Analysis III

Wintersemester 2011/2012 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 4 **Abgabe Dienstag 15. 11. 2011**

(1) Sei $f : (a,b) \to [0,\infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion und sei

$$\Phi : (a,b) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad (r,\phi) \mapsto (f(r)\cos\phi, f(r)\sin\phi, r).$$

Untersuchen Sie unter welchen weiteren Voraussetzungen es sich bei Φ um eine reguläre Parametrisierung handelt. (Man nennt die durch Φ erzeugte Fläche, die durch f erzeugte Rotationsfläche.)

(2) Berechnen Sie das Oberflächenintegral der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = \begin{cases} 0 & : (x,y,z) = 0, \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & : \text{sonst.} \end{cases}$$

über die Kegelmantelfläche, die durch die Parametrisierung

$$\Phi : (0,1) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad (r,\phi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi, r)$$

gegeben ist.

(3) Berechnen Sie die Gramsche Determinante für die Parametisierung der Sphäre mit Radius R im $\mathbb{R}^3$ durch

(a) Kugelkoordinaten:

$$\Phi : [0,2\pi) \times [0,\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad (\phi,\theta) \mapsto R(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi).$$

(b) Polarkoordinaten:

$$\Psi : [0,2\pi) \times [0,\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad (\phi,\theta) \mapsto R(\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, \sin\theta).$$

Berechnen Sie den Oberflächeninhalt.

(4) Berechnen Sie die Gramsche Determinante für die Parametisierung der Sphäre mit Radius R im $\mathbb{R}^3$ durch

   (a) die stereographische Projektion

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \frac{R}{1 + u^2 + v^2}(2u, 2v, 1 - u^2 - v^2),$$

   (b) die Mercatorabbildung

$$\Psi : [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \frac{R}{\cosh v}(\cos u, \sin u, \sinh v).$$

Zusatz
Berechnen Sie die Gramsche Determinante für die Parametisierung der Sphäre mit Radius R im $\mathbb{R}^3$ durch die stereographische Lambert-Abbildung

$$\Theta : [0, 2\pi R) \times [-R, R] \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (\sqrt{R^2 - v^2}\cos(u/R), \sqrt{R^2 - v^2}\sin(u/R), v).$$