Höhere Analysis I

Sommersemester 2012 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 5 **Abgabe Freitag 25.05. 2012**

(1) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $C^1([a,b])$ der Raum der auf dem Intervall $[a,b]$ einmal stetig differenzierbaren Funktionen. Für $f, g \in C^1([a,b])$ sei

$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $(C^1([a,b]), d_\infty)$ ist nicht vollständig.

(b) $C^1([a,b])$ versehen mit der Metrik $d(f,g) = d_\infty(f,g) + d_\infty(f',g')$ ist vollständig.

(2) Ein metrischer Raum (M,d) ist genau dann nicht separabel, wenn es eine überabzählbare Teilmenge A von M und ein $\delta > 0$ gibt mit $d(x,y) \geq \delta$ für alle $x, y \in A$ mit $x \neq y$.

Erinnerung: Ein metrischer Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

(3) Ein lineares Funktional $\varphi : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ heißt Banachlimes, wenn gilt

(i) für den Linksshift $S(x_1, x_2, \dots) := (x_2, x_3, \dots)$ ist $\varphi \circ S = \varphi$,

(ii) sind alle $x_k \geq 0$, so ist $\varphi(x) \geq 0$,

(iii) für die Folge $e = (1, 1, \dots)$ ist $\varphi(e) = 1$.

Zeigen Sie:

(a) Ist $\varphi : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ ein Banachlimes, so gilt:

(1) Für alle $x = (x_n) \in \ell^\infty$ ist $\liminf x_n \leq \varphi(x) \leq \limsup x_n$.

(2) φ ist stetig mit Norm $\|\varphi\| = 1$.

(3) φ ist nicht multiplikativ, d.h. es existieren $x, y \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ mit $\varphi(x)\varphi(y) \neq \varphi(x \cdot y)$.

(b) Es gibt Banachlimiten.
Hinweis: Betrachten Sie den Untervektorraum $U := \{x \in \ell^\infty : \lim x_n \text{ existiert}\}$ und setzen Sie ein geeignetes lineares Funktional bezüglich dem sublinearen Funktional $p(x) := \limsup \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i$ fort.

(4) Sei $x = (x_i) \in \ell^1(\mathbb{N})$ und $\varphi_x : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{K}$ gegeben durch

$$\varphi_x(y) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\iota : \ell^1(\mathbb{N}) \to (\ell^\infty(\mathbb{N}))^*$, $x \mapsto \varphi_x$ ist normerhaltend.

(b) ι ist nicht surjektiv. Hinweis: Sie können einen Banachlimes betrachten.