Analysis II Sommersemester 2017

# Hausaufgabenblatt 12

Abgabe am 28.06.2017

---

**Aufgabe 1.** Zeigen Sie die Differenzierbarkeit der folgenden Funktionen und berechnen Sie deren Jacobimatrizen:

(a) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}^m$ ,

(b) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) = c + \langle a, x \rangle$, mit $a \in \mathbb{R}^d$ und $c \in \mathbb{R}$,

(c) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) = c + \langle a, x \rangle + (1/2)\langle Bx, x \rangle$, wobei $a \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}$ und wobei $B$ eine reelle symmetrische $d \times d$-Matrix ist,

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, $f(t) = x_0 + tv_0$ mit $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^d$ .

**Aufgabe 2.** Sei $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Sei $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) \equiv g(|x|) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^m.$$

(a) Beweisen Sie, dass $f$ genau dann differenzierbar ist, wenn $g$ differenzierbar ist mit $g'(0) = 0$.

(b) Berechnen Sie den Gradienten von $f$ unter der Bedingung das $f$ differenzierbar ist.

**Aufgabe 3.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x - 2y$. Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f$.

**Aufgabe 4.** Man bestimme das Taylorpolynom 2. Grades von $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \cos(xy) + x\mathrm{e}^{y-1}$, an der Stelle $(x, y) = (\pi, 1)$.

**Zusatzaufgabe 5.** Seien $0 < r < R$. Ein Torus im $R^3$ ist durch die Gleichung

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0$$

gegeben. Zeigen Sie:

(a) In jedem Toruspunkt ist die Gleichung nach einer der Variablen auflösbar.

(b) Die Gleichung kann in allen Punkten mit $x \neq 0$ und $|z| \neq r$ lokal nach $x$ aufgelöst werden.

Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion $x = x(y, z)$ aus Teil (b) durch implizites Differenzieren.

Bitte Wenden!

**Zusatzaufgabe 6.** Es seien die Gleichungen

$$-2x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + \mathrm{e}^{y-1} - 2y = 0$$

gegeben. Zeigen Sie, dass man das Gleichungssystem für nahe an 1 liegende $x, y, z$ durch stetige Funktionen $y = \varphi(x)$ und $z = \psi(x)$ auflösen kann.

**Zusatzaufgabe 7.** Die Van-der-Waals-Gleichung

$$p = \frac{8T}{3V - 1} - \frac{3}{V^2}$$

beschreibt den Druck $p > 0$ eines Gases in Abhängigkeit seiner Temperatur $T > 0$ und seines Volumens $V > \frac{1}{3}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(V_0, T_0, p_0) = (3, 1, \frac{2}{3})$ eine Lösung der Gleichung ist und dass wir die Gleichung in einer Umgebung dieser Lösung eindeutig nach $V$ auflösen können.

(b) Nach (a) können wir $V$ als Funktion $V(T, p)$ auffassen. Berechnen Sie die Ableitung $\frac{\partial V}{\partial p}(T_0, p_0)$.