Analysis I

Wintersemester 2016/2017 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 8 **Abgabe: 12.12.2016**

Hinweis: Im Folgenden sind diverse Zahlenfolgen auf Konvergenz und Divergenz zu untersuchen. Ein Beweis, der zeigen soll, dass eine Folge gegen einen Grenzwert konvergiert, beginnt stets mit "Sei $\varepsilon > 0$." und der Nachweis einer bestimmten Divergenz gegen $+\infty$ oder $-\infty$ beginnt stets mit "Sei $C \in \mathbb{R}$.". Falls möglich, und nicht anders gefordert, dürfen Sie natürlich auch die aus der Vorlesung bekannten Rechenregeln verwenden.

(1) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a_n := \sqrt{n+a} - \sqrt{n}, \quad b_n := \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \text{ und } c_n := \sqrt{n + n/a} - \sqrt{n}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $n > a^2$ gilt

$$a_n < b_n < c_n.$$

Beweisen Sie weiterhin

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2} \text{ und } \lim_{n\to\infty} c_n = \infty.$$

(2) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a_n := \frac{(n+1)!}{(n+2)! - n!}, \quad b_n := \frac{(-1)^n n^2}{2n^2+5} \text{ und } c_n := \frac{3n^2+n}{n^3+n-1}.$$

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ auf Konvergenz bzw. Divergenz.

(3) Beweisen Sie die folgenden Aussagen mithilfe der Grenzwertdefinition.

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 - n^2}{n} = 2.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^3+\ldots+n^3}{n^4} = \frac{1}{4}.$$

Bei Aufgabenteil (c) zeige man zunächst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

(4) Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen und x eine reelle Zahl. Weiterhin seien folgende Aussagen gegeben:

(i) $\forall k \in \mathbb{N}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \frac{1}{k}$.

(ii) $\forall q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < q^2$.

(iii) $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : |x_n - x| \leq \varepsilon$.

(iv) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall \varepsilon > 0\, \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$.

(v) $\forall n_0 \in \mathbb{N}\, \exists\, \varepsilon > 0\, \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$.

(a) Schreiben Sie die Aussagen (i)-(v) als vollständige Sätze ohne Verwendung von Quantoren.

(b) Untersuchen Sie, ob die Aussagen (i)-(v) jeweils dazu äquivalent sind, dass die Folge (x_n) gegen die reelle Zahl x konvergiert.