Analysis II

Sommersemester 2014 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 10 **Abgabe Donnerstag 19.06.2011**

(1) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die Funktionen $|f|$, $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ stetig sind.

(2) Sei (M, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, die gegen $x \in M$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

kompakt ist.

(3) Sei $\|\cdot\|_*$ eine Norm auf $\mathbb{R}^N$. Zeigen Sie, dass jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^N$ nach $\mathbb{R}^N$ stetig ist.

(4) Man zeige für die Abbildungen $d_p : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$, $p \in [1, \infty)$,

$$d_p(x, y) := \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^N,$$

die Konvergenz

$$\lim_{p\to\infty} d_p(x, y) = d_\infty(x, y) := \max_{j=1,\dots,N} |x_j - y_j|, \qquad x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Zusatzaufgaben

(Z1) Sei $M = (0, 1)$ mit der euklidischen Metrik gegeben. Geben Sie eine offene Überdeckung von M an, die keine endliche Teilüberdeckung zulässt.

(Z2) Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ eine endliche Menge und $d_D : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ die diskrete Metrik auf $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass die Menge aller unendlichen Wörter über $\mathcal{A}$

$$\mathcal{W}_\mathcal{A} = \{u : \mathbb{N} \to \mathcal{A}\},$$

bezüglich der Metrik

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_D(x(i), y(i))}{2^i}$$

kompakt ist.

(Z3) Seien $(X_1, d_1), \ldots, (X_N, d_N)$ metrische Räume, $X = X_1 \times \ldots \times X_N$ und $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + \ldots + d_N(x_N, y_N)$, $x, y \in X$.

(a) Zeigen Sie, dass (X, d) genau dann vollständig ist, falls $(X_1, d_1), \ldots, (X_N, d_N)$ vollständig sind.

(b) Sei (Z, e) ein metrischer Raum und $f : Z \to X$, $z \mapsto (f_1(z), \ldots, f_N(z))$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, falls $f_1, \ldots, f_N$ stetig sind.