Höhere Analysis

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 5 **Abgabe Mittwoch 02.12.2009**

(1) Ein lineares Funktional $\varphi : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ heißt Banachlimes, wenn gilt

(i) für den Linksshift $S_L(x_1, x_2, \dots) := (x_2, x_3, \dots)$ ist $\varphi \circ S_l = \varphi$,

(ii) sind alle $x_k \geq 0$, so ist $\varphi(x) \geq 0$,

(iii) für die Folge $e = (1, 1, \dots)$ ist $\varphi(e) = 1$.

Sei $\varphi : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ ein Banachlimes. Zeigen Sie:

(a) (1) Für alle $x = (x_n) \in \ell^\infty$ gilt $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leq \varphi(x) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

(2) φ ist stetig mit Norm $\|\varphi\| = 1$.

(3) φ ist nicht multiplikativ, d.h. i.a. gilt $\varphi(x)\varphi(y) \neq \varphi(x \cdot y)$.

(b) Es gibt Banachlimiten.
Hinweis: Betrachten Sie $U := \{x \in \ell^\infty : \lim\limits_{n\to\infty} x_n \text{ existiert}\}$ und für eine Folge von Intervallen $I_n \subset \mathbb{N}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, mit $|I_n| \to \infty$ für $n \to \infty$ die Funktion $p(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|I_n|} \sum_{i \in I_n} x_i$.

(2) Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei (F_n) ein Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von M mit der Eigenschaft $F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_n \supset \dots$ und $\operatorname{diam} F_n \to 0$, wobei $\operatorname{diam} A := \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ nichtleer ist. Gilt dies auch, falls man auf die Vollständigkeit verzichtet? Kann man die Voraussetzung $\operatorname{diam} F_n \to 0$ fallenlassen?

(3) Sei $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik ausgestattet. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{Q}$ ist keine G_δ-Menge.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist die Menge $\{t \in \mathbb{R} : f \text{ stetig in } t\}$, die Menge der Stetigkeitspunkte von F, eine G_δ-Menge.
Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $\{t \in \mathbb{R} : \exists$ offene Umgebung U von t so dass für alle $x, y \in U$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \epsilon\}$.

(c) Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in allen rationalen Zahlen stetig, aber in allen irrationalen Zahlen unstetig ist.

(d) Es gibt andererseits eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in allen irrationalen Zahlen stetig, jedoch in allen rationalen Zahlen unstetig ist?
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , \text{ für irrationales } x > 0 \\ \frac{1}{q} & , \text{ für rationales } x = \frac{p}{q} \text{ wobei } p, q \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

(4) Sei $E \neq \{0\}$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass für alle $S, T \in \mathcal{L}(E)$ stets $ST - TS \neq \mathrm{Id}$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $(n + 1)S^n = TS^{n+1} - S^{n+1}T$.