Probeklausur Analysis III

Wintersemester 2011/2012 **Prof. Dr. D. Lenz**

Hilfsmittel. Keine.

Hinweise:

- Jedes Lösungsblatt ist mit Namen, Vornamen, Fachrichtung und Matrikelnummer zu versehen.
- Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt anzufangen.
- Schreiben sie **nicht** mit Bleistift.
- Eine Lösung wird nur gewertet, wenn der Lösungsweg nachvollziehbar ist.
- Bei (versuchtem) Betrug gilt die Klausur als nicht bestanden.

---

(1) (a) Was versteht man unter Rektifizierbarkeit einer Kurve und wie ist die Kurvenlänge definiert?

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) = (t,\, e^{\frac{a}{t}} \sin \tfrac{a}{t}),\ t \in (0,1] \quad \text{und} \quad \gamma(0) = (0,0)$$

rektifizierbar? Begründen Sie Ihre Antwort. **5 Punkte**

(2) (a) Geben Sie zwei äquivalente Charakterisierungen von lokalen Gradientenfeldern an.

(b) Was besagt der Satz über die Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals für geschlossene Kurven?

(c) Untersuchen Sie, ob es sich bei dem Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$F(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},$$

um ein lokales, bzw. globales Gradientenfeld handelt. **8 Punkte**

(3) (a) Geben Sie drei äquivalente Charakterisierungen von Untermannigfaltigkeiten an.

(b) Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Parametrisierung $\Phi : (0, 2\pi) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}^3$

$$(\alpha, r) \mapsto \left(\left(1 + r\cos\tfrac{\alpha}{2}\right)\cos\alpha, \left(1 + r\cos\tfrac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha, r\sin\tfrac{\alpha}{2}\right)$$

Bestimmen Sie alle $p = (\alpha_0, r_0)$ mit $\Phi(\alpha_0, r_0) = (1, 0, 0)$ und berechnen Sie den Tangential- und Normalenraum von M bezüglich Φ in $\Phi(\alpha_0, r_0) = (1, 0, 0)$.

(c) Was besagt der allgemeine Satz von Stokes?

(d) Beweisen Sie die Greensche Formel mit Hilfe des Satzes von Stokes. **10 Punkte**

(4) (a) Was versteht man unter dem Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ und der Fouriertransformation?

(b) Gehören die folgenden Funktionen zu $\mathcal{S}(\mathbb{R})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $f(x) = \frac{1}{x^4+x^2+1}$
2. $h(x) = e^{-x^{42}}$

7 Punkte

(5) (a) Wie ist die Fouriereihe einer Riemann-integrierbaren 2π-periodischen Funktion definiert?

(b) Was besagt die Parselvalsche Gleichung?

(c) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten der (2π-periodisch fortgesetzten) Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Zeigen Sie die gleichmäßige Konvergenz der Reihe. **7 Punkte**

(6) (a) Definieren Sie den Begriff des Semi-Skalarproduktes und geben Sie an, unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen ein Vektorraum mit Semi-Skalarprodukt ein Hilbertraum ist.

(b) Untersuchen Sie, ob es sich bei der folgenden Abbildung um ein Semi-Skalarprodukt bzw. um ein Skalarprodukt handelt. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : C^1[0,1] \times C^1[0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 \overline{u'(x)} v'(x) dx,$$

wobei $C^1[0,1]$ der Raum der einmal stetig differenzierbaren Funktionen von dem Intervall $[0,1]$ nach $\mathbb{C}$ ist und u' die erste Ableitung einer Funktion $u \in C^1[0,1]$ bezeichnet. **8 Punkte**