Analysis II

Sommersemester 2014 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 4 **Abgabe 08.05.2014**

(1) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und von einheitlichem Vorzeichen. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx.$$

(2) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton und stetig differenzierbar und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\,dx + f(b) \int_\xi^b g(x)\,dx.$$

(3) Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion zu den folgenden Funktionen.

(a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 \sin(2x)$.

(b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 e^{-x^2}$.

(4) Berechnen Sie die Riemannintegrale als Grenzwerte geeigneter Zwischensummen.

(a) $\int_0^1 x^2 dx$ (b) $\int_0^1 e^x dx$.

Hinweise: Vorschlag für Zerlegung: $x_k = \frac{k}{n}$. Begründen Sie die Konvergenz.

Zusatzaufgaben

(Z1) Benutzen Sie $\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_{k+1} - b_k)$ mit $A_m = \sum_{k=1}^m a_k$ (Zusatzaufgabe von Aufgabenblatt 4 letztes Semester), um den Wert des Integrals $\int_0^1 xe^x dx$ als Limes einer Obersumme (oder Untersumme) zu bestimmen.

(Z2) Untersuchen Sie, ob sich unter den Voraussetzungen von Aufgabe 1 auch ein $\xi \in (a, b)$ finden lässt, dass die Aussage von Aufgabe 1 gilt.