Analysis II für Physiker

Sommersemester 2009 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 9 **Abgabe Mittwoch 23.06.2009**

(1) (a) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine positive, stetig differenzierbare Funktion und sei

$$\Phi : (a, b) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (u, \phi) \to (f(u)\cos\phi, f(u)\sin\phi, u)$$

die von f erzeugte Rotationsfläche F. Untersuchen Sie unter welchen weiteren Voraussetzungen es sich dabei um eine reguläre Parametrisierung handelt.

(b) Sei F die Fläche, die man durch Rotation der Funktion

$$f : (0, 1) \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \sqrt[3]{u}$$

um die z-Achse erhält. Berechnen Sie den Fluß $\int_F \langle g, \nu\rangle dS$ des Feldes

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x, y, 0).$$

(2) Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (z, y, z + 1)$$

durch die Oberfläche des Kegels

$$K = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Finden Sie eine geeignete Parametrisierung und beachten Sie beim integrieren, dass die Normale nach außen weisen soll.

(3) Berechnen Sie die Gramsche Determinante für die Parameterisierung der Sphäre mit Radius R durch Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$.

(4) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit glatten Rand, der durch die stetig differenzierbare Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(x) = \gamma(x+2\pi)$, $x \in \mathbb{R}$ gegeben ist. Weiter soll Ω links von γ liegen, d.h.

$$\nu(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß, dass für jede in einer Umgebung U von $\overline{\Omega}$ definierte stetig differnzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^2$ gilt

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(x) \right) dx = \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt.$$

b) Sie $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1)$. Zeigen Sie, dass die Oberfläche von Ω gegeben ist als das Kurvenintegral

$$\frac{1}{2} \int_\gamma k(x) dx.$$

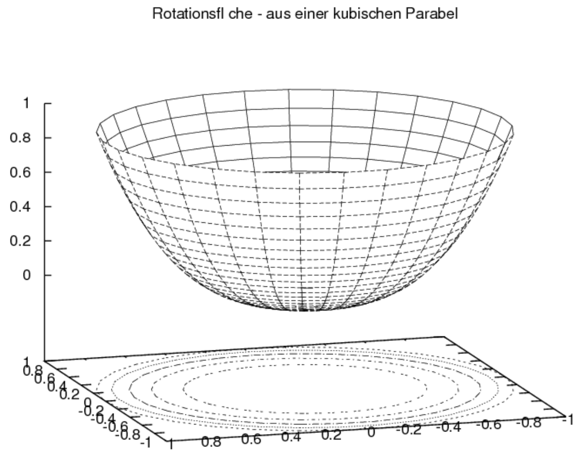

Abbildung 1: Zu Aufgabe 1: Ein etwas dickerer Paraboloid.

Zusatzaufgaben

(1) Sei $\kappa_m = |\{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \le 1\}|$, das Volumen der m-dimensionalen Einheitskugel und ω_m deren Oberflächeninhalt. Zeigen Sie

$$\kappa_m = \frac{1}{m} \omega_m.$$

(2) Gesucht ist die Gramsche Determinante $\det(D\Phi^T D\Phi)$ für die reguläre Parameterisierung der Kegelmantelfläche, gegeben durch

$$\Phi : (0,1) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ (z, \phi) \mapsto (z \cos \phi, z \sin \phi, z).$$