Analysis I

Wintersemester 2016/2017 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 6 **Abgabe: 28.11.2016**

Im Folgenden sei $(K,+,\cdot)$ stets ein angeordneter Körper.

(1) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in K$. Untersuchen Sie, ob die Bernoulli Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

auch für $-2 \leq x < -1$ erfüllt ist.

Hinweis: Untersuchen bedeutet einen Beweis oder ein Gegenbeispiel anzugeben.

(2) Es sei $x \in K$ mit $x > 0$ und $J : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ die eindeutige Abbildung mit

$$J(e) = x \text{ und } J(\nu(n)) = J(n) + x \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass J injektiv ist und für alle $n, m \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$J(n+m) = J(n) + J(m)$$

erfüllt.

Bemerkung: Um die Struktur klarer hervorzuheben und Verwechslungen zu vermeiden, bezeichnen wir hier das ausgezeichnete Element von $\mathbb{N}$ als e und die Nachfolgeabbildung als ν.

(3) Zeigen Sie, dass eine Menge $M \subseteq K$ genau dann nach oben beschränkt ist, wenn $-M$ nach unten beschränkt ist. Weisen Sie weiterhin nach, dass $\sup M$ genau dann existiert, wenn $\inf(-M)$ existiert und dass in diesem Fall

$$\sup M = -\inf(-M)$$

gilt.

Erinnerung: Für $M \subseteq K$ ist $-M := \{-x \mid x \in M\}$.

(4) Zeigen Sie, dass die Menge $\{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 \leq 2\}$ im Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ kein Supremum besitzt.