $u_0(x) = 0$ und $\widetilde{L}u_t = u_t'$. Weiterhin ist u nach (i) nichttrivial. $\square$

Bemerkung. Der Beweis in *(iv)* $\Longrightarrow$ *(iii)* ist in gewisser Weise komplementaer zur Konstruktion der Resolvente des Gesamtoperators durch Approximation mittels der Resolventen von endlichen Operatoren. Insbesondere ist die dort konstruierte Loesung v die groesste Loesung der Gleichung $(\widetilde{L} + \alpha)w = 0$ mit $0 \leq w \leq 1$.

KAPITEL 7

Die Schroedingergleichung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Schroedingergleichung

$$i\frac{d}{dt}u = \widetilde{L}u.$$

Diese Gleichung beschreibt die quantenmechanische Bewegung eines Teilchens in Laufe der Zeit. Dabei geht es um $u \in \ell^2(V)$. Es ist $|u|^2/\|u\|^2$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte d.h. die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit t in der Region $K \subset V$ zu finden, ist gerade

$$\frac{1}{\|u\|^2}\sum_{x\in K}|u_t(x)|^2.$$

Das Element u (oder genauer das normierte Element $\frac{1}{\|u\|}u$ wird dann Zustand (des quantenmechanischen Systems) genannt.

Achtung! In diesem Kapitel betrachten wir den komplexen Hilbertraum $\ell^2(V)$ der komplexwertigen quadratsummmierbaren Funktionen auf V.

1. Schroedingergleichung und unitaere Gruppe

Wir untersuchen in diesem Abschnitt den Zusammenhang zwischen unitaeren Gruppen und selbstadjungierten Operatoren. Das geschieht in Analogie zu unseren Untersuchungen zum Zusammenhang zwischen Markovschen Halbgruppen und zu Dirichletformen assoziierten Operatoren.

Definition. *Eine Abbildung $U : \mathbb{R} \longrightarrow B(\ell^2(V))$ heisst (stark stetige) unitaere Gruppe auf $\ell^2(V)$, wenn folgendes gilt:*

- *Jedes $U_0 = I$ und $U_{t+s} = U_tU_s$ fuer alle $t, s \in \mathbb{R}$.*
- *$\langle U_tf, U_tf\rangle = \langle f, f\rangle$ fuer alle $t \in \mathbb{R}$ und $f \in \ell^2(V)$.*
- *$\lim_{t\to 0} U_tf = f$ fuer alle $f \in \ell^2(V)$.*

Bemerkung. Aufgrund des ersten Punktes ist jedes U_t invertierbar mit $U_t^{-1} = U_{-t}$. Aufgrund der zweiten Punktes ist jedes U_t eine Isometrie (erhaelt die Norm). Damit ist jedes U_t eine surjektive Isometrie also unitaer d.h. es gilt $U_t^* = U_t^{-1}$.

Interpretation. Will man die Zeitentwicklung $t \mapsto f_t$ eines Zustandes f beschreiben, so dass $|f|^2$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, so sind folgende Forderungen naheliegend:

- $f_0 = f$, $f_{t+s} = (f_s)_t$. (Zeitentwicklung)
- $\|f_t\|^2 = \langle f_t, f_t\rangle = \langle f_0, f_0\rangle = \|f\|^2$ (Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit)

- $\lim_{t\to 0} f_t = f$ (Stetigkeit der Entwicklung)

Das fuehrt also gerade auf unitaere Gruppen.

Mathematisch ist dann folgender Zusammenhang entscheidend. Er zeigt, dass unitaere Gruppe gerade auf selbstadjungierte Operatoren fuehren.

Theorem. *(Stone/von Neumann) Sei $U : \mathbb{R} \longrightarrow B(\ell^2(V))$ gegeben. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es ist U eine unitaere Gruppe.*
(ii) *Es gibt einen selbstadjungierten Operator L mit $U_t = e^{-itL}$ fuer alle $t \in \mathbb{R}$.*

In diesem Fall ist $t \mapsto U_t f$ die (eindeutige) Loesung in $\ell^2(V)$ der Gleichung

$$\frac{d}{dt} u_t = -iLu,\ u_0 = f.$$

Auf einen Beweis verzichten wir an dieser Stelle. Man kann sich jedoch an unseren Ueberlegungen zum Erzeuger der Waermeleitung orientieren.

Notation. Der Operator L aus dem vorigen Satz heisst der Erzeuger der unitaeren Gruppe.

2. Das RAGE-Theorem

Es handelt sich um ein Theorem, das auf Arbeiten von Ruelle, Amrein, Georgescu und Enss aus den 70er Jahren zurueckgeht.

Sei $U_t = e^{-tiL}$ eine unitaere Gruppe mit Erzeuger L auf $\ell^2(V)$. Wir unterscheiden drei Arten von Zustaenden.

Gebundene Zustaende: Ein $f \in \ell^2(V)$ heisst gebunden, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset V$ existiert mit

$$\|1_{V\setminus K} U_t f\|^2 \leq \varepsilon$$

fuer alle $t \in \mathbb{R}$. (Interpretation: Das Teilchen ist im wesentlichen in K gebunden.)

Streuzustand: Ein $f \in \ell^2(V)$ heisst Streuzustand, wenn fuer jede kompakte Menge $K \subset V$ gilt

$$\lim_{|t|\to\infty} \|1_K U_t f\|^2 = 0.$$

(Interpretation: Das Teilchen verlaesst fuer grosse Zeiten t jedes Kompaktum.)

Streuzustaende im zeitlichen Mittel: Ein $f \in \ell^2(V)$ heisst Streuzustand im zeitlichen Mittel, wenn fuer jede kompakte Menge $K \subset V$ gilt

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|1_K U_t f\|^2 = 0$$

(und damit auch)

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 \|1_K U_t f\|^2 = 0.$$

(Interpretation: Das Teilchen verlaesst fuer grosse Zeiten T im zeitlichen Mittel jedes Kompaktum.)

THEOREM. *Sei* $U_t = e^{-tiL}$ *eine unitaere Gruppe mit Erzeuger* L *auf* $\ell^2(V)$. *Dann gilt:*
(a) Ein $f \in \ell^2(V)$ *ist genau dann ein gebundener Zustand, wenn es eine Linearkombination von Eigenfunktionen ist d.h. wenn das Spektralmass* μ_f *von* f *ein reines Punktmass ist.*
(b) Ein $f \in \ell^2(V)$ *ist genau dann ein Streuzustand im zeitlichen Mittel, wenn das Spektralmass* μ_f *stetig ist d.h. keine Punktanteile besitzt.*
(c) Ein $f \in \ell^2(V)$, *dessen Spektralmass absolut stetig bzgl. des Lebesguemasses auf* $\mathbb{R}$ *ist, gehoert zu den Streuzustaenden.*