Sommersemester 2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Probeklausur **Besprechung: in der Übung, 5./7. Juli 2010**

(Zum Bestehen der Klausur benötigt man 22 von 42 Punkten)

(1) **5 Punkte**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{x}{y}, \qquad y(0) = 1.$$

(2) **5 Punkte**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = -y + e^{-x}\cos x, \qquad y(0) = 1.$$

(3) **6 Punkte**

a.) Was ist ein erstes Integral? Welche charakteristische Eigenschaft hat es für die Lösung einer DGL?

b.) Geben Sie ein erstes Integral der folgenden DGL an:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -4x \\ \dot{x} &= 2y \end{aligned}$$

(4) **6 Punkte**

a.) Was besagt der Peanosche Existenzsatz?

b.) Geben Sie verschiedene charakteristische Eigenschaften der maximalen Lösung an!

c.) Geben Sie ein $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ an, so dass die maximalen Lösungen von $y' = f(x,y)$ nicht auf ganz $\mathbb{R}$ existieren.

(5) **5 Punkte**

a.) Skizzieren Sie das Vektorfeld der DGL

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = (2e^{-y_1^2-y_2^2}-1)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2^3 \end{pmatrix}$$

b.) Zeigen Sie, dass die maximale Lösung für alle Zeiten existiert.

(6) **5 Punkte**

a.) Transformieren Sie das Anfangswertproblem

$$y''' = -y, \qquad y(0)=1, y'(0)=0, y''(0)=0$$

in ein äquivalentes System erster Ordnung.

b.) Welche Dimension hat der Raum der Lösungen? Warum?

(7) **6 Punkte**

Betrachten Sie das lineare System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'' = -\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad a,b \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

a.) Verifizieren Sie, dass $u(x) = (u_1(x), u_2(x)) = \exp(i\sqrt{a+b}x)(1,1)$ und $v(x) = (v_1(x), v_2(x)) = \exp(-i\sqrt{a-b}x)(1,-1)$ Lösungen sind.

b.) Zeigen Sie nun allgemein, dass zu jeder komplexen Lösung der linearen DGL $y'' = Ay$ der Real- und Imaginärteil auch eine Lösung ist.

c.) Geben Sie die allgemeine relle Lösung von $(*)$ an.

(8) **4 Punkte**

Geben Sie zum Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x-y}}, \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

ein kompaktes Rechteck $R := [0,b]\times[\frac{1}{2}-r, \frac{1}{2}+r]$ so an, dass die maximale Lösung den Bereich R auf seiner rechten Seite verläßt. (Gesucht sind $b, r > 0$ so, dass für die maximale Lösung ϕ des AWP gilt: $\phi(b) \in [\frac{1}{2}-r, \frac{1}{2}+r]$.) Begründen Sie Ihre Antwort.