Analysis I

Wintersemester 2013/2014 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 6 **Abgabe 28.11.2013**

(1) Sei $a > 0$ und für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$a_n = \sqrt{n+a} - \sqrt{n}, \quad b_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}, \quad c_n = \sqrt{n+n/a} - \sqrt{n}.$$

Man zeige, dass für alle $n > a^2$ gilt

$$a_n < b_n < c_n$$

und für $n \to \infty$ gilt

$$a_n \to 0, \quad b_n \to \frac{1}{2}, \quad c_n \to \infty.$$

(2) Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen und x eine reelle Zahl. Weiterhin seien folgende Aussagen gegeben:

(i)	$\forall k \in \mathbb{N}$	$\exists n_0 \in \mathbb{N}$	$\forall n \geq n_0$	$\lvert x_n - x\rvert < \frac{1}{k}$,
(ii)	$\forall q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$	$\exists n_0 \in \mathbb{N}$	$\forall n \geq n_0$	$\lvert x_n - x\rvert < q^2$,
(iii)	$\forall \varepsilon > 0$	$\exists n_0 \in \mathbb{N}$	$\forall n \geq n_0$	$\lvert x_n - x\rvert \leq \varepsilon$,
(iv)	$\exists n_0 \in \mathbb{N}$	$\forall \varepsilon > 0$	$\forall n \geq n_0$	$\lvert x_n - x\rvert < \varepsilon$,
(v)	$\forall n_0 \in \mathbb{N}$	$\exists\, \varepsilon > 0$	$\forall n \geq n_0$	$\lvert x_n - x\rvert < \varepsilon$.

(a) Schreiben Sie die Aussagen (i)-(v) als vollständige Sätze ohne Verwendung von Quantoren.

(b) Untersuchen Sie, ob die Aussagen (i)-(v) jeweils dazu äquivalent sind, dass die Folge (x_n) gegen die reelle Zahl x konvergiert.

(3) Man beweise mit Hilfe der Grenzwertdefinition folgende Aussagen:

(a) $\frac{(n+1)^2-n^2}{n} \to 2$,

(b) $\frac{n}{2^n} \to 0$

(c) $\frac{1+2^3+\ldots+n^3}{n^4} \to \frac{1}{4}$.

Hinweis: Beginnen Sie Ihre Beweise mit "Sei $\varepsilon > 0$. ". In (c) zeige man zunächst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

b.w.

(4) Untersuchen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für konvergente Folgen die angegebenen Folgen reeller Zahlen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$(a) \quad \frac{(n+1)!}{(n+2)!-n!}, \qquad (b) \quad \frac{(-1)^n n^2}{2n^2+5}, \qquad (c) \quad \frac{3n^2+n}{n^3+n-1}.$$

Zusatzaufgabe: (Z1)

(a) Die Funktion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x(3x-1)$ ist injektiv.

(b) Für alle $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{Q}$ ist die Funktion $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto x(ax+b)$ injektiv.

(c) Sei $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{Q}$. Die Funktion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x(ax+b)$ injektiv genau dann wenn $b/a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.