
Analysis I

Wintersemester 2010/2011

Prof. Dr. D. Lenz

Blatt 5

Abgabe 25.11.2010

(1) Für $A, B \subset \mathbb{R}$ seien

$$\begin{aligned} A + B &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \text{es existieren } a \in A \text{ und } b \in B \text{ mit } x = a + b\}, \\ A \cdot B &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \text{es existieren } a \in A \text{ und } b \in B \text{ mit } x = a \cdot b\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Sind $A, B \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt, dann ist

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B).$$

(b) Es existieren nichtleere, beschränkte Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$, mit

$$\inf(A \cdot B) \neq \inf(A) \cdot \inf(B).$$

(2) Die Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ genüge der folgenden Bedingung

$$f(m + n) = f(m) + f(n) + a$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und ein $a \in \mathbb{R}$, und es seien $f(2) = 10$ und $f(20) = 118$. Ist f hierdurch eindeutig bestimmt? Man bestimme gegebenenfalls f und a .

(3) Beweisen Sie für positive Zahlen x_1, \dots, x_n die Implikation

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1 \implies x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n.$$

Hinweis: Um die Aussage für $n + 1$ zu zeigen, können Sie ohne Einschränkung (Warum?) annehmen $x_n \leq 1$ und $x_{n+1} \geq 1$ und dann die Induktionsvoraussetzung auf die Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n x_{n+1}$ anwenden.

(4) Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_1, \dots, a_n > 0$ gilt:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

(In Worten: Das harmonische Mittel ist kleiner gleich dem geometrischen Mittel und dieses ist kleiner gleich dem arithmetischen Mittel der a_1, \dots, a_n .)

Hinweis: Aufgabe (3).

Zusatzaufgabe: Betrachten Sie die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$. Zeigen Sie, dass \mathbb{Z} mit der üblichen Nachfolgeabbildung $\nu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\nu(k) := k + 1$ für kein $e \in \mathbb{Z}$ die Peano-Axiome erfüllt. Finden Sie eine Nachfolgeabbildung auf \mathbb{Z} und ein $e \in \mathbb{Z}$, mit denen die Peano-Axiome erfüllt sind.