Globale Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Wintersemester 2018 **Dr. Marcel Schmidt**

Blatt 6 **Abgabe: 26.11.2018**

(1) Für $p \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir den von der globalen Karte $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ induzierten Isomorphismus $\mathbb{R}^n \to T_p\mathbb{R}^n$ mit Φ_p^n. Sei ferner $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung und sei $f'(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ihre Fréchet-Ableitung (die Ableitung im üblichen Sinne, siehe Analysis II). Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\Phi_p^n"] \arrow[d, "f'(p)"'] & T_p\mathbb{R}^n \arrow[d, "Df(p)"] \\
\mathbb{R}^m \arrow[r, "\Phi_{f(p)}^m"] & T_{f(p)}\mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

(2) Seien (X, g_X) und (Y, g_Y) riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\psi : X \to (0, \infty)$ glatt. Beweisen Sie die folgende Aussage. Ist Y m-dimensional, so erfüllt das riemannsche Volumen vom Warpprodukt $(M, g_X \oplus_\psi g_Y)$ die Gleichung

$$\mathrm{vol}_{g_X \oplus_\psi g_Y} = (\psi^m \otimes 1) \cdot \mathrm{vol}_{g_X} \otimes \mathrm{vol}_{g_Y}.$$

Hier ist $(\psi^m \otimes 1) : X \times Y \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \psi^m(x)$ und $\mathrm{vol}_{g_X} \otimes \mathrm{vol}_{g_Y}$ das Produktmaß von vol_{g_X} und vol_{g_Y}.

(3) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit ausgestattet mit der von $g_{\mathbb{R}^n}$ induzierten riemannschen Metrik g_M. Zeigen Sie, dass für jede Borel-messbare Funktion $f : M \to [0, \infty)$ gilt

$$\int_M f d\mathrm{vol}_{g_M} = \int_M f d\sigma.$$

Dabei bezeichnet $\int_M f d\sigma$ das Oberflächenintegral von f.

Erinnerung: Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen. Eine injektive Funktion $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ heißt reguläre Parameterdarstellung für M, falls ψ regulär ist (d.h. $\operatorname{rang} D\psi(p) = k$, alle $p \in V$) und $\psi(V) \subseteq M$. Für eine messbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $f = 0$ auf $M \setminus \psi(V)$ definiert man

$$\int_M f d\sigma = \int_V (f \circ \psi)\, G_\psi d\lambda.$$

Dabei ist λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^k$ und $G_\psi : V \to [0, \infty)$ die Gramsche Determinante

$$G_\psi(x) = \sqrt{\det D\psi(x)^T D\psi(x)} = \sqrt{\det(\langle \partial_i \psi(x), \partial_j \psi(x) \rangle)}.$$

Für auf ganz M definierte Funktionen wird dies geeignet mittels glatten Partitionen der Eins fortgesetzt.