Höhere Analysis II

Wintersemester 2018/2019 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 9 **Abgabe Donnerstag 20.12.2018**

(1) Für $t > 0$ sei

$$f_t : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, f_t(x) = \frac{1}{t+x}.$$

Für $I \subset (0,\infty)$ sei weiterhin

$$L(I) := \mathrm{Lin}\{f_t : t \in I\} \subset C_0([0,\infty)).$$

Zeigen Sie:

(a) Falls I keine isolierten Punkte hat, so ist $L(I)$ in $C_0([0,\infty))$ dicht.

(b) Es genügt anzunehmen, daß I einen Häufungspunkt in $(0,\infty)$ hat, um Dichtheit von $L(I)$ in $C_0([0,\infty))$ zu beweisen.

(2) Für $t > 0$ sei

$$e_t : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, e_t(x) = e^{-tx}.$$

Für $I \subset (0,\infty)$ sei weiterhin

$$L(I) := \mathrm{Lin}\{e_t : t \in I\} \subset C_0([0,\infty)).$$

Zeigen Sie:

(a) Falls I keine isolierten Punkte hat, so ist $L(I)$ in $C_0([0,\infty))$ dicht.

(b) Es genügt anzunehmen, daß I einen Häufungspunkt in $(0,\infty)$ hat, um Dichtheit von $L(I)$ in $C_0([0,\infty))$ zu beweisen.

(3) Seien X und Y lokalkompakte, Hausforffräume. Für $f \in C_0(X)$ und $g \in C_0(Y)$ sei $f \otimes g \in C_0(X \times Y)$ definiert durch $(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y)$. Zeigen Sie, daß

$$\mathrm{Lin}\{f \otimes g : f \in C_0(X), g \in C_0(Y)\}$$

dicht in $C_0(X \times Y)$ ist.

Hinweis: Benutzen Sie, daß es für $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ eine Funktion $\varphi \in C_c(X)$ gibt mit $\varphi(x_1) = 0$ und $\varphi(x_2) = 1$ (und entsprechend für Punkte aus Y).