Sommersemester 2012 **Prof. Dr. D. Lenz**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 5 **Abgabe: Montag 03.07.2012**

(1) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale und globale Lipschitzstetigkeit bzgl. y auf den entsprechenden Definitionsbereichen.

a.) $f : \mathbb{R} \times (1, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \sin(x)\sqrt{y}$.

b.) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \sin(x)|\sin(y)|$.

c.) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x^2 \cdot \operatorname{sgn}(y)$ wobei

$$\operatorname{sgn}(y) = \begin{cases} +1, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases}.$$

d.) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x \cdot |y|^{\frac{3}{2}}$.

(2) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(1 + 2x^2 \cdot y^2) \cdot y' + x \cdot y^3 = 0, \qquad y(2) = \frac{1}{2}$$

auf $\Omega = (0, \infty) \times (0, \infty)$.

a.) Prüfen Sie die Differentialgleichung auf Exaktheit und bestimmen Sie gegebenenfalls einen integrierenden Faktor.

b.) Finden Sie im Falle der Exaktheit eine Stammfunktion und geben Sie eine Lösung des Anfangswertproblems an.

(3) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x^3 y' + y x^2 = 0, \qquad y(1) = 1$$

auf $\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}$.

a.) Prüfen Sie die Differentialgleichung auf Exaktheit und bestimmen Sie gegebenenfalls einen integrierenden Faktor.

b.) Finden Sie im Falle der Exaktheit eine Stammfunktion und geben Sie eine Lösung des Anfangswertproblems an.

(4) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = b$ und $a \in (0, \infty)$ gegeben. Zeigen Sie, dass für jede Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung $y'(x) + ay(x) = h(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{b}{a}.$$

Zusatzaufgaben:

(1) Seien $f, \beta : I \to [0, \infty), I = [a, b]$ stetige Funktionen, $\alpha \geq 0$ und es gelte für alle $x \in I$

$$f(x) \leq \alpha + \int\limits_a^x \beta(t) f(t)\, dt.$$

Zeigen Sie, dass dann für $x \in I$ gilt

$$f(x) \leq \alpha \exp\left(\int_a^x \beta(t) dt\right).$$