# Analysis II für Physiker

**Sommersemester 2009** **Prof. Dr. D. Lenz**

**Blatt 6** **Abgabe Mittwoch 27.05.2009**

(1) Beweisen Sie den folgenden Fixpunktsatz: Sei $(X,\, d(\cdot,\cdot))$ ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Abbildung mit der Kontraktionseigenschaft:

$$d(Tx, Ty) \leq M\, d(x, y), \qquad \text{für alle } x, y \in X,$$

wobei $0 < M < 1$. Dann existiert genau ein Element $z$ von $X$ mit $Tz = z$.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass $x_n := T^n x$ eine Cauchy Folge ist. Was können Sie über $x := \lim x_n$ sagen? Verwenden Sie für die Eindeutigkeit einen Widerspruchsbeweis und die Kontraktionseigenschaft.)

(2) Betrachten Sie den metrischen Raum $(\mathbb{R}^n,\, d_d(\cdot,\cdot))$ mit der diskreten Metrik

$$d_d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \{0, 1\}, \quad d_d(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1 & x \neq y. \end{cases}$$

a.) Charakterisieren Sie alle konvergenten Folgen in der diskreten Metrik.

(Hinweis: Bestimmen Sie zunächst, was Konvergenz in der diskreten Metrik heißt.)

b.) Finden Sie die kompakten Mengen bezüglich $d_d$.

(Hinweis: Untersuchen Sie endliche und unendliche Mengen.)

(3) Sei $z = (\rho_1, ...., \rho_m) \in \mathbb{R}^m$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt die Formel

$$\left( \sum_{j=1}^{m} \rho_j \right)^k = \sum_{\alpha : |\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!}\, z^\alpha,$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$, $|\alpha| = \sum_j \alpha_j$, $\alpha! = \prod_j \alpha_j!$ und $z^\alpha = \prod_j z_j \alpha_j$.

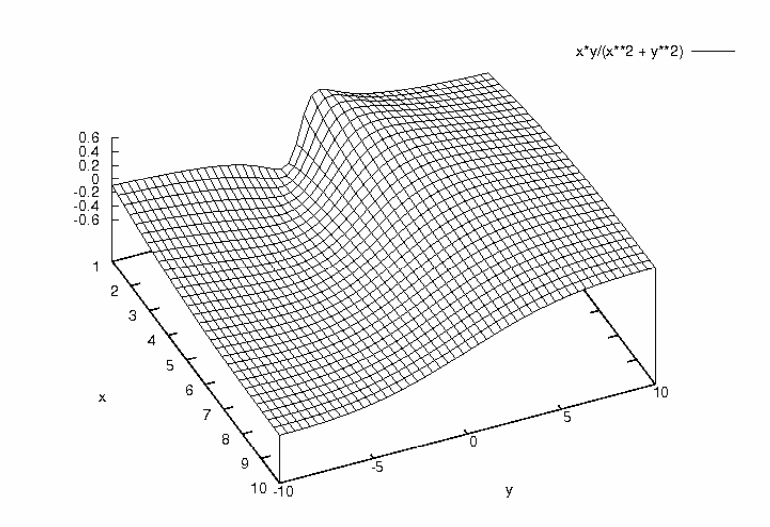


Abbildung 1: Zu Aufgabe 4 b.: Die Funktion $g(x, y)$ im Bereich $(x, y) \in [1, 5] \times [-5, 5]$.

(4) Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

a.) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existieren.

b.) Ist die Funktion differenzierbar? (Hinweis: Untersuchen Sie $(x, y) \neq (0, 0)$ und $(x, y) = (0, 0)$ getrennt. Betrachten Sie auch die Stetigkeit von $g$. Siehe Abbildung!)

## Zusatzaufgaben

(1) Untersuchen Sie die folgenden Punktmengen aus $\mathbb{R}$ auf Offenheit/Abgeschlossenheit:

a.) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{1}{n}\}$, b.) $\{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{1}{n}\}$, c.) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$.

(2) Untersuchen Sie die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0 \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$