# Gewöhnliche Differentialgleichungen

**Sommersemester 2012** **Blatt 5 - Lösungsvorschlag Aufgabe 4**

Wir haben $g(x) = a$ und $h(x)$ sind stetig auf $\mathbb{R}$ womit die Voraussetzungen für den Satz aus der Vorlesung erfüllt sind. Also

$$\varphi_{hom}(x) = y_0 \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} a\ dx\right) = y_0 \exp\left(-ax + ax_0\right)$$

und

$$\begin{aligned}\varphi_{spez}(x) &= \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} a\ dx\right)\left[\int\limits_{x_0}^{x} h(s)\exp\left(\int\limits_{x_0}^{s} a\ dt\right)\ ds\right] \\ &= \exp\left(-ax + ax_0\right)\cdot\left[\int\limits_{x_0}^{x} h(s)\exp(as - ax_0)\ ds\right] \\ &= \exp\left(-ax\right)\cdot\left[\int\limits_{x_0}^{x} h(s)\exp(as)\ ds\right]\end{aligned}$$

Da $a \in (0, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\varphi_{hom}(x) &= 0, \\ \lim_{x\to\infty}\exp(ax) &= \infty.\end{aligned}$$

Müssen also Aussage für spezielle Lösung beweisen. Wir zeigen

$$\frac{\int\limits_{x_0}^{x}(h(s) - b)\exp asds}{\exp ax} \to 0$$

da

$$\frac{\int\limits_{x_0}^{x} -b\exp asds}{\exp ax} = -b\frac{1/a\exp ax - 1/a\exp ax_0}{\exp ax} \to -b/a$$

ergo

$$\frac{\int\limits_{x_0}^{x} h(s)\exp asds}{\exp ax} \to b/a.$$

Da $h(s) \to b$ gilt:

$$\forall\epsilon > 0\exists R > 0\forall s > R : |h(s) - b| \leq \epsilon.$$

Sei also für $\epsilon > 0$ ein solches $R$ gewählt, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}|\int\limits_{R}^{x}(h(s) - b)\exp asds| &\leq \int\limits_{R}^{x}|h(s) - b|\exp asds \\ &\leq \epsilon/a(\exp ax - \exp aR)\end{aligned}$$

Damit

$$\frac{|\int\limits_{x_0}^{x}(h(s)-b)\exp asds|}{\exp ax} \leq \frac{|\int\limits_{R}^{x}(h(s)-b)\exp asds|}{\exp ax} + \frac{|\int\limits_{x_0}^{R}(h(s)-b)\exp asds|}{\exp ax}$$

Für $R > 0$ wählen wir nun $x$ groß genug ("$x > \max R, x_0$")und erhalten da Zähler nicht von $x$ abhängt

$$\frac{|\int\limits_{x_0}^{R}(h(s)-b)\exp asds|}{\exp ax} \leq \epsilon.$$

Bleibt uns noch der Rest

$$\begin{aligned}\frac{\int\limits_{R}^{x}|h(s)-b|\exp asds}{\exp ax} &\leq \frac{\epsilon}{a}(\exp ax - \exp aR)(\exp -ax)\\ &\leq \epsilon/a(1-\exp a(R-x))\\ &\leq \epsilon/a.\end{aligned}$$

Damit sind wir fertig.